



**INSTITUT FÜR GEOTECHNIK
STUTT GART**

**1992
MITTEILUNG 37**

INGOMAR BELZ

**ZUR ERMITTLUNG DYNAMISCHER
BODENKENNWERTE IN SITU AUS
DER SYSTEMANTWORT DES ERREGERS**



**INSTITUT FÜR GEOTECHNIK
STUTT GART**

**1992
MITTEILUNG 37**

INGOMAR BELZ

**ZUR ERMITTLUNG DYNAMISCHER
BODENKENNWERTE IN SITU AUS
DER SYSTEMANTWORT DES ERREGERS**

Zur Ermittlung dynamischer Bodenkennwerte in situ aus der Systemantwort des Erregers

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

INGOMAR BELZ

aus Blaubeuren

Hauptberichter: Prof. Dr. techn. H. BEDNARCZYK

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. U. SMOLTCZYK

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juni 1992

Das Institut für Geotechnik ist eine Einrichtung der Universität Stuttgart

ISBN 3-921837-37-5

Gegen Vervielfältigung und Übersetzung bestehen keine Einwände, es wird lediglich um
Quellenangabe gebeten.

Herausgegeben 1992 im Eigenverlag des Instituts für Geotechnik

Vorwort des Herausgebers

Die vorliegende Dissertation von Herrn Dr.-Ing. Belz wurde von mir in unsere Mittellingsreihe aufgenommen, da sie in enger Zusammenarbeit der Institute für Mechanik (Bauwesen) und Geotechnik entstand und von mir als Mitberichter in ihrem geotechnischen Teil betreut wurde. Ihre aufschlußreichen Ergebnisse mögen dazu dienen, den Einsatz bodendynamischer Prüfmethode im Feld zu erweitern, indem der Schwingungserreger selbst als Prüfmaschine eingesetzt wird. Herr Belz hat diesen interessanten Testfall analytisch untersucht und damit die Möglichkeiten und Grenzen des Verfahrens ausgeleuchtet. Es ist zu wünschen, daß die experimentelle Verifizierung dank dieser überzeugenden Vorarbeit nun von der Bodendynamik geleistet werden kann.

Smoltczyk

Zum Geleit

Die dynamische Ermittlung von Bodenkennwerten dürfte zu den jüngsten experimentellen Vor-Ort-Verfahren der Bodenmechanik gehören. Dabei werden gezielt Wellenausbreitungsvorgänge im Boden untersucht und die Ergebnisse zur Ermittlung der interessierenden Kennwerte herangezogen.

Grundsätzlich handelt es sich hierbei um folgende Aufgabe: Ein Erreger entsendet eine Welle in den Boden, die von einem geeignet angebrachten Empfänger registriert wird. Nun ist es zunächst offen, wo der Empfänger relativ zum Erreger plaziert wird, und man kann sich auf den extremen Standpunkt stellen, daß der Empfänger mit dem Erreger identisch ist, denn mißt man die Eigenbewegung des Erregers, so ist diese natürlich gleichfalls abhängig von den Eigenschaften des Bodens, auf dem er gebettet ist. Es muß also möglich sein, die Bodenkennwerte direkt aus der Systemantwort des Erregers zu bestimmen, was eine nicht unbeträchtliche Vereinfachung des Versuchsaufwandes bedeutet.

Diesem Grundgedanken wurde am Institut für Mechanik (Bauwesen) schon in der ersten Hälfte der 70er Jahre nachgegangen, und erste experimentelle Ergebnisse haben die Vermutung über die Brauchbarkeit einer solchen Versuchsanordnung voll bestätigt. Herr Belz hat seine Arbeit der genaueren Untersuchung dieses Verfahrens gewidmet und dessen Anwendung auf eine elastische sowie eine viskoelastische Bodenschicht voll ausgearbeitet.

Dem Verfahren sind allerdings keine prinzipiellen Grenzen seitens der stofflichen Klassifikation des Bodens gesetzt, und natürlich kann der Boden auch auf andere Art als durch Vertikalschwingungen erregt werden.

Mögen die Ergebnisse von Herrn Belz den Anstoß geben zu weiteren Arbeiten im Zusammenhang mit dem von ihm untersuchten Verfahren zur Ermittlung dynamischer Bodenkennwerte. Die Flexibilität des Verfahrens läßt dazu förmlich ein.

H. Bednarczyk

Vorwort des Autors

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.

Ich danke allen, die durch Unterstützung, Förderung, Diskussion und Geduld zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Zuerst gilt mein Dank den beiden Berichtern: Herrn Professor Dr. techn. HERBERT BEDNARCZYK, der mir das Thema zur Wahl vorschlug, mir in vielen Diskussionen die Richtung zur Fehlersuche und zur Fortsetzung der Arbeit wies, mir dabei als Wissenschaftler immer mehr zum Vorbild wurde sowie schließlich den Hauptbericht übernahm.

Herr Professor Dr.-Ing. ULRICH SMOLTZYK gab mir u.a. die Möglichkeit, die Versuche durchzuführen, eröffnete mir mit dem Arbeitskreis "Baugrunddynamik" der Deutschen Gesellschaft für Erd- und Grundbau Zugang zu den neuesten Informationen, hakte an interessanten Stellen nach und übernahm den Mitbericht.

Beiden Berichtern danke ich für die wiederholte kritische Durchsicht und für die sich daraus ergebenden Anregungen.

Für die Durchsicht von Kapitel 2.1 danke ich Dr.-Ing. W. HAUPT, für die in Kapitel 3.1 erwähnte Literaturliste Dr.-Ing. W. RÜCKER, beide Mitglieder des Arbeitskreises.

Da die Entwicklung einer Arbeit zu einer Einheit ohne Diskussionen mit Kollegen kaum vorstellbar ist, möchte ich stellvertretend einige dankend erwähnen: S. CRIENITZ, M. RICHTER, C. SANSOUR und vor allem R. LAUTENBACH, der mit mathematischen Fragen immer ansprechbar war.

Bei den Versuchen unterstützte mich N. VOGT (damals am Institut für Grundbau und Bodenmechanik) und bei deren Auswertung Professor Dr.-Ing. E. LUZ. Der Versuchsrüttler wurde von der Firma SCHÄBERLE, Stuttgart-Vaihingen, zur Verfügung gestellt.

I. Belz

Kurzfassung

Nach einer kurzen Einführung in die Baugruddynamik und die dort verwendeten Bodenmodelle und Stoffgesetze werden die in Deutschland üblichen dynamischen Bodenerkundungsverfahren knapp erläutert.

Anschließend wird das Prinzip eines neuen Versuchs zur Ermittlung bodendynamischer Kennwerte vorgestellt, bei dem die Antwort des Systems Erreger-Boden direkt am Erreger gemessen wird.

In begleitenden theoretischen Untersuchungen wird das Problem "Schicht auf starrem Untergrund bei Vertikalerregung an der Oberfläche" weitgehend analytisch gelöst, wobei zunächst für die Schicht ein elastisches, dann ein viskoelastisches Stoffgesetz – der lineare Standardfestkörper mit volumentreuem Kriechen – angesetzt wird.

Mit einem speziell dafür entwickeltem FORTRAN-Programm ausgeführte Parametervariationen zeigen die Auswirkungen vor allem der Erregerfrequenz, der Schichtdicke und der Querdehnzahl auf die komplexe Steifigkeit und auf die Amplitude.

In weiteren Kapiteln wird gezeigt, wie sich die Ersatzparameter des eindimensionalen viskoelastischen Modells bestimmen lassen und wie sich die Energie in einer elastischen Schicht ausbreitet. Bemerkungen zur Dämpfung und zu Wellen und deren Geschwindigkeiten ergänzen den Text.

Summary

The introduction to soil dynamics and the soil models and constitutive equations used therein is followed by a brief explanation of the dynamic soil determination tests usually applied in Germany.

Then the basis of a new test to determine dynamic soil properties is presented, in which the response of the vibrator-soil system will be measured directly at the vibrator.

In accompanying theoretical analyses the problem "stratum on rigid subsoil with vertical excitation on the surface" is solved analytically, to a large extent, assuming firstly the stratum as elastic and then as viscoelastic - using the so-called linear standard solid with volume-constant creeping.

Parameter variations which are performed by means of an especially developed FORTRAN program render possible to study the effects of the vibrator frequency, the depth of the stratum, and the Poisson's ratio on both the complex stiffness and the amplitude.

Further chapters show how the equivalent parameters of the one-dimensional viscoelastic model can be determined and how energy propagates through an elastic stratum. The text is completed by remarks on damping and on stress waves and their velocity.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Liste der Bilder	7
Liste der Bezeichnungen	11
Zusammenfassung (1)	17
1 Baugrunddynamik	19
1.1 Aufgabenstellungen	20
1.2 Bodenmodelle	22
1.3 Stoffgesetze	25
2 Experiment. Ermittlung dynam. Bodenkenwerte	31
2.1 Bekannte Verfahren	32
2.1.1 Laborversuche	33
2.1.2 Feldversuche	34
2.1.3 Einsatz der Verfahren	39
2.2 Ermittlung dynamischer Bodenkenwerte in situ	41
2.2.1 Versuchsanordnung	41
2.2.2 Versuchsauswertung	41

3	Theoretische Untersuchungen	47
3.1	Klassifizierung von Lösungen aus der Literatur	47
3.2	Auswahl des Schwingungssystems	49
3.3	Elastische Schicht	52
3.3.1	Zusammenstellung der Gleichungen	52
3.3.2	Lösung des Differentialgleichungssystems	54
3.3.3	Anpassung an die Randbedingungen	55
3.3.4	Aufbereitung der Lösung für die Vergleichsrechnung zum Versuch	60
3.3.4.1	Vertikalbewegungen an der Schichtoberfläche	60
3.3.4.2	Freie Schwingungen	60
3.3.4.3	Dimensionslose Parameter	60
3.3.4.4	Konturintegration	65
3.3.4.5	Mittlere Vertikalbewegung unter der Grundplatte	67
3.3.4.6	Komplexe Nachgiebigkeit	68
3.3.4.7	Impedanz und Steifigkeiten	69
3.3.4.8	Resonanzfrequenz einer Schicht	71
3.3.5	Numerische Auswertung der Lösung für die elastische Schicht	72
3.3.5.1	Praktisch relevante Werte der Parameter	73
3.3.5.2	Untersuchung der Dispersionsrelation	74
3.3.5.3	Nachgiebigkeit, Impedanz, Amplitude und Phase	75
3.4	Viskoelastische Schicht	78
3.4.1	Lineare Viskoelastizität	78
3.4.2	Behandlung dynamischer Probleme der Viskoelastizität	83
3.4.3	Bemerkungen zur Dämpfung	85
3.4.4	Dynamische Querdehnzahl	91

3.4.5	LAPLACE-Transformation	93
3.4.6	Korrespondenzprinzip	95
3.4.7	Lösung für die viskoelastische Schicht	97
3.4.7.1	Lösung im Bildraum	97
3.4.7.2	Rücktransformation der Lösung in den Originalraum	99
3.4.7.3	Aufbereitung der Lösung für die Vergleichsrechnung	100
3.4.8	Numerische Auswertung für die viskoelastische Schicht	106
4	Eindimensionale Vergleichsrechnung	109
5	Energieausbreitung in einer Schicht	113
5.1	Zugeführte Energie	113
5.2	Abgestrahlte Energie	115
5.2.1	Elastische Schicht	117
5.2.2	Viskoelastische Schicht	122
6	Parameterstudien	125
6.1	Wellen	125
6.2	Elastische Schicht	128
6.3	Viskoelastische Schicht	183
7	Zuordnung Versuche – Berechnungen	189
8	Zusammenfassung (2)	191
	Literaturverzeichnis	192
A	Anhang zu Kapitel 3.3.2	201

Liste der Bilder

<i>Bild Nr.</i>	<i>Titel</i>	<i>Seite</i>
<i>1</i>	Aufgabenstellungen der Baugrunddynamik	21
<i>2 a</i>	Massenpunkthypothese	22
<i>2 b</i>	EHLERS-Hypothese	23
<i>2 c</i>	Schicht auf Halbraum oder auf starrem Untergrund	24
<i>2 d</i>	Mehrschichtenmodell	24
<i>2 e</i>	Direkte Methode	24
<i>2 f</i>	Substrukturmethode	24
<i>2 g</i>	Abbildung des Baugrunds bei der Substrukturmethode	25
<i>3 a</i>	Elastisches Stoffgesetz	26
<i>3 b</i>	Bruchbedingung	27
<i>3 c</i>	Konsolidation	27
<i>3 d</i>	Viskoelastisches Stoffgesetz	28
<i>3 e</i>	Belastungsweig des elastoplastischen Stoffgesetzes nach HARDIN-DRNEVICH	28
<i>3 f</i>	Elastoplastisches Stoffgesetz nach RAMBERG-OSGOOD für die Rückgratkurve der Hysterese	29
<i>4 a</i>	Resonant-Column-Gerät	34
<i>4 b</i>	Zyklisches Dreiaxialgerät	35
<i>5 a</i>	Reflexionsseismik	36
<i>5 b</i>	Refraktionsseismik	37
<i>5 c</i>	Bohrlochtechniken	37
<i>5 d</i>	RAYLEIGHwellen-Dispersionsmessung	38
<i>5 e</i>	Fundamentversuch (Resonanzmessung)	39

6	Verzerrungsamplituden verschiedener Problemstellungen und einiger Feld- und Laborversuche	40
7 a	Meßanordnung des vorgeschlagenen Versuchs	42
7 b	Apparative Ausstattung (Vorversuch)	43
8	Autospektren aus zwei Messungen bei Sand verschiedener Lagerungsdichte	44
9	Ermittlung der Dämpfungskapazität aus der Halbwertsbreite	45
10	Modell für theoretische Untersuchungen	50
11	Spannungsverteilung unter einer Platte	52
-	Tabelle: Parameterbereiche	74
12	Nullstellen $\varphi_n > 1$ der Dispersionsrelation $N(\varphi) = 0$	76
13	Linearer Standardfestkörper (eindimensionales Modell)	81
14	Dämpfung beim Modell LStvK	87
15	Diagramm des Ausschwingversuchs	89
-	Tabelle: Dynamische Viskosität η	106
16	Linearer Standardfestkörper als Schwinger mit zwei Freiheitsgraden	110
17	Abstrahlungsenergie an der Zylindermantelfläche	115
18	Zusammenstellung von Wellentypen	126
19	Teilchenbewegungen bei RAYLEIGHwellen	127
20	Zusammenstellung von Wellengeschwindigkeiten	129
21	Parametervariationen für die elastische Schicht	ab 135
21.1 - 21.16	k_z - Realteil der komplexen Steifigkeit, "Federsteifigkeit"	136 - 143
21.17 - 21.32	c_z - modifizierter Imaginärteil der komplexen Steifigkeit, "Dämpfung"	146 - 153
21.33 - 21.48	$\overline{A_0}$ - dimensionslose Amplitude	156 - 163
22 - 28	Kurven für verschiedene Vergleiche	ab 165
22.1	f_1 - Realteil der komplexen Nachgiebigkeit	166
22.2	f_2 - Imaginärteil der komplexen Nachgiebigkeit	166
22.3	φ - Phasenverschiebung	167
23	Geglättete Amplitudenkurve $\overline{A_0}$	168
24	Quasistatische Nachgiebigkeit $f_1(\nu)$ bei sehr großer Schichtdicke	168
25.1	Quasistatische Steifigkeit $k_z(\overline{d})$	169
25.2	Statische Steifigkeit $k_z(\overline{d})$ nach [44]	169
26.1	Steifigkeit $k_z(\overline{d} = 10)$	170
26.2	Dämpfung $c_z(\overline{d} = 10)$	170

27.1	Steifigkeit k_z nach [56]	171
27.2	Dämpfung c_z nach [56]	171
28.1	Steifigkeit k_z bei konstanter Spannungsverteilung	172
28.2	Dämpfung c_z bei konstanter Spannungsverteilung	172
28.3	Amplitude \bar{A}_0 bei konstanter Spannungsverteilung	173
29.1 - 29.10	Zur Berechnung benötigte Funktionen	176 - 180
30.1	$u_{zm}(t)$ - Vertikalverschiebungen bei "statischer" Spannungsverteilung	181
30.2	$u_{zm}(t)$ - Vertikalverschiebungen bei konstanter Spannungsverteilung	181
31 + 32	Vergleich zwischen viskoelastischer und elastischer Schicht	ab 185
31.1 + 32.1	Steifigkeiten k_{z_v} und k_z	186
31.2 + 32.2	Dämpfungen c_{z_v} und c_z	187
31.3 + 32.3	Phasenverschiebungen φ_v und φ	188

Liste der Bezeichnungen, Abkürzungen und Symbole

Bezeichnungen, Abkürzungen und Symbole mit übergeordneter Bedeutung sind hier aufgeführt; nur in einzelnen Textabschnitten verwendete werden aus dem Zusammenhang klar, da alle bei ihrem ersten Auftreten definiert werden.

1) Lateinische Buchstaben

A_0	Amplitude der elastischen Schicht bei masseloser Grundplatte
A_m	Amplitude der elastischen Schicht bei massebehafteter Grundplatte
A_e	Amplitude des eindimensionalen Modells
A_a	abgeführte Arbeit in der elastischen Schicht
A_z	zugeführte Arbeit
$\overline{A_{D_v}}$	dimensionslose Dämpfungsarbeit; Schicht viskoelastisch
$A_{1 \rightarrow 2}$	Arbeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$
a	Radius der Erregergrundfläche
a_0	dimensionslose Frequenz; elastische Schicht
B_z	bezogene Masse
b	bezogene Masse (alternative Definition)
C, \overline{C}, C_n	allgemeine Konstanten und Koeffizienten
c	Federkonstante
c_p	Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kompressionswelle
c_s	Ausbreitungsgeschwindigkeit der Scherwelle
c_R	Ausbreitungsgeschwindigkeit der RAYLEIGHwelle
c_z	modifizierter Imaginärteil der komplexen Steifigkeit bzw. der Impedanz der elastischen Schicht ("Dämpfung")
D	Dämpfung, LEHRsches Dämpfungsmaß
d	Schichtdicke der Bodenschicht

E	Elastizitätsmodul
E_d	dynamischer Elastizitätsmodul
E_S	StEIFEMODUL
eLSt	Abkürzung für <i>eindimensionaler linearer Standardfestkörper</i>
F	Erregerkraftamplitude
$F(t)$	Eingangsfunktion
$F(\varphi)$	Abkürzung für Teil des Integranden; elastischer Fall
f	Frequenz
f^*	Bildfunktion im LAPLACERaum
f_1	Realteil der komplexen Nachgiebigkeit der elastischen Schicht
f_2	Imaginärteil der komplexen Nachgiebigkeit der elastischen Schicht
G	Schubmodul
G_d	dynamischer Schubmodul
\tilde{G}	komplexer Schubmodul
G'	Realteil des komplexen Schubmoduls
G''	Imaginärteil des komplexen Schubmoduls
\tilde{G}	viskoser Schubmodul
h	Wellenzahl der Kompressionswelle
\hat{i}	Impedanz der elastischen Schicht (komplex)
$Im\{..\}$	Imaginärteil von ..
J_n	Besselfunktion 1. Art n-ter Ordnung
K	Kompressionsmodul
k	Dämpferkonstante, Dämpfungskoeffizient
k	Wellenzahl der Scherwelle
k_z	Realteil der komplexen Steifigkeit bzw. der Impedanz der elastischen Schicht ("Federsteifigkeit")
L	Leistung
\mathcal{L}	Operator der LAPLACE-Transformation
\mathcal{L}^{-1}	Operator der LAPLACE-Rücktransformation
LSt	Abkürzung für <i>linearer Standardfestkörper</i>
LStvK	Abkürzung für <i>linearer Standardfestkörper mit volumentreuem Kriechen</i>
m	Masse, Gesamtmasse des Erregers
m_b	Bezugsmasse
m_0	Erregerunwuchtmasse

$N(\varphi)$	Nenner im Integranden; elastischer Fall
$\underline{P}, \underline{Q}$	Differentialoperatoren
$q(s)$	Übertragungsfunktion
$q(i\Omega)$	Frequenzgang
$Re\{..\}$	Realteil von ..
Res_{z_i}	Residuum von z_i
r	Koordinate in radialer Richtung
r_0	Exzentrizität der Unwuchtmasse
\vec{S}	Energietransportvektor
s	LAPLACEvariable
t	Variable der Zeit
u, u_z	Verschiebung in Tiefenrichtung
u_{z_0}	Verschiebung an der Oberfläche bei freien Schwingungen
u_{z_m}	mittlere Vertikalbewegung unter der Grundplatte der elastischen Schicht
\ddot{u}_z	Beschleunigung in z -Richtung
$u(\Omega)$	Realteil von $q(i\Omega)$ (Wirkkomponente)
$v(\Omega)$	Imaginärteil von $q(i\Omega)$ (Blindkomponente)
v_k	Geschwindigkeit in allgemeiner Richtung
W	Gesamtarbeit
ΔW	Dämpfungsarbeit
Y_n	Besselfunktionen 2. Art n -ter Ordnung
Y_U	Übergangsfunktion
Y_{Ω}	Ausgangsfunktion
Z_J	Zähler beim Imaginärteil; viskoelastischer Fall
Z_R	Zähler beim Realteil; viskoelastischer Fall
$Z(\varphi)$	Zähler im Integranden; elastischer Fall
z	Koordinate in Tiefenrichtung

2) Griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \kappa, \xi$	allgemeine Wellenzahlen
β	hysteretische Dämpfungskonstante
β_G	Materialdämpfung bei Gestaltänderung
γ	Schubverzerrung
Δ	LAPLACE-Operator
δ	Abklingkoeffizient

δ_{ik}	KRONECKERSymbol
η	Scherviskosität, viskose Dämpfungskonstante
ϵ	Dehnung, Verzerrung
ϵ_{ik}	Komponente des Verzerrungstensors
ζ	“Spannungviskosität”
Θ	kubische Dilatation
κ	Volumenviskosität
Λ	logarithmisches Dekrement
λ	Wellenlänge
ν	Querdehnzahl
ρ	Dichte
σ	Spannung
σ_{ik}	Komponente des Spannungstensors
τ	Schubspannung
τ	Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten, Brechungsahl
Φ	Winkel der inneren Reibung <i>oder</i> Dämpfungswinkel
φ	dimensionslose Wellenzahl
φ	Phasen(verschiebungs)winkel
ψ	Dämpfungskapazität
Ω	Erregerkreisfrequenz
ω	Kreisfrequenz
ω_0	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

3) Indizes

a	abgeführt
D	Dämpfung
d	dynamisch
e	eindimensional
G	Grenz
i, j, k, n	Zählindizes
l	längs
M	Maschine
m	mittlere <i>oder</i> massebehaftet
n	natürlich
p	primär
q	quer

R	RAYLEIGH <i>oder</i> Resonanz
r	Referenz
s	sekundär
v	viskoelastisch
z	zugeführt
0	masselos <i>oder</i> dimensionslos

4) Symbole

(an Beispielen erklärt)

\vec{R}, \vec{e}_r	Vektoren
$\bar{A}, \bar{d}, \bar{u}_{zmo}$	dimensionslose Größen
$\bar{C}, \bar{u}_{r,r}$	modifizierte Größen
N^*, f^*	Größen im LAPLACE-Bildraum
$\hat{E}, \hat{\nu}$	komplexe Größen
u_i	Vektorkomponente
σ_{ik}	Tensorkomponente
$\overset{\circ}{\sigma}$	Kugelanteil eines Tensors
$\bar{\varepsilon}$	Deviatoranteil eines Tensors
ε_{jj}	Spur eines Tensors
dF, dt	differentielle Größen
$\underline{P}, \underline{Q}$	Differentialoperatoren
G', K'	Realteile von Moduli
G'', K''	Imaginärteile von Moduli
\mathbf{M}	Matrix
$' = \frac{d}{dz}$	Ableitung nach einer Ortskoordinate
$\dot{u}_i = u_{i,t} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$	partielle Ableitung nach der Zeit
$f^{(n)}$	n-te Ableitung
$\Theta_{,z}$	Ableitung nach z
$u_{i,rr}$	2. Ableitung nach r
$*$	Symbol für Faltung

Zusammenfassung (1)

Ziele, Übersicht und Abgrenzung

Die Ziele meiner Untersuchungen waren:

1. die Vermutung zu einer neuen Ermittlungsmethode dynamischer Bodenkennwerte durch Vorversuche zu bestätigen,
2. theoretische Untersuchungen mit einem geeigneten mathematischen Modell durchzuführen und damit
3. den Weg zur Entwicklung eines Standardversuchs zu ebnen.

In den Kapiteln 1 und 2.1 wird eine Einführung in die Baugrunddynamik und in die bisher verwendeten Methoden der dynamischen Baugrunderkundung gegeben, bevor in Kapitel 2.2 das neue Verfahren vorgestellt wird.

Neu an dem Verfahren ist nicht, daß die Antwort eines mittels Rüttler erregten Bodensystems gemessen wird, neu ist die Messung direkt am Rüttler.

Auch die Analyse im Frequenzbereich ist in der Dynamik gängig, neu ist die Anwendung der Spektralmethode in diesem Bereich der Baugrunddynamik.

Die theoretischen Untersuchungen im Kapitel 3 bilden den Hauptteil dieser Arbeit. Berechnungen wurden für eine unendlich ausgedehnte Schicht mit zwei verschiedenen Stoffgesetzen – dem elastischen und dem viskoelastischen – weitgehend analytisch vorgenommen. Dabei wurde die Lösung des elastischen Problems auf eine dem Ingenieur naheliegende Art gewonnen (siehe *Anhang* zu Kapitel 3.3.2).

Die Verwendung des linearen Standardfestkörpers ist neu in der Baugruddynamik. Daher wird dessen Herleitung den üblichen Methoden gegenübergestellt (Kapitel 3.4.1 und 3.4.2). Zum wichtigen Effekt der Dämpfung folgen in Kapitel 3.4.3 einige Bemerkungen.

Die bei der Lösung verwendeten mathematischen Methoden sind nicht neu, aber ihre Anwendung auf vorliegende Fragestellungen ist es teilweise, so daß sie im jeweiligen Zusammenhang kurz eingeführt werden. Die den in Kapitel 6 dargestellten Variationen der Parameter zugrunde liegenden Lösungen sind neu bzw. in dieser Form neu.

Auf die vielfach übliche eindimensionale Vergleichsrechnung wurde beim elastischen Problem verzichtet, nicht jedoch beim viskoelastischen (Kapitel 4); der Vergleich der Lösungen im Bildraum ist neu.

Ebenfalls neu sind die Ausdrücke, die für die Energieausbreitung in einer Schicht entwickelt wurden (Kapitel 5); sie liefern Ansätze zur Trennung von geometrischer und Materialdämpfung.

Die einzelnen Parameter wurden soweit variiert, daß Tendenzen abgelesen werden können und die Zuordnung zu den Versuchen erfolgen kann (Kapitel 7).

Die Entwicklung eines Standardversuchs und des zugehörigen spezifizierten Rüttlers sowie die dazu nötige Lösung des inversen Problems waren nicht Thema dieser Arbeit; ein entsprechender Forschungsantrag an die DFG wurde leider trotz Empfehlung von Dr.-Ing. KRAMER, Obmann des Arbeitskreises "Baugruddynamik", nicht genehmigt.

Mein Wunsch bei der Wahl dieses Themas war, mit den theoretischen und experimentellen Methoden der Mechanik ein Problem mit praktischem Nutzen zu lösen.

Kapitel 1

Baugrunddynamik

Bevor ich zum eigentlichen Thema dieser Arbeit komme, möchte ich es im ersten Kapitel einordnen und daher die Baugrunddynamik soweit wie nötig darstellen.

Sie ist kaum älter als 50 Jahre und selbstverständlich keine eigene Dynamik, sondern eine angewandte Wissenschaft, die mehr als andere Bereiche der Mechanik auf Erfahrungen aus der Praxis und auf Experimente angewiesen ist.

Ihre eigenständige Rolle erhielt sie aus der Tatsache, daß der anstehende Boden als Baugrund meist nicht genau beschrieben werden kann, weil er in der Regel ein inhomogenes, anisotropes, nichtlineares Mehrstoffsystem ohne glatte Ränder darstellt.

Als Begründer der Baugrunddynamik nennt LORENZ in seinem Buch "Grundbau-Dynamik" [54] A. HERTWIG. Weitere Namen aus der Anfangszeit, den 30er Jahren, sind RAUSCH [67], H. und E. REISSNER; letzterer verfaßte 1936 einen auch heute noch häufig zitierten Artikel [68].

Zu den fachlichen Ahnen kann neben der Bodenmechanik u.a. die Seismologie gezählt werden, von deren Arbeiten auf dem Gebiet der Erdbebenforschung (z.B. [50],[73]) die Baugrunddynamiker profitierten und profitieren. Erdbeben stellen für Dynamiker aber nur eine spezielle Art der Erregung dar.

In den letzten 20 Jahren hat die Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der Baugrunddynamik stark zugenommen, vor allem im theoretischen Bereich [49].

1980 wurde von der Deutschen Gesellschaft für Erd- und Grundbau e.V. (DGEG) ein Arbeitskreis "Baugrunddynamik" (AK 9) eingerichtet, der u.a. die Veröffentlichungen

auf diesem Gebiet zusammenfassen und Empfehlungen für die Praxis erarbeiten soll, die demnächst erstmals erscheinen.

1.1 Aufgabenstellungen

Die Baugruddynamik befaßt sich mit der Bauwerk–Baugrund–Wechselwirkung, also mit den Bewegungen des Baugrunds und den dabei entstehenden Kräften im Baugrund und in den Bauwerken. Die Ursachen dieser Bewegungen sind vielfältig, wobei die praktisch vorkommenden Fälle sich hinsichtlich des Erregungsortes einteilen lassen in

- interne Erregung (z.B. Maschinenfundamente) und
- externe Erregung (z.B. Erschütterungen infolge von Verkehr, Baugeräten, Erdbeben u.a.).

Vor allem das zweite Teilgebiet erlangte wachsende Bedeutung, wofür KRAMER [49] verschiedene Gründe aufzählt. Die Fragestellungen in der Baugruddynamik betreffen

- die Erschütterungsquelle,
- die Wellenausbreitung sowie
- die Übertragungswirkung Baugrund-Bauwerk und umgekehrt.

Weiterhin interessieren die Auswirkungen der Bewegungen sowohl

- im Kurzzeitverhalten, z.B. bei der Ermittlung von Immissionsdaten auf Bauteile, Geräte und Menschen, als auch
- im Langzeitverhalten, z.B. Verdichtung oder Auflockerung des Baugrunds.

Um Aussagen über Spannungs- und Verschiebungsfelder in einem Kontinuum (als solches soll hier der Boden – wie häufig üblich – betrachtet werden) infolge von Belastungen machen zu können, werden Materialkenngrößen benötigt. Die Ermittlung dieser Materialkennwerte, speziell der in der Baugruddynamik verwendeten *dynamischen Bodenkennwerte* G_d , ν und ψ , ist ein weiteres Teilgebiet, zu dem diese Arbeit einen Beitrag leisten soll. In *Bild 1* sind die Aufgaben zusammengestellt.

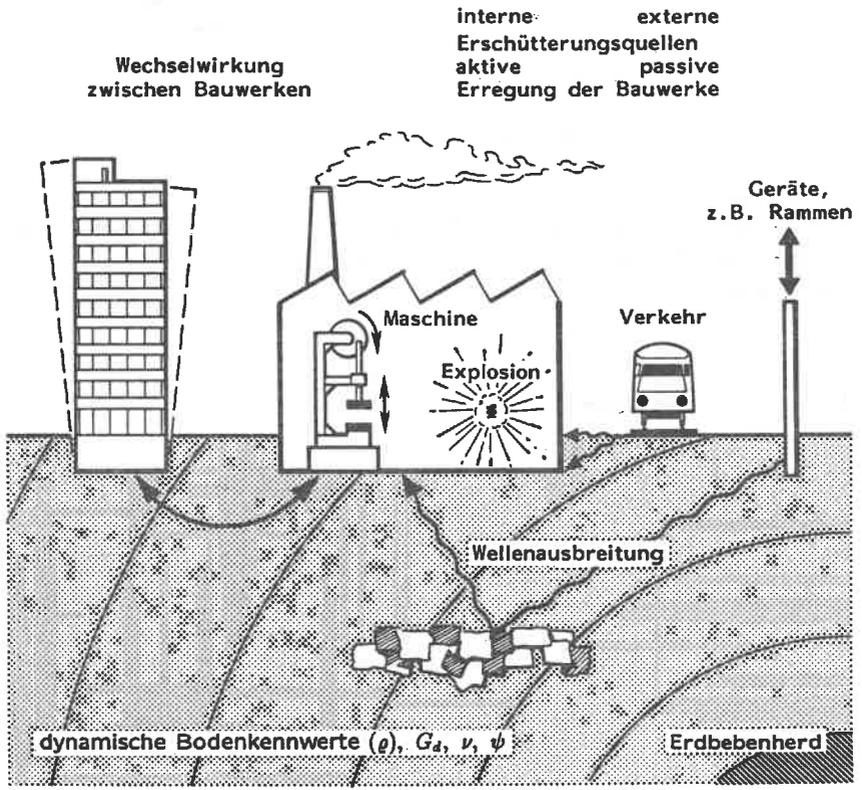
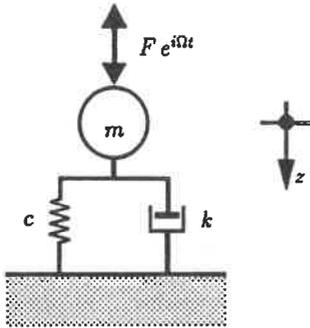


Bild 1: Aufgabenstellungen der Baugrunddynamik



$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = F e^{i\Omega t}$$

$$c = C \cdot A$$

$$k \text{ global}$$

$$C \text{ Bettungszahl}$$

$$A \text{ Erregergrundfläche}$$

Bild 2 a: Massenpunkthypothese

Da die verwendeten Bodenkennwerte von der Wahl des mathematischen Modells und des Stoffgesetzes für den Boden abhängen, werden diese in den nächsten beiden Kapiteln kurz dargestellt.

1.2 Bodenmodelle

Der Boden läßt sich je nach Aufgabenstellung mathematisch auf verschiedene Arten abbilden.

Das einfachste Modell ist das des Einmassenschwingers mit Feder und Dämpfer ("Massenpunkthypothese"; Bild 2 a). Dieses Modell wird häufig zu Vergleichsrechnungen herangezogen, vor allem bei Untersuchungen an Maschinenfundamenten.

EHLERS [25] schlug 1942 vor, die Federkonstante c und die Dämpferkonstante k aus dem Gedankenmodell "Vertikalschwingung eines Kegelstumpfs" zu gewinnen (Bild 2 b). Weiterentwicklungen dieses Modells finden sich z.B. bei SCHIMMERL 1967 [72], VELET-SOS und WEI 1974 [83] sowie bei GAUL 1982 [31].

Am häufigsten findet man als Modell jedoch den Halbraum, speziell den mit einem elastischen Medium ausgefüllten. E. REISSNER hat ihn in seiner Arbeit [68] zum ersten Mal auf den Baugrund angewandt. Viele andere folgten; einige davon sind in der Zusammenstellung [71] aufgeführt.

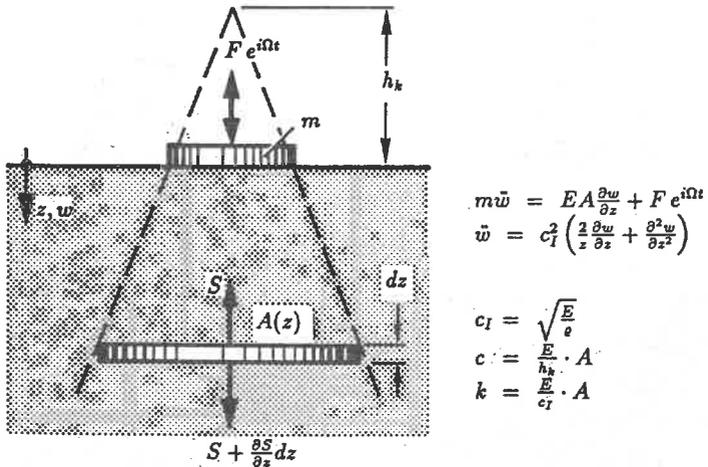


Bild 2 b: EHLERS-Hypothese

Seit einiger Zeit versucht man, den in Wirklichkeit meist geschichteten Boden durch ein Schichtmodell (Bilder 2 c und d) besser darzustellen, z.B. in [7],[17],[33] und [86].

Die bisher genannten Modelle werden vor allem für theoretische Untersuchungen verwendet wie beispielsweise zur Feststellung der Impedanzfunktionen bei Parametervariation [56].

Bei Aufgabenstellungen aus der Praxis mit gegebenen Abmessungen und ermittelbaren Bodenkennwerten werden bevorzugt Elementverfahren angewandt wie etwa im Computerprogramm FLUSH [58].

Dabei werden zwei Methoden grundsätzlich unterschieden [18]:

- die *direkte Methode* (Bild 2 e), bei der Bauwerk und Baugrund gleichzeitig in einem Netz – meist Finiter Elemente – dargestellt werden, sowie
- die *Substrukturmethode* (Bild 2 f), bei der das Bauwerk vom Baugrund getrennt und mit den üblichen baodynamischen Methoden untersucht wird.

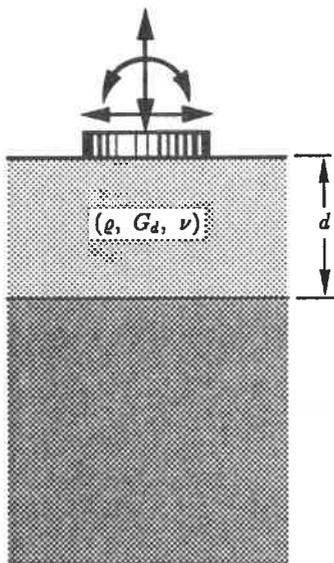


Bild 2 c: Schicht auf Halbraum
oder auf starrem Untergrund

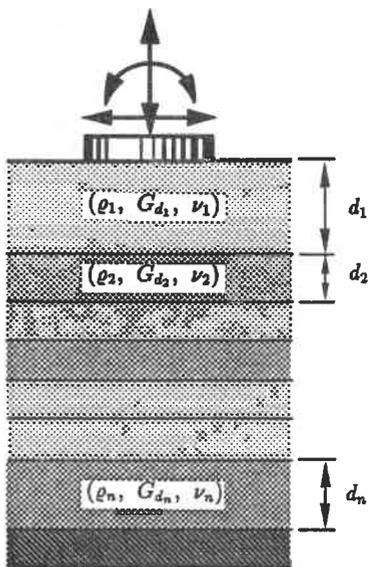


Bild 2 d: Mehrschichtenmodell

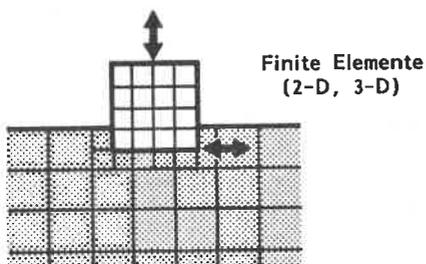


Bild 2 e: Direkte Methode

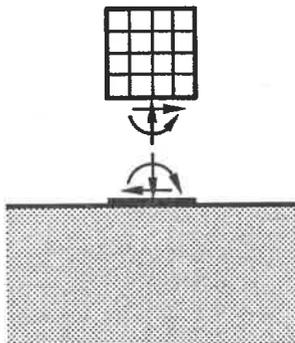


Bild 2 f: Substrukturmethode

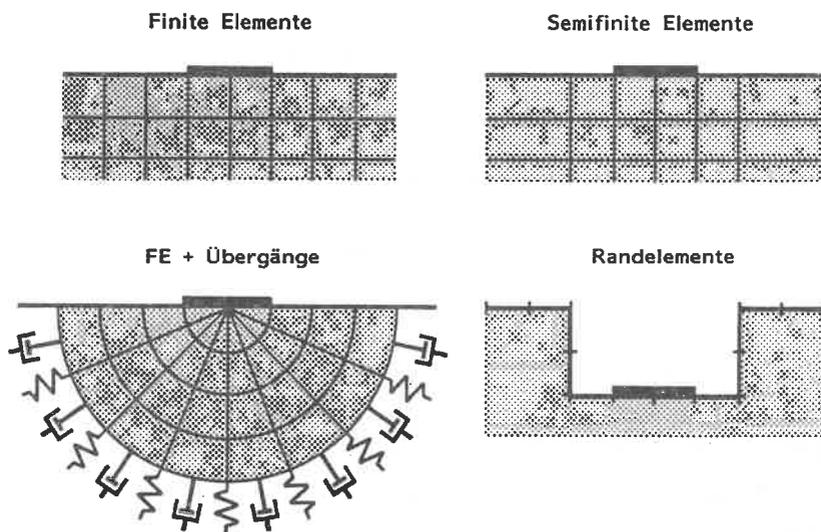


Bild 2 g: Abbildung des Baugrunds bei der Substrukturmethode

Der Baugrund selbst kann dann mit verschiedenen Elementen untersucht werden (Bild 2 g): Finite Elemente (z.B. [46] oder [59]), Semifinite Elemente (nach [85]), Hybride Methoden (Finite Elemente mit Übergängen in den Halbraum; z.B. in [81]) oder Randelemente (vor allem bei [3],[42],[62] und [63]). Anschließend erfolgt die Kopplung der Unterstrukturen.

1.3 Stoffgesetze

Der Baugrund ist nicht wie z.B. der Stahl ein Rezeptwerkstoff, dessen Elastizitätsgrenze, Proportionalitätsgrenze und Bruchgrenze aus Versuchen ziemlich genau, d.h. ohne große Streuung ermittelt werden können.

Für Böden verwendet man Stoffgesetze, die der Aufgabenstellung und der gewünschten Aussagekräftigkeit der Ergebnisse angepaßt sind. Mathematisch am leichtesten zu bearbeiten ist das Stoffgesetz mit linearer Elastizität, also Proportionalität zwischen

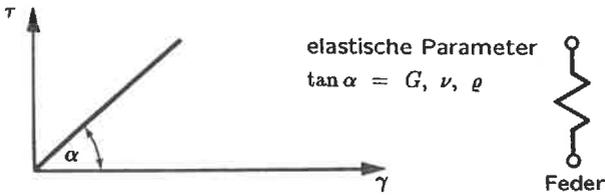


Bild 3 a: Elastisches Stoffgesetz

Spannungen und Verzerrungen (Bild 3 a).

Im Boden wird jedoch neben dem elastischen auch plastisches Verhalten beobachtet, was ebenso zu bleibenden Verformungen führt wie Bruchvorgänge, wie sie nach Überschreiten der Bruchbedingung (z.B. nach COULOMB; Bild 3 b nach [77]) auftreten.

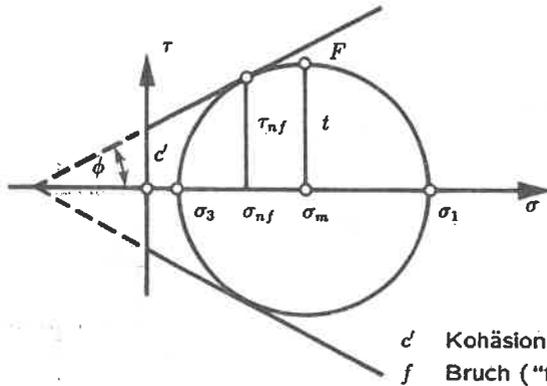
Zeitabhängige Vorgänge wie Konsolidation spielen in der Bodenmechanik ebenfalls eine Rolle (Bild 3 c nach [77]).

Die bisherigen Stoffgesetze gelten für statische und quasistatische Belastungen. Für nichtstatische Vorgänge werden neben den elastischen und plastischen Eigenschaften des Bodens auch dessen Dämpfungswirkung bei Erregung berücksichtigt, meist alternativ als viskose Dämpfung (Bild 3 d) oder als hysteretische Dämpfung. Näheres hierzu siehe Kapitel 3.4.1.

Bilder 3 e und f zeigen zwei in der Baugruddynamik angewandte elastoplastische Stoffgesetze [76].

Inhomogenitäten wurden in theoretischen Untersuchungen bereits ebenso berücksichtigt [8],[9],[10],[72] wie Anisotropieeigenschaften [32].

Hier wurden nur die Stichwörter angesprochen; zur weiteren Vertiefung siehe z.B. Grundbau-Taschenbuch [55] und die dort angegebene Literatur.



Bruchbedingung: $\left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right\}_f = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} + \frac{2c' \cos \phi}{\sigma_3 (1 - \sin \phi)}$

bzw. $F = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sin^2 \phi (\sigma_1 + \sigma_3 + 2c' \cot \phi)^2 = 0$

Bild 3 b: Bruchbedingung

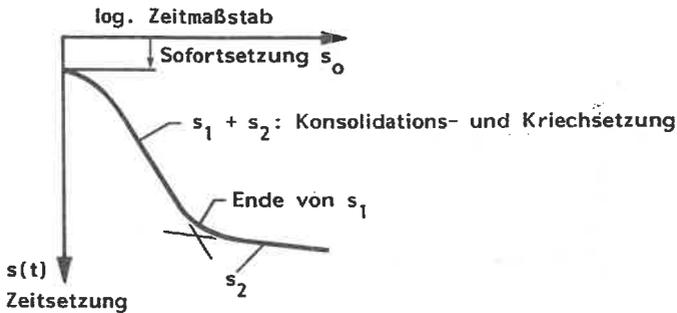


Bild 3 c: Konsolidation

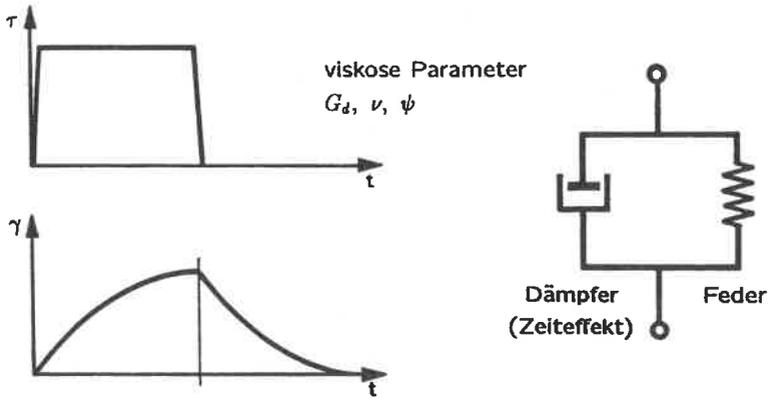
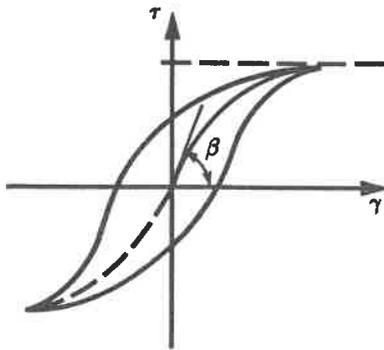


Bild 3 d: Viskoelastisches Stoffgesetz



Bild 3 e: Belastungszeit des elastoplastischen Stoffgesetzes nach HARDIN-DRNEVICH



$$\frac{\tau}{\tau_r} = \frac{\tau}{\tau_r} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_r} \right|^{R-1} \right)$$

τ_r Referenzschubspannung

γ_r Referenzverzerrung

$\alpha > 0$
 $R \geq 1$ } Konstanten

Bild 3 f: Elastoplastisches Stoffgesetz nach RAMBERG-OSGOOD für die Rückgratkurve der Hysterese

Kapitel 2

Experimentelle Ermittlung dynamischer Bodenkennwerte

Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Methoden, Bodenkennwerte zu ermitteln: einerseits durch Untersuchung einer Bodenprobe im Labor, andererseits durch Feldversuche.

Im Labor erhält man im Rahmen der Untersuchungsmethode genaue Werte für einzelne Punkte im Untergrund, falls die Probe ungestört bleibt; über andere Punkte kann man dann höchstens Wahrscheinlichkeitsaussagen nach der Stichprobentheorie machen.

Im Feld erhält man über einen Bereich gemittelte Werte und hat Schwierigkeiten bei der Interpretation der Ergebnisse, die um so größer sind, je ausgedehnter der erfaßte Bereich ist. Einen Beitrag zur Behebung dieser Schwierigkeiten siehe z.B. in [79].

Dies gilt für sämtliche Bodenkennwerte und aufgrund der bei kinetischen Vorgängen zeitlich und örtlich unterschiedlichen Bewegungszustände wohl in erhöhtem Maß für die Bodenkennwerte bei dynamischer Beanspruchung.

Die in der Baugruddynamik vorzugsweise zu verwendenden Kenngrößen, die *dynamischen Bodenkennwerte*, sind (u.a. nach Thesen des Arbeitskreises "Baugruddynamik")

- dynamischer Schubmodul G_d und
- Dämpfungskapazität ψ . Diese beiden werden modifiziert auch gemeinsam als
- komplexer Schubmodul \hat{G} (auch G^*) mit Ableitungen von G_d als Real- und ψ als Imaginärteil bezeichnet. Außerdem wird die

- Querdehnzahl ν , seltener die dynamische Querdehnzahl ν_d verwendet[†]. Die dynamische Querdehnzahl stellt wiederum den Realteil der
- komplexen Querdehnzahl $\hat{\nu}$ (auch ν^*) dar, die allerdings seltener verwendet wird, weil ihr Imaginärteil ohne direkte physikalische Bedeutung ist.
Zusätzlich zu diesen Größen wird noch die
- Dichte ρ benötigt. Sie wird, da sie eine relativ schwach variierende Größe ist, meist als konstant angesehen, ist aber eigentlich auch ein dynamischer Parameter.

Für die dynamischen Bodenkenwerte wurden häufig erhebliche Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus Feld- und denen aus Labormessungen festgestellt (z.B. [20]), die darauf hindeuten, daß eine Störung der Bodenprobe durch Entnahme aus der natürlichen Umgebung, durch Transport, Lagerung und Einbau in das Versuchsgerät, durch den nicht zu reproduzierenden, weil unbekanntem Spannungszustand vor Ort sowie durch die Versuchstechnik selbst erfolgt, wodurch die dynamischen Eigenschaften signifikant beeinflußt werden.

Zu erwähnen ist noch, daß für den Bereich großer Dehnungen weitere Bodenkenwerte wie Liquefaktionspotential und dynamische Verdichtbarkeit ermittelt werden können, auf die in dieser Arbeit nicht eingegangen wird.

2.1 Bekannte Verfahren

Die am häufigsten verwendeten Verfahren werden kurz dargestellt. Ausführlichere Beschreibungen findet man u.a. in [24],[36],[37],[45],[55] oder [69].

Im wesentlichen beziehen sich diese Verfahren auf die Ermittlung des dynamischen Schubmoduls und der Dämpfung, während die Querdehnzahl aus statischen Versuchen gewonnen wird oder aber aus dynamischen Versuchen zur Ermittlung des Schubmoduls (meist Messung der Wellengeschwindigkeiten) errechnet wird. Die Dichte wird mit den längst bekannten Methoden ermittelt, zumal für sie der statische Wert meist als konstant angenommen wird.

[†]Nach DIN 1080 ist für die Querdehnzahl, englisch: *POISSON'S ratio* (sindimensional: $-\epsilon_q/\epsilon_l$), der Buchstabe μ vorgesehen, während mit ν deren Kehrwert, die *POISSONZahl*, bezeichnet werden soll. Da in der Mechanik aber μ für eine der beiden LAMÉschen Konstanten vorbehalten ist, wird hier weiterhin ν für die Querdehnzahl verwendet, wie es auch im englischsprachigen Raum üblich ist. Die Verwendung von ν bzw. μ ist außerdem schulenabhängig.

2.1.1 Laborversuche

Die Laborversuche werden oft in zwei Gruppen eingeteilt, in

- dynamische Methoden und
- zyklische Methoden.

Bei den dynamischen Methoden erfolgt der Spannungswechsel so schnell, daß die Trägheitskräfte aus den Beschleunigungen der Probe von Bedeutung sind. Gemessen werden Wellenlaufzeiten, Resonanzfrequenzen bei erzwungenen Schwingungen oder das Abklingverhalten. Die verwendeten Geräte sind

- Resonant-Column-Gerät,
- Schwingtisch, und (allerdings selten)
- Ultraschallgerät [13].

Im Gegensatz dazu erfolgt bei den zyklischen Methoden der Spannungswechsel so langsam, daß die Beschleunigungskräfte unberücksichtigt bleiben können. Gemessen werden Hystereseschleifen mittels folgender Geräte:

- zyklisches Dreiaxialgerät,
- zyklisches Simple-Shear-Gerät,
- zyklisches Torsionsschergerät,
- zyklisches Ödometer.

Diese Geräte unterscheiden sich hauptsächlich in der Art der eingeleiteten Spannungen:

Als Standardversuch kann der Resonant-Column-Versuch gelten, oft kurz ResCol genannt. Dabei wird eine zylindrische Probe in Torsionsschwingungen um die Längsachse versetzt und die Resonanzfrequenz festgestellt. Da diese von der Scherwellengeschwindigkeit c_s abhängt, kann der Schubmodul errechnet werden. Beim Ausschwingen läßt sich auch noch die Materialdämpfung als logarithmisches Dekrement Λ ermitteln (*Bild 4 a*).

Als weiteres verbreitetes Gerät ist das Zyklische Dreiaxialgerät zu nennen. Dabei wird eine Probe unter allseitigem Druck zusätzlich axial oder allseitig dynamisch belastet. Aus

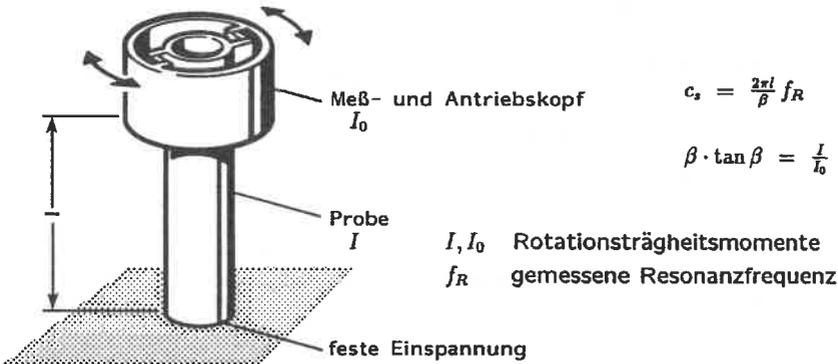


Bild 4 a: Resonant-Column-Gerät (nach [36])

der Messung der Längsverformung läßt sich bei bekannter Querdehnzahl der Schubmodul errechnen. Die Dämpfung ermittelt man aus der Hystereseschleife (Bild 4 b).

Da die anderen Geräte seltener verwendet werden, wird hier auf eine Beschreibung verzichtet. Die Auswertung ist jeweils ähnlich wie bei einem der beiden beschriebenen Geräte, lediglich die Probenform (Zylinder, Hohlzylinder oder Quader) und die Beanspruchungsart sind unterschiedlich.

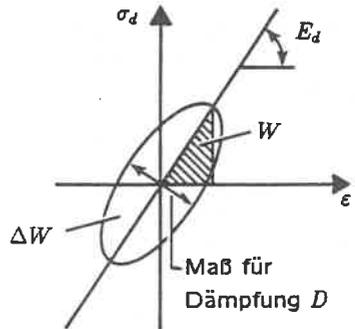
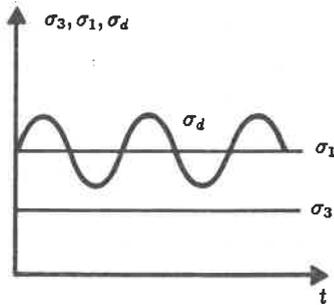
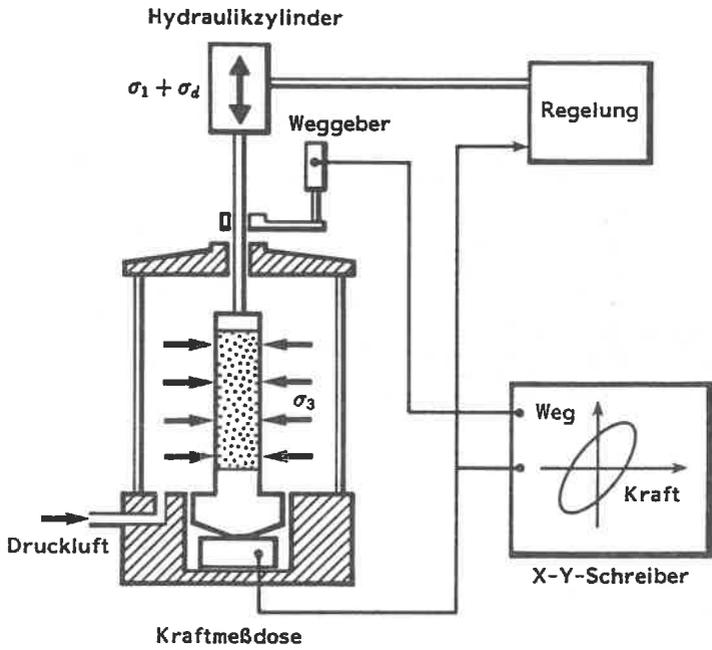
Einen gewissen Vergleich verschiedener Labormessungen des dynamischen Schubmoduls findet man in [74].

2.1.2 Feldversuche

Wie bereits erwähnt, werden im Feld häufig seismische Methoden angewandt. Dazu werden alle Methoden gezählt, bei denen Wellenlaufzeiten gemessen werden. Diese Wellen werden meist durch Impulserregung erzeugt; andere Erregungen wie z.B. harmonische Schwingungen eines elektromechanischen Erregers werden seltener verwendet.

Mit der *Reflexionsseismik* lassen sich vor allem Schichtgrenzen feststellen (Bild 5 a).

Mit der *Refraktionsseismik* ermittelt man bei einem bekannten Wellenweg und bei gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Kompressions- und der Scherwellenimpulse unter Annahme einer homogenen elastischen Schicht die beiden elastischen Kon-



$$\psi = \frac{\Delta W}{W}$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \psi$$

ΔW Dämpfungsarbeit
 W Gesamtarbeit

Bild 4 b: Zyklisches Dreiazialgerät (nach [37])

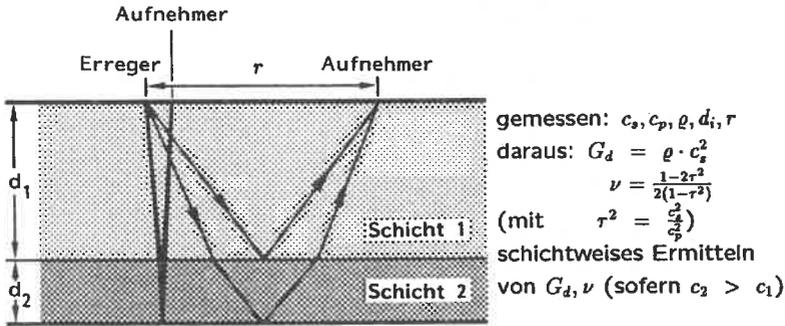


Bild 5 a: Reflexionsseismik

stanten. Dabei wird an der Oberfläche erregt und auch an der Oberfläche gemessen (Bild 5 b).

Bringt man ein Bohrloch nieder, kann man entweder an der Oberfläche erregen und unten messen ("Downhole", Bild 5 c, a) oder im Bohrloch erregen und oben messen ("Uphole", Bild 5 c, b). Bei mehreren Bohrlochern können Erreger und Meßgerät in verschiedenen Tiefen jeweils auf der gleichen Höhe gehalten werden. Daraus erhält man ein Tiefenprofil der Wellengeschwindigkeiten ("Crosshole", Bild 5 c, c).

An der Oberfläche des Bodens bilden sich RAYLEIGHwellen aus, die vermessen werden können. Ihre Geschwindigkeit ist durch die Scherwellengeschwindigkeit und die Querdehnzahl ausdrückbar, so daß sich wiederum die elastischen Konstanten bestimmen lassen. Aussagen zur Dämpfung gewinnt man aus der Beobachtung der Dispersion (Bild 5 d).

Die bisher beschriebenen Untersuchungsmethoden im Feld sind auf kleine Dehnungen beschränkt. Etwas größere Verformungen lassen sich mit harmonischen Schwingern erzielen. Diese kommen beim sogenannten Fundamentversuch und bei Resonanzmessungen zum Einsatz. Beim Versuch an einem Modellfundament wird ein bestimmter Frequenzbereich mit dem Erreger durchfahren und das direkte Verhalten des Fundaments beob-

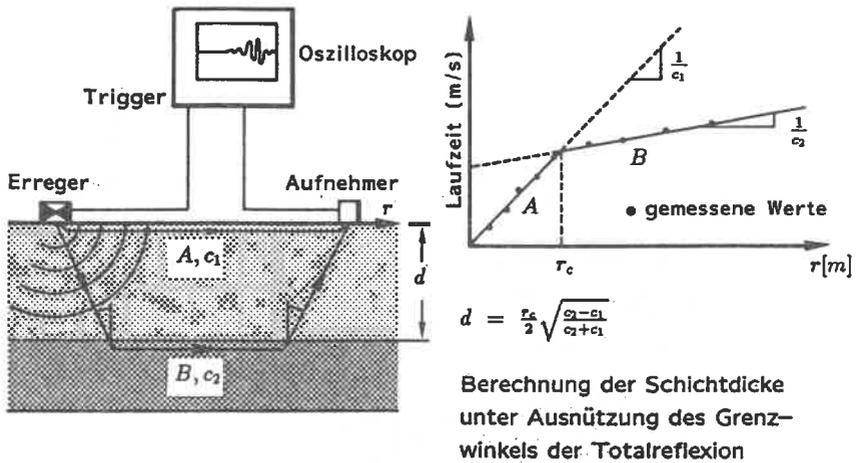


Bild 5 b: Refraktionsseismik (nach [36])

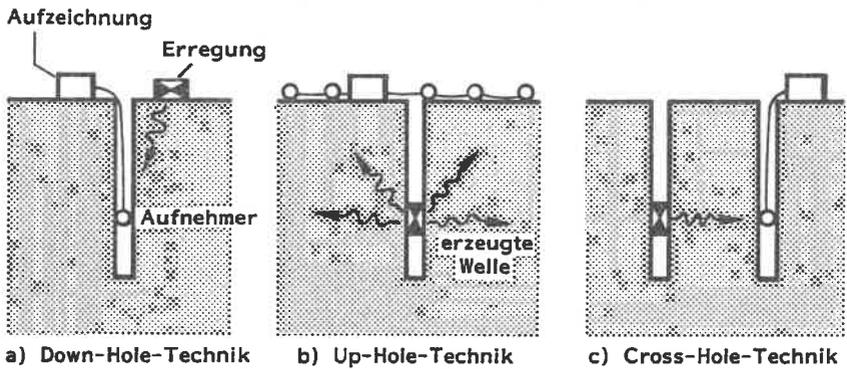
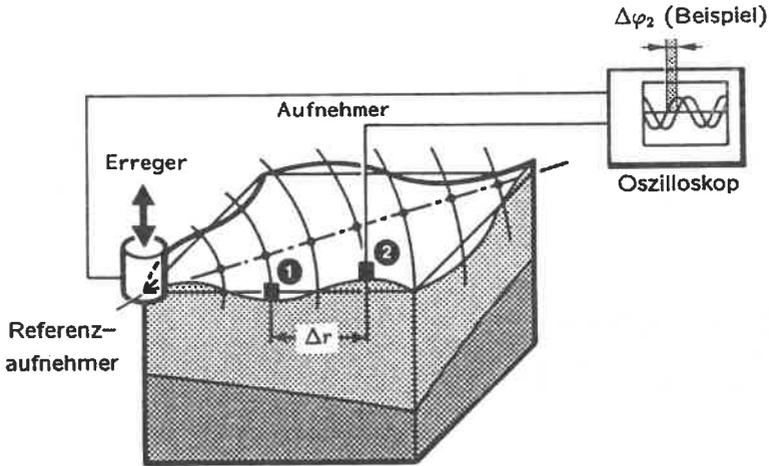


Bild 5 c: Bohrlochtechniken



Erregen mit bestimmter Frequenz f ;
 Aufnehmer in bestimmtem Abstand Δr setzen,
 dann Phasendifferenz $\Delta\varphi_i$ von jedem
 Aufnehmersignal zum Referenzsignal feststellen.

$$\lambda_R = \frac{2\pi\Delta r}{(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1)}$$

$$c_R = \lambda_R \cdot f$$

$$c_s \approx \frac{1}{0,9} \cdot c_R \quad (\text{siehe Kapitel 6.1})$$

Bild 5 d: RAYLEIGHwellen-Dispersionsmessung (nach [36])

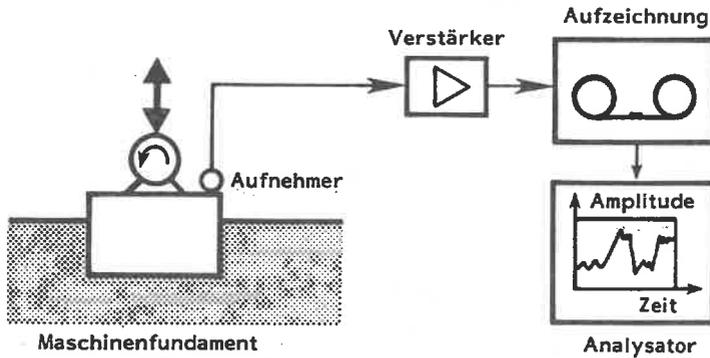


Bild 5 e: Fundamentversuch (Resonanzmessung)

achtet (Bild 5 e). Beim Resonanzversuch wird dann aus der niedersten Resonanzfrequenz auf die Dicke einer Bodenschicht geschlossen. (Siehe hierzu Kapitel 3.3.4.8).

Selbst mit Sprengungen oder mit dem Rückstoß einer Wasserkanone lassen sich nur lokal größere Verformungen erzielen, die Intensität der elastischen Wellen läßt sich jedoch nicht beliebig steigern.

2.1.3 Einsatz der Verfahren

Aus praktischen Erwägungen wäre es wünschenswert, wenn alle dynamischen Bodenkennwerte in situ ermittelt werden könnten.

Da jedoch die erzielbaren Verformungen bei Feldversuchen geringer sind als bei tatsächlich auftretenden Erschütterungen z.B. durch Erdbeben, sind Laborversuche nicht überflüssig. Die Verzerrungsbereiche verschiedener Versuchsmethoden und realer Erregungen sind in Bild 6 zusammengestellt (siehe [24],[75],[80] und [90]).

Am besten verwendet man Feldversuche für die großräumige Ermittlung von Durchschnittswerten der dynamischen Eigenschaften und Laborversuche zur Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter. Beispielsweise hängt der dynamische Schubmodul ab von

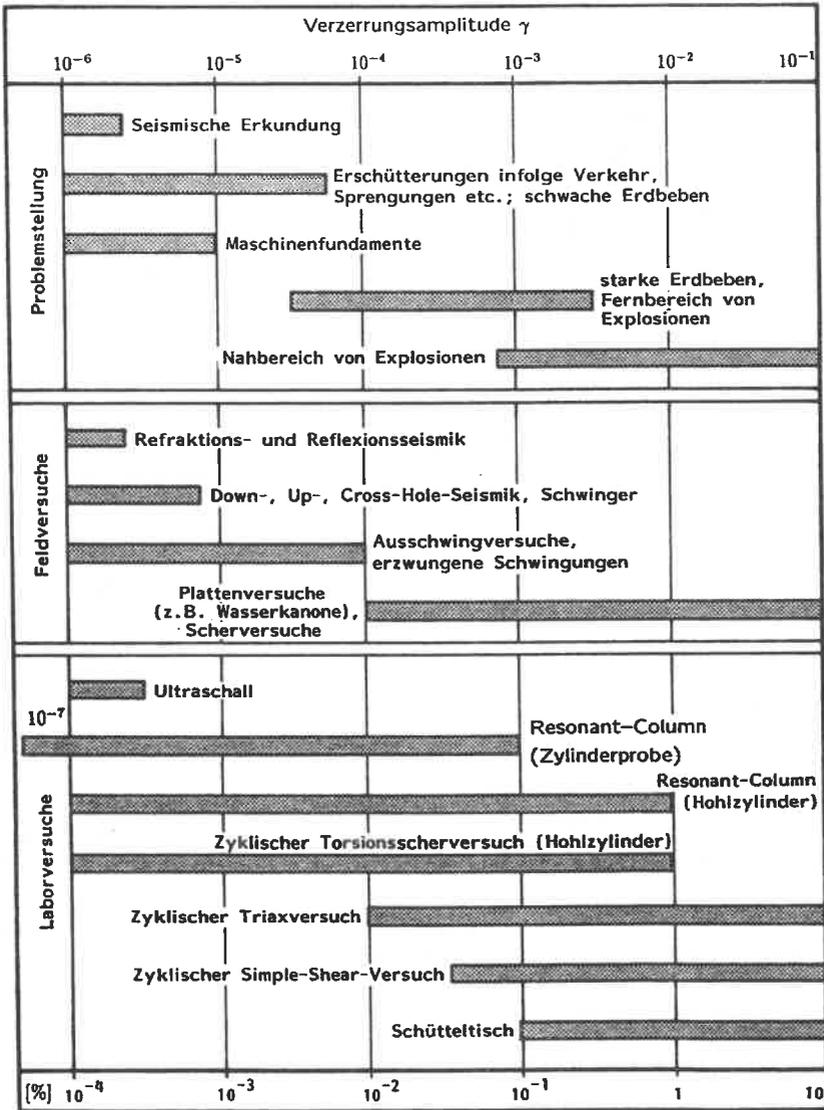


Bild 6: Verzerrungsamplituden verschiedener Problemstellungen und einiger Feld- und Laborversuche (nach [80] und [90])

- der Beschaffenheit des Bodens (Zusammensetzung der festen Bestandteile, Kornform, Sieblinie, Dichte, Konsistenz usw.),
- der mittleren effektiven Spannung $\overline{\sigma'_0}$,
- der dynamischen Verzerrungsamplitude γ_d oder ε_d ,
- der Anzahl der Belastungszyklen (vor allem bei großen γ_d).

Interessiert nur der Nahbereich einer Erschütterungsquelle, so läßt sich von den erwähnten Verfahren lediglich der Fundamentversuch verwenden.

2.2 Ermittlung dynamischer Bodenkennwerte in situ aus der Systemantwort des Erregers

2.2.1 Versuchsanordnung

Hier wird nun das Konzept eines Verfahrens vorgestellt, das Ergebnisse im Nahbereich des Erregers liefert, ein modifizierter Fundamentversuch also, da z.B. häufig ein lokaler Dämpfungswert benötigt wird. Andere Anwendungen, beispielsweise die Feststellung einer Schichtgrenze, sind ebenfalls denkbar.

Ein frequenz geregelter Schwingungserreger (Rüttler) wird auf die Oberfläche aufgesetzt. Nacheinander wird dann mit verschiedenen Frequenzen Ω vertikal erregt. Die Antwort des Systems Rüttler – Boden wird in Form von Schwingbeschleunigungen direkt an der Rüttlerplatte abgenommen und analog aufgezeichnet (*Bilder 7 a und b*)

Die Antwort hängt vom gesamten System ab, weil der Boden rückwirkend den Erreger beeinflusst (z.B. [41]). Aufgrund dieser Tatsache wird dieses Verfahren zur Baugrunderkundung vorgeschlagen.

2.2.2 Versuchsauswertung

Zur Systemidentifikation wird eine Analyse im Frequenzbereich bei Annahme eines äquivalenten Mehrmassenschwingers durchgeführt.

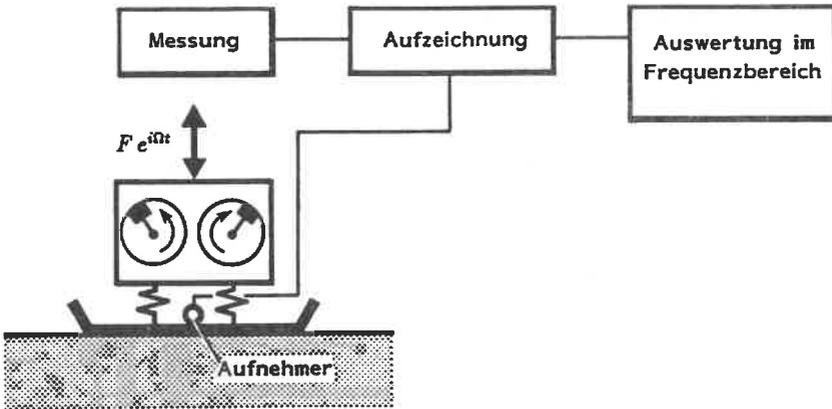


Bild 7 a: Meßanordnung des vorgeschlagenen Versuchs

Bild 8 zeigt die Spektren von Messungen in einer sandgefüllten Versuchsgrube (Abmessungen 6 x 10 m, 4 m tief) bei gleichem Sand mit unterschiedlichen Lagerungsdichten und Wassergehalten.

Für diesen Vorversuch wurde mit einem handelsüblichen Straßenrüttler (Typ Vibromax ATN 2000) erregt, die Auswertung der an der Rüttelplatte abgenommenen Beschleunigungen erfolgte mit einem Frequenzanalysator (Typ hp 5423 A). In Bild 7 b sind die benötigten Geräte zusammengestellt.

Die Maximalamplitude des Rüttlers ergab sich bei unterschiedlichen Frequenzen. Dies beruht nicht allein auf den unterschiedlichen Systemeigenschaften, sondern auch darauf, daß der Rüttler nicht frequenzkonstant sondern leistungskonstant erregte. Die Leistung ist aber (ohne Berücksichtigung der Amplitude) proportional der Erregerfrequenz und der Dämpfung sowie umgekehrt proportional der Federung:

$$L \sim \Omega k c^{-1}.$$

Also ist bei $L = \text{const}$ und k sowie $c \neq \text{const}$ auch $\Omega \neq \text{const}$.

Aus dem Auto-Leistungsspektrum kann in Abhängigkeit von der Frequenz die Dämpfungskapazität $\psi(\Omega)$ als Gesamtwert über ein unbestimmtes Volumen z.B. über die Halbwertsbreite ermittelt werden (Bild 9). Die Annahme eines äquivalenten linearen Dämpfungsmaßes hierbei wird in Kapitel 3.4.3 näher begründet.

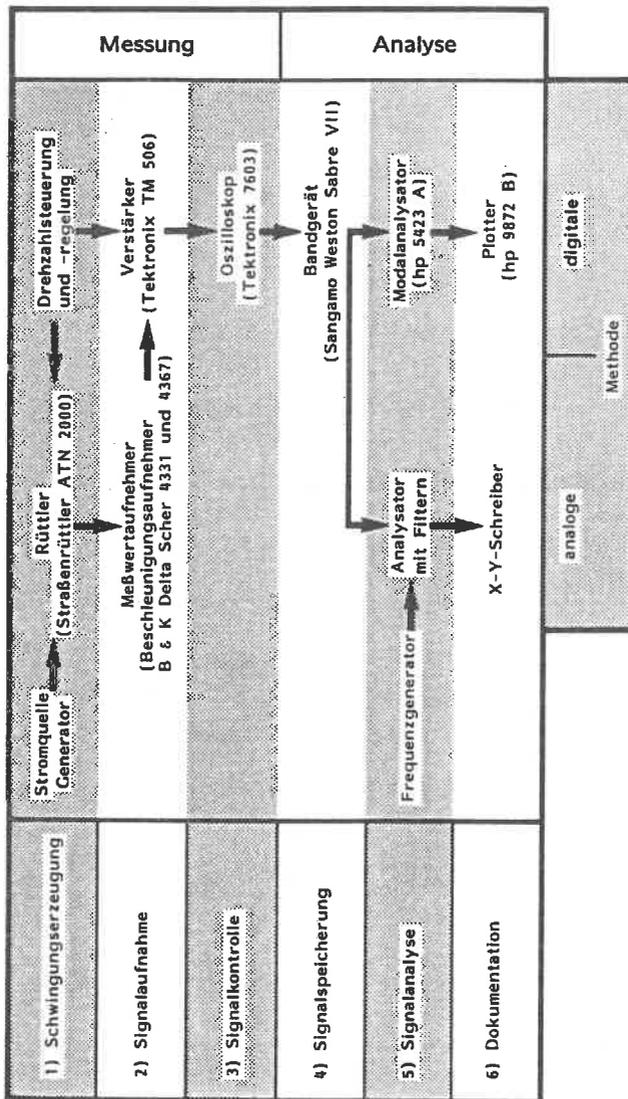


Bild 7 b: Apparative Ausstattung (Vorversuch)

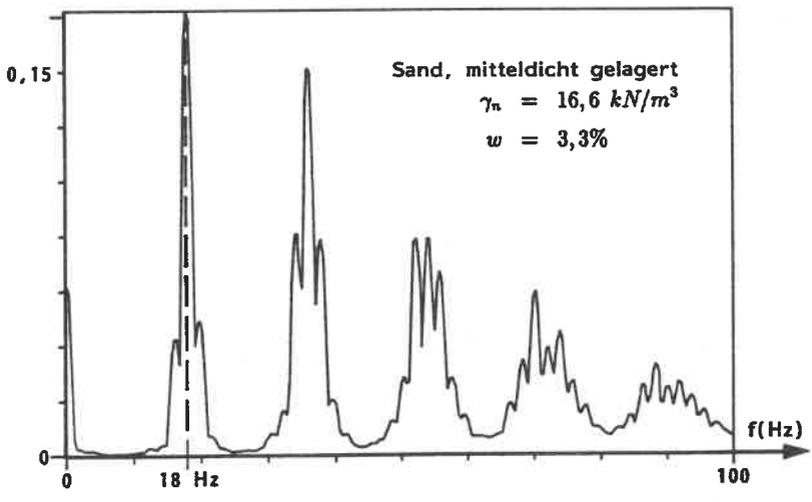
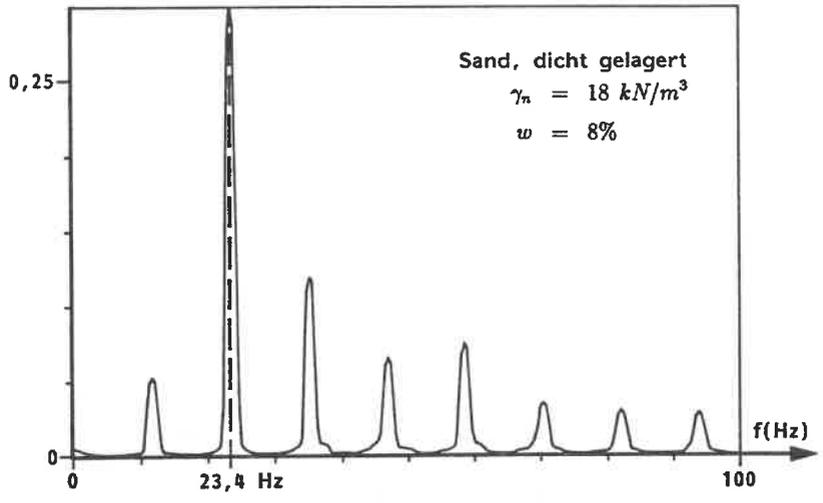


Bild 8: Autospektren aus zwei Messungen bei Sand verschiedener Lagerungsdichte

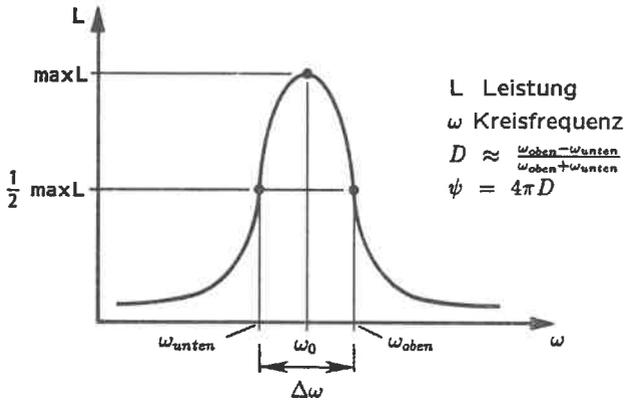


Bild 9: Ermittlung der Dämpfungskapazität aus der Halbwertsbreite

Aus Bild 8 ersieht man deutlich, daß verschiedene Stoffeigenschaften zu verschiedenen Spektren führen. Der dichtere Sand zeigt klare Frequenzspitzen, die geringe Breite der sogenannten "Peaks" deutet auf geringe Dämpfung hin. Der Sand mit der geringeren Dichte zeigt breitere Peaks, also größere Dämpfung, und mehrfache Spitzen, d.h. benachbarte Frequenzen. Damit wird bestätigt, daß weichere Materialien stärker dämpfen als festere, bei ihnen wird – akustisch gesprochen – aus einem Ton mit Unter- und Obertönen durch "Verschmieren" tendenziell ein Rauschen.

Aus den Beschleunigungen \ddot{u}_z können zum Vergleich mit den theoretischen Untersuchungen bei Annahme harmonischer Schwingungen die Verschiebungen u_z ermittelt werden:

$$u_z = \ddot{u}_z \Omega^{-2}.$$

46 KAPITEL 2. EXPERIMENT. ERMITTLUNG DYNAM. BODENKENNWERTE

Kapitel 3

Theoretische Untersuchungen

Keine Versuchsmethode kann ohne begleitende theoretische Untersuchungen entwickelt werden.

Sie dienen zu Parameterstudien und zur Festlegung von Gültigkeits- und Genauigkeitsgrenzen der Methode.

Das zu wählende mathematische Modell muß den Versuch in den wesentlichen Gesetzmäßigkeiten erfassen und darf nicht zu kompliziert sein, damit weder untergeordnete Einflüsse überwiegen noch die Berechnungen zum umfangreichen Selbstzweck werden.

Im vorliegenden Fall existieren zwar zahlreiche baugrunddynamische Berechnungen (siehe Kapitel 3.1), keine dieser Lösungen schien mir aber für die Ermittlung von Schubmodul, Dämpfungskapazität und Querdehnzahl soweit geeignet zu sein, daß sie als Vergleich zu den Messungen herangezogen wurde. Ein viskoelastisches Stoffgesetz in der von mir verwendeten Form lag bisher nicht vor. Lediglich die Lösung für die elastische Schicht konnte mit einigen veröffentlichten Lösungen verglichen werden.

3.1 Klassifizierung von Lösungen aus der Literatur

RÜCKER stellte (auch für den Arbeitskreis Baugrunddynamik) eine Liste vorwiegend analytischer Lösungen von baugrunddynamischen Fragestellungen zusammen [71]. Diese tabellarische Liste wird von ihm laufend ergänzt und bestand Anfang 1986 aus 170 Literaturstellen, erhebt aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Er teilte diese Lösungen nach folgenden Kriterien ein:

- Form der Last(einleitungs)fläche
- Randbedingungen
- mechanisches System
- Erregungsrichtung
- Ergebnisdarstellung
- variierte Parameter.

Als Lastflächen der dynamischen Belastung wurden u.a. verwendet: Punkt, Linie, unendlicher Streifen, Kreis, Rechteck, Kreisring, mehrere Flächen, Geometrien aus der Praxis.

Außer mit Spannungsrandbedingungen wurde noch mit starren, näherungsweise starren und flexiblen Lasteinleitungsbereichen gerechnet.

Als Systeme gingen ungeschichteter Halbraum, elastische Schicht auf starrer Unterlage, mehrere elastische Schichten und kompliziertere Gebilde in die Berechnungen ein.

Die Erregung erfolgte als vertikale oder horizontale Translation, als Rotation um die vertikale oder die horizontale Achse (Torsion bzw. Kippen) und gekoppelt.

Die Ergebnisse wurden teils in asymptotischen Ausdrücken, teils in Verschiebungs- oder in Impedanzfunktionen oder Frequenzgängen, teils unfertig angegeben.

Folgende Parameter wurden variiert: die dimensionslose Frequenz a_0 oder ein anderer Frequenzparameter, die Querdehnzahl ν , die bezogene Masse B_z , die hysteretische (β) oder die viskose (η) Dämpfungskonstante, die Schichtdicke und, je nach Geometrie und System, zusätzliche Größen wie Einbettungsgrad, Verhältnis der Scherwellengeschwindigkeiten und andere.

Mit dieser Übersicht läßt sich für einen speziellen Praxisbedarf häufig eine angepaßte Lösung finden, obwohl selbstverständlich von den möglichen Kombinationen nicht alle vorliegen.

3.2 Auswahl und Definition des Schwingungssystems und der Randbedingungen

Wie bereits erwähnt, übernehme ich keine dieser Lösungen; sie wurden auch alle für einen anderen Zweck entwickelt. In Kapitel 3.3 wird allerdings die Art, wie manche Autoren vorgehen, für Teile meiner Lösung übernommen. Die gesamte Untersuchung führe ich weitgehend analytisch durch.

Gewählt wird eine *unendlich ausgedehnte Schicht auf starrer Unterlage*, um zwar die Reflexionen aus der Tiefe zu berücksichtigen, aber trotzdem mit homogenen Randbedingungen am unteren Rand arbeiten zu können.

Der Boden ist aufgrund seiner Entstehung fast immer *geschichtet*. Das Schwingungsverhalten auf einer Schicht kann nach den Ergebnissen verschiedener Autoren (z.B. [7] oder [56]) erst dann durch das Schwingungsverhalten auf dem Halbraum angenähert werden, wenn die Schichtdicke dem fünffachen Fundamentradius entspricht.

Von einer *starrten Unterlage* kann bereits ausgegangen werden, wenn deren Schubmodul viermal so groß ist wie der in der Schicht [70]. Häufig ist z.B. Fels unter einer Schicht bindigen oder rolligen Bodens anzutreffen; diese Annahme ist also weitgehend zutreffend.

Die Schicht selbst wird als *homogenes, isotropes Kontinuum* angesehen, d.h. die Materialeigenschaften sind orts- und richtungsunabhängig.

Diese *Annahmen* für den Boden sind selten realisiert; eine exaktere Beschreibung ist jedoch jeweils nur für einen begrenzten Anwendungsbereich möglich. Im vorliegenden Fall der Baugrunderkundung ohne Aufschluß wäre eine genauere Modellierung aber ebenso "falsch".

Der *Erreger* liefert – exakt in der Theorie, möglichst exakt in der Praxis – :

- harmonische Vertikalerregung bei
- konstanter Frequenz mit einer
- Kraftamplitude des Erregers, die proportional dem Quadrat der Frequenz ist (Zweimassen-Unwuchterreger). Daher entsteht auch
- keine Komponente in horizontaler Richtung.
Die Erregung erfolgt auf einer

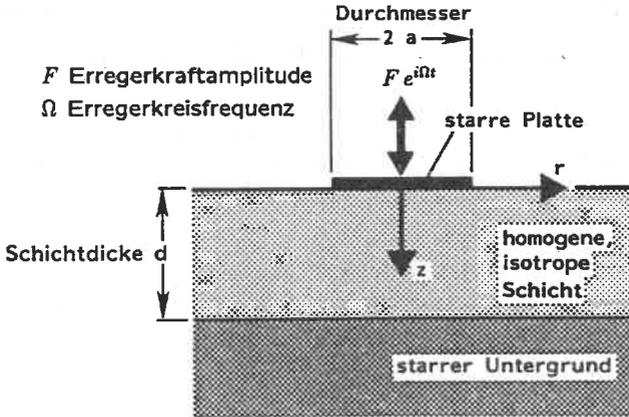


Bild 10: Modell für theoretische Untersuchungen

- starren Grundplatte mit Kreisquerschnitt, und zwar so, daß der Erreger
- nicht abhebt aufgrund des Verhältnisses von Unwucht- zu Gesamtmasse und daß
- keine Oberwellen, z.B. durch ausgeschlagene Lager, entstehen.

Somit liegt insgesamt ein rotationsymmetrisches Problem vor. Bild 10 zeigt das für die theoretischen Untersuchungen gewählte Modell.

Für den *Meßvorgang* wird noch angenommen:

- Die Dichte der Schicht bleibt während der Messung konstant.
Diese Annahme ist vertretbar, weil die Variation der Dichte auf das Schwingungsverhalten hier unerheblich ist.
- Die statische Vorbelastung der Schicht durch den Erreger wird in den Berechnungen nicht oder erst nachträglich berücksichtigt.
- Der Vorgang verläuft außerdem isotherm. Hierbei wird ja nicht eine Temperaturabhängigkeit von Bodenkennwerten geleugnet, es wird vielmehr eine konstante Temperatur während der Schwingung angenommen.

Folgende *Randbedingungen* werden den Berechnungen zugrunde gelegt:

- Normalspannungsverteilung unter der Platte wie im statischen Fall (*Bild 11, a*),
- Reibungsfreiheit zwischen Platte und Schicht,
- Spannungsfreiheit am oberen Schichtrand außerhalb der Platte,
- Verschiebungsfreiheit am unteren Rand der Schicht.

Die dritte Annahme entspricht im freien Feld der Realität, die letzte Annahme spiegelt den häufigen Fall des Haftens der Schicht am Untergrund wider.

Über die Verteilung der Normal- und der Schubspannungen unter der Platte liegen für den dynamischen Fall keine gesicherten Erkenntnisse vor. Vermutlich trifft am ehesten eine Verteilung wie in *Bild 11, c* zu. Bei der realistischen Annahme einer konstanten Vertikalverschiebung unter der Platte ergäbe sich am oberen Rand ein gemischtes Randwertproblem mit schwer zugänglicher Lösung.

Die getroffene Annahme zur Normalspannungsverteilung nähert — mindestens im betrachteten Frequenzbereich — die Verschiebungskonstanz ausreichend an und ist mathematisch nicht schwieriger zu handhaben als Spannungskonstanz (*Bild 11, b*), siehe hierzu [17],[86] und meine Anmerkung in Kapitel 3.3.3).

Die schubspannungsfreie Verschiebungsmöglichkeit unter der Platte ist bei Verwendung einer Stahlplatte mit glatter Unterseite als gerechtfertigt anzusehen und trägt wesentlich zur mathematischen Vereinfachung bei [17].

Anfangsbedingungen müssen nicht formuliert werden, da für die Messung der eingeschwungene, stationäre Zustand vorausgesetzt wird.

Für das *Bodenmaterial* der Schicht werden zunächst *elastische* Eigenschaften angenommen (Kapitel 3.3), da hierfür Vergleichslösungen z.B. in [17],[56],[86] und anderen Artikeln der in Kapitel 3.1 erwähnten Liste vorliegen.

Die Lösung des elastischen Problems dient dann als Grundlage, um daraus mit Hilfe des Korrespondenzprinzips die Lösung für die *viskoelastische* Schicht zu finden (Kapitel 3.4).

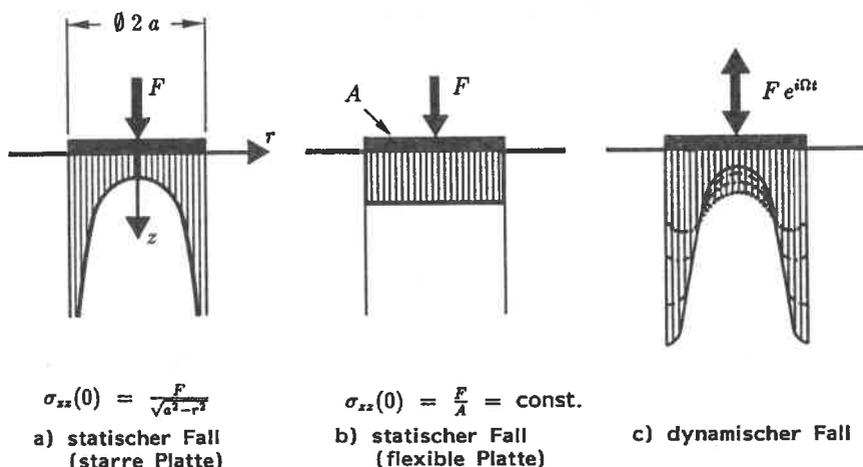


Bild 11: Spannungsverteilung unter einer Platte

3.3 Elastische Schicht

3.3.1 Zusammenstellung der Gleichungen

Aus den Bewegungsgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums bei Vernachlässigung der Volumenkräfte

$$\rho u_{i,tt} - \sigma_{ik,k} = 0 \quad (3.1)$$

wird mit dem - im kinetischen Fall - Postulat der zugeordneten Schubspannungen

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (3.2)$$

bei kinetischer Theorie 1. Ordnung, also bei linearisiertem Verzerrungstensor,

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}), \quad (3.3)$$

sowie bei Verwendung des HOOKEschen Materialgesetzes in der Schreibweise mit den in der Bodendynamik üblichen Stoffgrößen Schubmodul G und Querdehnzahl ν

$$\sigma_{ik} = 2G \left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right), \quad (3.4)$$

wobei sich mit Geometrie (3.3) und Materialgesetz (3.4) die Spannungen in den Verschiebungen ausdrücken lassen:

$$\sigma_{ik} = G \left[(u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,j} \delta_{ik} \right], \quad (3.5)$$

das System linearer partieller Differentialgleichungen der Bewegung des homogenen, elastisch-isotropen Kontinuums

$$\rho u_{i,tt} - G \left(\frac{1}{1-2\nu} u_{k,ki} + u_{i,kk} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Dieses Gleichungssystem vereinfacht sich bei Rotationssymmetrie zu den zwei gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung in r, z und t

$$\rho u_{r,tt} - G \left(\frac{1}{1-2\nu} \Theta_{,r} + \Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\rho u_{z,tt} - G \left(\frac{1}{1-2\nu} \Theta_{,z} + \Delta u_z \right) = 0 \quad (3.8)$$

Hierbei bedeuten

$$\Theta = \frac{1}{r} u_r + u_{r,r} + u_{z,z} \quad (3.9)$$

die Dilatation und

$$\Delta u_i = \frac{1}{r} u_{i,r} + u_{i,rr} + u_{i,zz} \quad (3.10)$$

den Laplace-Operator, angewandt auf u_i .

Hinzu kommen noch die Randbedingungen für die obere Schichtgrenze ($z = 0$) bei Erregung auf der Kreisfläche $a^2\pi$ mit

$$F(t) = F e^{i\Omega t} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -\frac{F e^{i\Omega t}}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} & : 0 \leq r \leq a \\ 0 & : r > a \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{rz} = 0 \quad (3.13)$$

und für die untere Schichtgrenze ($z = d$):

$$u_r = 0 \quad (3.14)$$

$$u_z = 0. \quad (3.15)$$

3.3.2 Lösung des Differentialgleichungssystems

Die übliche Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen ist deren Entkopplung durch Einführung eines skalaren und eines Vektorpotentials (z.B. [2]). Ich verwendete allerdings die Separation der Variablen nach D. BERNOULLI für die Verschiebungsgrößen direkt. Sie führt auf einem ingenieurmäßigen Weg zur Lösung (siehe Anhang).

Es ergeben sich als partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems (3.7), (3.8) nach Anwendung der Separation der Variablen die Verschiebungen in radialer Richtung zu

$$u_r(r, z, t, \xi) = e^{i\omega t} J_1(\xi r) \left\{ [A_1(\xi)e^{-\alpha z} + A_2(\xi)e^{\alpha z}] \frac{\xi}{h^2} - [B_1(\xi)e^{-\beta z} + B_2(\xi)e^{\beta z}] \frac{\beta \xi}{k^2} \right\} \quad (3.16)$$

und in Tiefenrichtung zu

$$u_z(r, z, t, \xi) = e^{i\omega t} J_0(\xi r) \left\{ [A_1(\xi)e^{-\alpha z} - A_2(\xi)e^{\alpha z}] \frac{\alpha}{h^2} - [B_1(\xi)e^{-\beta z} - B_2(\xi)e^{\beta z}] \frac{\xi^2}{k^2} \right\}. \quad (3.17)$$

Hierbei wurden die Abkürzungen

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{G} \quad (3.18)$$

$$h^2 = r^2 k^2 \quad (3.19)$$

$$r^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (3.20)$$

eingeführt. Außerdem verbindet die Wellenzahl ξ die Abkürzungen h und k wie folgt:

$$\xi^2 = h^2 + \alpha^2 = k^2 + \beta^2, \quad (3.21)$$

wobei α und β über die Kopplung der Differentialgleichungen zusammenhängen.

Im unendlich ausgedehnten Kontinuum ist jede Wellenzahl möglich, d.h. ξ ist hier kontinuierlich. Für die erzwungenen Schwingungen wird daher aus der Summation über alle möglichen Wellenzahlen eine Integration über die gesamte positive reelle Halbachse, so daß die Lösungsausdrücke in der üblichen zeitfreien Schreibweise nunmehr lauten:

$$u_r(r, z) = \int_0^\infty \left[(A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}) \frac{\xi}{h^2} - (B_1 e^{-\beta z} + B_2 e^{\beta z}) \frac{\beta \xi}{k^2} \right] J_1(\xi r) d\xi \quad (3.22)$$

$$u_z(r, z) = \int_0^\infty \left[(A_1 e^{-\alpha z} - A_2 e^{\alpha z}) \frac{\alpha}{h^2} - (B_1 e^{-\beta z} - B_2 e^{\beta z}) \frac{\xi^2}{k^2} \right] J_0(\xi r) d\xi. \quad (3.23)$$

Für die Normalspannungen in Tiefenrichtung erhält man durch Einsetzen in (3.5)

$$\sigma_{zz}(r, z) = 2G \int_0^{\infty} \left[- (A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}) \frac{\kappa^2}{h^2} + (B_1 e^{-\beta z} + B_2 e^{\beta z}) \frac{\beta \xi^2}{k^2} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (3.24)$$

sowie für die – einzig auftretenden – Schubspannungen

$$\sigma_{rz}(r, z) = 2G \int_0^{\infty} \left[- (A_1 e^{-\alpha z} - A_2 e^{\alpha z}) \frac{\alpha \xi}{h^2} + (B_1 e^{-\beta z} - B_2 e^{\beta z}) \frac{\xi \kappa^2}{k^2} \right] J_1(\xi r) d\xi, \quad (3.25)$$

wobei als weitere Abkürzung

$$\kappa^2 = \xi^2 - \frac{k^2}{2} \quad (3.26)$$

eingeführt wurde. Diese Ausdrücke werden bei der Anpassung der Lösungen an die Randbedingungen benötigt.

3.3.3 Anpassung an die Randbedingungen

Berechnet man aus (3.24) die Normalspannungen am oberen Schichtrand, dann ergibt sich

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 2G \int_0^{\infty} S \cdot J_0(\xi r) d\xi, \quad (3.27)$$

worin abgekürzt wurde

$$S = -(A_1 + A_2) \frac{\kappa^2}{h^2} + (B_1 + B_2) \frac{\beta \xi^2}{k^2}. \quad (3.28)$$

Jede hinreichend glatte Funktion kann durch das FOURIER-BESSELSche Integral (siehe z.B. [82]) dargestellt werden, σ_{zz} lautet dann

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma_{zz}(\lambda, 0) J_0(\xi \lambda) J_0(\xi r) \xi d\xi \lambda d\lambda. \quad (3.29)$$

Vergleicht man (3.27) und (3.29), erhält man

$$S = \frac{1}{2G} \cdot \xi \int_0^{\infty} \sigma_{zz}(\lambda, 0) J_0(\xi \lambda) \lambda d\lambda. \quad (3.30)$$

Unter Verwendung des zeitfreien Teils der Randbedingung (3.12) läßt sich auswerten

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sigma_{zz}(\lambda, 0) J_0(\xi \lambda) \lambda d\lambda &= \int_{\lambda=0}^a -\frac{F}{2\pi a \sqrt{a^2 - \lambda^2}} J_0(\xi \lambda) \lambda d\lambda + \int_{\lambda=a}^{\infty} 0 \cdot J_0(\xi \lambda) \lambda d\lambda \\ &= -\frac{F}{2\pi a} \int_0^a \frac{J_0(\xi \lambda) \lambda}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mit Hilfe der Integraltafel ([34]: 6.554 Nr. 2) ergibt sich daraus

$$\int_0^{\infty} \sigma_{zz}(\lambda, 0) J_0(\xi \lambda) \lambda d\lambda = -\frac{F}{2\pi a} \cdot \frac{\sin(\xi a)}{\xi}. \quad (3.32)$$

Eingesetzt in (3.30) wird

$$S = -\frac{F}{4G\pi a} \sin(\xi a), \quad (3.33)$$

was gleichgesetzt mit (3.28) zu der ersten Bestimmungsgleichung für die vier "Konstanten" A_1, A_2, B_1 und B_2 führt, die lediglich noch von ξ abhängen:

$$-(A_1 + A_2) \frac{\kappa^2}{h^2} + (B_1 + B_2) \frac{\beta \xi^2}{k^2} = -\frac{F \sin(\xi a)}{4G\pi a}. \quad (3.34)$$

Hier sei noch erwähnt, daß sich bei Annahme konstanter Normalspannung unter der Erregerplatte in (3.32) statt $\sin(\xi a)$ der Faktor $2J_1(\xi a)$ ergeben hätte. Beide Annahmen der Spannungsverteilung sind vermutlich unzutreffend (siehe *Bild 11*).

Etwas schneller folgen aus den homogenen Randbedingungen (3.13), (3.14) und (3.15) unter Anwendung des FOURIER-BESSELSchen Integrals die drei anderen Bestimmungsgleichungen:

$$-(A_1 - A_2) \frac{\alpha \xi}{h^2} + (B_1 - B_2) \frac{\xi \kappa^2}{k^2} = 0 \quad (3.35)$$

$$(A_1 e^{-\alpha d} + A_2 e^{\alpha d}) \frac{\xi}{h^2} - (B_1 e^{-\beta d} + B_2 e^{\beta d}) \frac{\beta \xi}{k^2} = 0 \quad (3.36)$$

$$(A_1 e^{-\alpha d} - A_2 e^{\alpha d}) \frac{\alpha}{h^2} - (B_1 e^{-\beta d} + B_2 e^{\beta d}) \frac{\xi^2}{k^2} = 0. \quad (3.37)$$

Diese Gleichungen lassen sich zu einer Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{M} \cdot \vec{A} = \vec{R} \quad (3.38)$$

zusammenfassen mit dem Vektor der ξ -abhängigen Konstanten

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

und dem Vektor der rechten Seiten (dem "Lastvektor")

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -\frac{F \sin(\xi a)}{4G\pi\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Die Koeffizientenmatrix hat dann folgende Form

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa^2}{h^2} & -\frac{\kappa^2}{h^2} & +\frac{\beta\xi^2}{k^2} & +\frac{\beta\xi^2}{k^2} \\ -\frac{\alpha\xi}{h^2} & +\frac{\alpha\xi}{h^2} & +\frac{\xi\kappa^2}{k^2} & -\frac{\xi\kappa^2}{k^2} \\ +\frac{\xi}{h^2}e^{-\alpha d} & +\frac{\xi}{h^2}e^{\alpha d} & -\frac{\beta\xi}{k^2}e^{-\beta d} & -\frac{\beta\xi}{k^2}e^{\beta d} \\ +\frac{\alpha}{h^2}e^{-\alpha d} & -\frac{\alpha}{h^2}e^{\alpha d} & -\frac{\xi^2}{k^2}e^{-\beta d} & +\frac{\xi^2}{k^2}e^{\beta d} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Das zugehörige homogene Gleichungssystem (d.h. $\vec{R} = \vec{0}$) hat nur nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante der Matrix M verschwindet. Sie lautet

$$\det M = D = \frac{4\xi^2}{h^4 k^4} \cdot N(\xi) \quad (3.42)$$

mit der Abkürzung

$$N(\xi) = 2\alpha\beta\xi^2\kappa^2 - \alpha\beta(\xi^4 + \kappa^4) \cosh \alpha d \cosh \beta d + \xi^2(\alpha^2\beta^2 + \kappa^4) \sinh \alpha d \sinh \beta d \quad (3.43)$$

und unter Benützung der Beziehungen

$$e^x - e^{-x} = 2 \sinh x \quad (3.44)$$

$$e^x + e^{-x} = 2 \cosh x \quad (3.45)$$

Aus $D = 0$, der sogenannten Dispersions- oder Frequenzgleichung, erhält man die Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und kann mit diesen durch Einsetzen und Lösen des Gleichungssystems die Eigenformen bestimmen, da sich die freien Schwingungen aus den homogenen Randbedingungen ergeben.

Die Koeffizientendeterminante wird nur für bestimmte Werte von h und k zu Null, d.h. die reellen Wurzeln von D sind abhängig von den Parametern ϱ, Ω, G, ν und d .

Nach der CRAMERSchen Regel findet man die gesuchten Konstanten zu

$$\vec{A} = \frac{1}{D} \vec{D} \quad (3.46)$$

wobei

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

der Vektor der Determinanten D_i ist, die sich aus den Matrizen ergeben, bei denen die i -te Spalte von M durch \vec{R} ersetzt wurde.

Die als Funktion der Wellenzahl ermittelten Größen lauten

$$A_1(\xi) = \frac{R_1 h^2}{4N(\xi)} [-2\alpha\beta\xi^2 + (\alpha\beta + \xi^2)\kappa^2 e^{\alpha d} e^{-\beta d} + (\alpha\beta - \xi^2)\kappa^2 e^{\alpha d} e^{\beta d}] \quad (3.48)$$

$$A_2(\xi) = \frac{R_1 h^2}{4N(\xi)} [-2\alpha\beta\xi^2 + (\alpha\beta + \xi^2)\kappa^2 e^{-\alpha d} e^{\beta d} + (\alpha\beta - \xi^2)\kappa^2 e^{-\alpha d} e^{-\beta d}] \quad (3.49)$$

$$B_1(\xi) = \frac{R_1 k^2}{4N(\xi)} [+2\alpha\kappa^2 - (\alpha\beta + \xi^2)\alpha e^{-\alpha d} e^{\beta d} + (\alpha\beta - \xi^2)\alpha e^{\alpha d} e^{\beta d}] \quad (3.50)$$

$$B_2(\xi) = \frac{R_1 k^2}{4N(\xi)} [+2\alpha\kappa^2 - (\alpha\beta + \xi^2)\alpha e^{\alpha d} e^{-\beta d} + (\alpha\beta - \xi^2)\alpha e^{-\alpha d} e^{-\beta d}] \quad (3.51)$$

mit

$$R_1 = -\frac{F \sin(\xi a)}{4G\pi a}. \quad (3.52)$$

Setzt man nun diese aus den Randbedingungen ermittelten "Konstanten" in die Lösungen (3.22) bis (3.25) ein, erhält man die Verschiebungen und die interessierenden Spannungen des Systems, wobei die harmonische Erregung ab hier mit dargestellt wird, zu

$$u_r(r, z, t) = \frac{F e^{i\Omega t}}{4G\pi a} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a) J_1(\xi r)}{N(\xi)} \xi \left[\alpha\beta (\xi^2 \cosh \alpha z + \kappa^2 \cosh \beta z) \right. \\ \left. + \alpha^2 \beta^2 \sinh \alpha d \sinh \beta(d-z) - \alpha\beta \xi^2 \cosh \alpha d \cosh \beta(d-z) \right. \\ \left. + \xi^2 \kappa^2 \sinh \beta d \sinh \alpha(d-z) - \alpha\beta \kappa^2 \cosh \beta d \cosh \alpha(d-z) \right] d\xi \quad (3.53)$$

$$u_z(r, z, t) = \frac{F e^{i\Omega t}}{4G\pi a} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a) J_0(\xi r)}{N(\xi)} \alpha \left[-\xi^2 (\alpha \beta \sinh \alpha z + \kappa^2 \sinh \beta z) \right. \\ \left. + \alpha \beta \xi^2 \sinh \alpha d \cosh \beta(d-z) - \xi^4 \cosh \alpha d \sinh \beta(d-z) \right. \\ \left. + \xi^2 \kappa^2 \sinh \beta d \cosh \alpha(d-z) - \alpha \beta \kappa^2 \cosh \beta d \sinh \alpha(d-z) \right] d\xi \quad (3.54)$$

$$\sigma_{zz}(r, z, t) = \frac{F e^{i\Omega t}}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a) J_0(\xi r)}{N(\xi)} \left[-\alpha \beta \xi^2 \kappa^2 (\cosh \alpha z + \cosh \beta z) \right. \\ \left. - \alpha^2 \beta^2 \xi^2 \sinh \alpha d \sinh \beta(d-z) + \alpha \beta \xi^4 \cosh \alpha d \cosh \beta(d-z) \right. \\ \left. - \xi^2 \kappa^4 \sinh \beta d \sinh \alpha(d-z) + \alpha \beta \kappa^4 \cosh \beta d \cosh \alpha(d-z) \right] d\xi \quad (3.55)$$

$$\sigma_{rz}(r, z, t) = \frac{F e^{i\Omega t}}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a) J_1(\xi r)}{N(\xi)} \alpha \xi \left[(\alpha \beta \xi^2 \sinh \alpha z + \kappa^4 \sinh \beta z) \right. \\ \left. - \alpha \beta \kappa^2 \sinh \alpha d \cosh \beta(d-z) + \xi^2 \kappa^2 \cosh \alpha d \sinh \beta(d-z) \right. \\ \left. - \xi^2 \kappa^2 \sinh \beta d \cosh \alpha(d-z) + \alpha \beta \kappa^2 \cosh \beta d \sinh \alpha(d-z) \right] d\xi \quad (3.56)$$

Für die Leistungsberechnung (Kapitel 5) werden noch die Normalspannungen in Radialrichtung benötigt. Hierzu werden (3.53) und (3.54) in (3.5) eingesetzt:

$$\sigma_{rr}(r, z, t) = \frac{F e^{i\Omega t}}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a)}{N(\xi)} \left\{ \left[\xi^2 J_0(\xi r) - \frac{\xi}{r} J_1(\xi r) \right] \left[\alpha \beta (\xi^2 \cosh \alpha z - \kappa^2 \cosh \beta z) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha^2 \beta^2 \sinh \alpha d \sinh \beta(d-z) + \alpha \beta \xi^2 \cosh \alpha d \cosh \beta(d-z) \right. \right. \\ \left. \left. + \xi^2 \kappa^2 \sinh \beta d \sinh \alpha(d-z) - \alpha \beta \kappa^2 \cosh \beta d \cosh \alpha(d-z) \right] \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{2} - \tau^2 \right) k^2 J_0(\xi r) \right] \left[\alpha \beta \xi^2 \cosh \alpha z \right. \right. \\ \left. \left. + \xi^2 \kappa^2 \sinh \beta d \sinh \alpha(d-z) - \alpha \beta \kappa^2 \cosh \beta d \cosh \alpha(d-z) \right] \right\} d\xi. \quad (3.57)$$

$N(\xi)$ ist jeweils nach (3.43) einzusetzen.

3.3.4 Aufbereitung der Lösung für die Vergleichsrechnung zum Versuch

3.3.4.1 Vertikalbewegungen an der Schichtoberfläche

Bei dem vorgeschlagenen Versuch soll nur die Vertikalbewegung an der Oberfläche $z = 0$ gemessen werden, daher interessiert vor allem

$$u_z(r, 0, t) = \frac{F e^{i\Omega t}}{8G\pi a} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a) J_0(\xi r)}{N(\xi)} \alpha k^2 (\alpha \beta \sinh \alpha d \cosh \beta d - \xi^2 \cosh \alpha d \sinh \beta d) d\xi. \quad (3.58)$$

3.3.4.2 Freie Schwingungen

Zur Bestimmung der freien Schwingungen wird, wie im vorigen Kapitel bereits angesprochen, die Dispersionsgleichung gelöst. Setzt man D nach (3.42) zu Null, ergibt sich, da $\xi = 0$ nicht sinnvoll, daß $N(\xi)$ nach (3.43) zu Null gesetzt werden muß.

Hieraus erhält man zu jedem Wertepaar (ν, kd) Nullstellen von ξ . Nennt man diese ξ_n und die abgeleiteten Größen

$$\alpha_n^2 = \xi_n^2 - h^2 \quad (3.59)$$

$$\beta_n^2 = \xi_n^2 - k^2, \quad (3.60)$$

so läßt sich die Vertikalbewegung der freien Schwingungen (zusätzlicher Index "0") an der Oberfläche bei Summation über alle diese n Wellenzahlen ξ_n schreiben als

$$u_{z0}(r, 0, t) = e^{i\omega t} \cdot \sum_n C_n J_0(\xi_n r) (\alpha_n \beta_n \sinh \alpha_n d \cosh \beta_n d - \xi_n^2 \cosh \alpha_n d \sinh \beta_n d). \quad (3.61)$$

Hierin sind die Amplitudenfaktoren C_n zunächst noch willkürlich, werden aber später aus der Bedingung im Unendlichen bestimmt, mit der stehende in wandernde Wellen verwandelt werden.

3.3.4.3 Dimensionslose Parameter

Vorab wird die dimensionslose Wellenzahl

$$\varphi = \frac{\xi}{k} \quad (3.62)$$

eingeführt, mit der dann folgende Beziehungen gelten:

$$d\xi = k d\varphi \quad (3.63)$$

$$\int_0^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} f(k\varphi) k d\varphi \quad (3.64)$$

$$\xi^2 = k^2 \varphi^2 \quad (3.65)$$

$$\alpha^2 = k^2 \varphi^2 - \tau^2 k^2 = k^2 (\varphi^2 - \tau^2) \quad (3.66)$$

$$\beta^2 = k^2 \varphi^2 - k^2 = k^2 (\varphi^2 - 1) \quad (3.67)$$

$$\kappa^2 = k^2 \varphi^2 - k^2/2 = k^2 (\varphi^2 - 1/2). \quad (3.68)$$

Neben der Wellenzahl ξ sind in (3.58) mit (3.18) bis (3.21), (3.26) und (3.43) folgende Größen vorhanden:

			Dimension
u_i	Verschiebung	Ergebnis	L
r	Radialrichtung	Variable	L
z	Tiefenrichtung (Oberfläche: $z = 0$)	Variable	L
t	Zeit	Variable	T
F	Erregerkraft(amplitude)	Ersatzeingangswert	$K = MLT^{-2}$

$$F = m_0 r_0 \Omega^2 \quad (3.69)$$

m_0	Erregerunwuchtmasse	Festwert	M
r_0	Exzentrizität der Erregerunwuchtmasse	Festwert	L
Ω	Erregerkreisfrequenz	Eingangswert	T^{-1}
G	Schubmodul	Parameter	$KL^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$
a	Radius der Erregergrundfläche	Festwert	L
ρ	Dichte der Bodenschicht	Parameter	ML^{-3}
k	Wellenzahl der Scherwellen	Ersatzparameter	L^{-1}

$$k = \sqrt{\frac{\rho}{G}} \Omega = \frac{\Omega}{c_s} \quad (3.70)$$

c_s = Scherwellengeschwindigkeit MT^{-1}

τ Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten, auch Brechungszahl genannt und mit dem Buchstaben s versehen Ersatzparameter –

$$\tau = \frac{c_s}{c_p} \quad (3.71)$$

	c_p = Kompressionswellengeschwindigkeit		MT^{-1}
ν	Querdehnzahl	Parameter	–
d	Schichtdicke	Parameter	L
m	Gesamtmasse des Erregers	Festwert	M
σ_{ik}	Spannung	Ergebnis	$ML^{-1}T^{-2}$
	In (3.19) ist außerdem		
h	Wellenzahl der Kompressionswellen		L^{-1}

$$h = \tau k = \frac{\Omega}{c_p} \quad (3.72)$$

Alle Größen werden nun auf die Grundeinheiten nach dem SI-System zurückgeführt:

- Länge L ,
- Zeit T und
- Masse M .

Aus den 8 Einflußgrößen ($n_E = 8$)

- Unwuchtmoment $m_0 r_0$,
- Erregerkreisfrequenz Ω ,
- Schubmodul G ,
- Radius der Erregergrundfläche a ,
- Dichte der Bodenschicht ρ ,
- Querdehnzahl ν ,
- Schichtdicke d und
- Gesamtmasse des Erregers m

werden durch Bezug auf die 3 rüttlereigenen Grundgrößen ($n_G = 3$), die vor der Messung bereits bekannt sind, nämlich

- Radius der Erregergrundfläche a für die Länge L ,
- Erregerkreisfrequenz Ω (Dimension T^{-1}) für die Zeit T ,
- Bezugsgröße m_b für die Masse M

$$m_b = \frac{F}{a\Omega^2} = \frac{m_0 r_0 \Omega^2}{a\Omega^2} = \frac{m_0 r_0}{a} \quad (3.73)$$

die 5 dimensionslosen Parameter ($n_d = n_E - n_G = 8 - 3 = 5$)

- dimensionslose Frequenz a_0 ,
- dimensionsloser Schubmodul \bar{G} ,
- Querdehnzahl ν oder Brechungszahl τ ,
- dimensionslose Schichtdicke \bar{d} und
- Massenverhältnis B_z

nach folgenden Formeln:

$$a_0 = \frac{a\Omega}{c_s} = a\Omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \sqrt{\frac{\rho}{\bar{G}}} \quad (3.74)$$

$$\bar{G} = G m_b^{-1} a \Omega^{-2} = G a^2 m_0^{-1} r_0^{-1} \Omega^{-2} = G a^2 F^{-1} \quad (3.75)$$

$$\tau^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} = \frac{c_s^2}{c_p^2} \quad (3.76)$$

$$\bar{d} = d a^{-1} \quad (3.77)$$

$$B_z = \frac{(1 - \nu)m}{4\rho a^3} = \frac{(1 - \nu)\bar{m}}{4\bar{\rho}} \quad (3.78)$$

Auch die anderen benötigten Größen werden in diesen Grundgrößen ausgedrückt und damit dimensionslos. Zur Kennzeichnung werden sie überstrichen geschrieben:

$$\bar{u}_i = u_i a^{-1} \quad (3.79)$$

$$\bar{r} = r a^{-1} \quad (3.80)$$

$$\bar{z} = z a^{-1} \quad (3.81)$$

$$\bar{t} = t\Omega \quad (3.82)$$

$$\bar{F} = Fm_b^{-1}a^{-1}\Omega^{-2} = Fm_0^{-1}r_0^{-1}\Omega^{-2} = 1 \quad (3.83)$$

$$\bar{\rho} = \rho m_b^{-1}a^3 = \rho m_0^{-1}r_0^{-1}a^4 \quad (3.84)$$

$$\bar{m} = mm_b^{-1} = mam_0^{-1}r_0^{-1} \quad (3.85)$$

$$\bar{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik}m_b^{-1}a\Omega^{-2} = \sigma_{ik}a^2m_0^{-1}r_0^{-1}\Omega^{-2} = \sigma_{ik}a^2F^{-1} \quad (3.86)$$

In der Literatur werden unterschiedliche zusammengesetzte Größen verwendet, am häufigsten jedoch die auf LYSMER und RICHART [57] zurückgehenden, nämlich das

I) Frequenzverhältnis a_0 , mit dem die Argumente sich ergeben zu:

$$k = a_0a^{-1} \quad (3.87)$$

$$rk = a_0\bar{F} \quad (3.88)$$

$$kd = a_0\bar{d}, \quad (3.89)$$

und das

II) Massenverhältnis B_z .

Diese beiden Größen gelten für den homogenen elastischen Halbraum. Für das Schichtenproblem schlagen KAGAWA und KRAFT [44] andere Verhältnisse vor, die umgeschrieben auf hier verwendete Kennbuchstaben lauten:

III) Frequenzverhältnis \bar{a}_0

$$\bar{a}_0 = \frac{2\Omega d}{\pi c_p} = \frac{2\tau\bar{d}}{\pi}a_0 \quad (3.90)$$

IV) Massenverhältnis \bar{B}_z

$$\bar{B}_z = \frac{(1-\nu)^2\pi^2m}{8(1-2\nu)\rho ad^2\bar{\alpha}} = \frac{(1-\nu)\pi^2\bar{m}}{16\tau\bar{\rho}\bar{d}^2\bar{\alpha}} = \frac{\pi^2}{4\tau\bar{d}^2\bar{\alpha}}B_z \quad (3.91)$$

Hierbei ist $\bar{\alpha}$ das Verhältnis der statischen Federkonstanten eines Zweischichten-Systems zu der des Halbraums, jeweils elastisch angenommen.

V) Dickenverhältnis \bar{d}^*

$$\bar{d}^* = \frac{d}{2a} = \frac{1}{2}\bar{d}. \quad (3.92)$$

Da die Größen (III) und (IV) weniger gebräuchlich sind und ebenso wie (V) aus den von mir verwendeten leicht zu errechnen sind, bleibt von (3.58), nunmehr dimensionslos:

$$\bar{u}_z(\bar{r}, 0, \bar{t}) = \frac{e^{i\bar{t}}}{8\pi\bar{G}} \int_0^\infty \sin(a_0\varphi) J_0(a_0\bar{r}\varphi) F(\varphi) d\varphi \quad (3.93)$$

mit

$$F(\varphi) = \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}. \quad (3.94)$$

Zähler und Nenner lauten:

$$\begin{aligned} Z(\varphi) = & (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \left[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \cdot \sinh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \cosh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ & \left. - \varphi^2 \cosh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \sinh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} N(\varphi) = & 2(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 (\varphi^2 - 1/2) \\ & - (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} [(\varphi^2 - 1/2)^2 + \varphi^4] \\ & \cdot \cosh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \cosh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ & + \varphi^2 [(\varphi^2 - \tau^2)(\varphi^2 - 1) + (\varphi^2 - 1/2)^2] \\ & \cdot \sinh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \sinh a_0 \bar{d} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

3.3.4.4 Konturintegration

Das Integral in (3.93) wird mit dem Hilfsmittel der Konturintegration, also der Integration im Komplexen unter Ausnützung des Residuentheorems ausgewertet (siehe z.B. [4] oder [64]).

Dabei wird ein Integral über eine reelle Variable erweitert auf ein Integral über eine komplexe Variable.

In der komplexen Ebene gilt entlang einer geschlossenen Kurve um ein einfach zusammenhängendes Gebiet für komplexe z_i

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}_{z_i}(f). \quad (3.97)$$

Zur Berechnung eines Residuums benützt man die Tatsache, daß es identisch ist mit dem Koeffizienten a_{-1} der LAURENTreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_i)^n. \quad (3.98)$$

Es gilt somit

$$\text{Res}_{z_i}(f) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z). \quad (3.99)$$

Besonders leicht erhält man das Residuum, wenn sich $f(z)$ darstellen läßt als

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad (3.100)$$

es ist nämlich dann

$$\operatorname{Res}_{z_i}(f) = \frac{g(z_i)}{h'(z_i)} \quad (3.101)$$

mit der Ableitung

$$h'(z_i) = \left. \frac{dh(z)}{dz} \right|_{z=z_i}. \quad (3.102)$$

Nach erfolgter Konturintegration müssen dem Ergebnis noch die freien Schwingungen überlagert werden, um die stehenden Wellen in sich ausbreitende Wellen zu verwandeln.

Zur Abkürzung der Berechnung wird hier unter Anlehnung an andere Autoren, z.B. E. REISSNER [68] oder BYCROFT [17], nur das Ergebnis der gesamten Prozedur dargestellt.

Es ergibt sich insgesamt, daß von dem Ausgangsintegral der CAUCHYSche Hauptwert zu nehmen ist, weil der Integrand im Intervall Pole hat.

Ist φ_1 eine Nullstelle des Nenners $N(\varphi)$, so gilt für diesen Hauptwert

$$\int_a^b f(\varphi) d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{\varphi_1 - \varepsilon} f(\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_1 + \varepsilon}^b f(\varphi) d\varphi \right). \quad (3.103)$$

Zusätzlich sind noch die freien Schwingungen nach Kapitel 3.3.4.2 zu überlagern, deren unbestimmte Funktionen C_n so zu wählen sind, daß sich gerade die $(-i\pi)$ -fache Summe der Residuen ergibt. Aus (3.93) wird damit

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(\bar{r}, 0, \bar{t}) = & \frac{e^{i\bar{t}}}{8\pi\bar{G}} \left[\int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_0(a_0\bar{r}\varphi) Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi \right. \\ & \left. - i\pi \sum_n \frac{\sin(a_0\varphi_n) J_0(a_0\bar{r}\varphi_n) Z(\varphi_n)}{N'(\varphi_n)} \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

φ_n sind die n Nullstellen von $N(\varphi)$ und

$$N'(\varphi_n) = N(\varphi)|_{\varphi=\varphi_n} = \left. \frac{dN(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_n} \quad (3.105)$$

wobei

$$\begin{aligned}
N'(\varphi) = & 2\varphi[\varphi^2(\varphi^2 - 1/2)(2\varphi^2 - 1 - \tau^2)(\varphi^2 - \tau^2)^{-1/2}(\varphi^2 - 1)^{-1/2} \\
& + (4\varphi^2 - 1)(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2}(\varphi^2 - 1)^{1/2}] \\
& - \varphi\left\{[(\varphi^2 - 1/2)^2 + \varphi^4](2\varphi^2 - 1 - \tau^2)(\varphi^2 - \tau^2)^{-1/2}(\varphi^2 - 1)^{-1/2}\right. \\
& \quad \left.+ 2(4\varphi^2 - 1)(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2}(\varphi^2 - 1)^{1/2}\right\} \\
& \cdot \cosh a_0\bar{d}(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2} \cosh a_0\bar{d}(\varphi^2 - 1)^{1/2} \\
& + 2\varphi\left\{[(\varphi^2 - \tau^2)(\varphi^2 - 1) + (\varphi^2 - 1/2)^2] + \varphi^2(4\varphi^2 - 2 - \tau^2)\right\} \\
& \cdot \sinh a_0\bar{d}(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2} \sinh a_0\bar{d}(\varphi^2 - 1)^{1/2} \\
& + a_0\bar{d}\varphi\left\{\varphi^2[(\varphi^2 - \tau^2)(\varphi^2 - 1) + (\varphi^2 - 1/2)^2](\varphi^2 - \tau^2)^{-1/2}\right. \\
& \quad \left.- (\varphi^2 - \tau^2)^{1/2}[(\varphi^2 - 1/2)^2 + \varphi^4]\right\} \\
& \cdot \cosh a_0\bar{d}(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2} \sinh a_0\bar{d}(\varphi^2 - 1)^{1/2} \\
& + a_0\bar{d}\varphi\left\{\varphi^2[(\varphi^2 - \tau^2)(\varphi^2 - 1) + (\varphi^2 - 1/2)^2](\varphi^2 - 1)^{-1/2}\right. \\
& \quad \left.- (\varphi^2 - 1)^{1/2}[(\varphi^2 - 1/2)^2 + \varphi^4]\right\} \\
& \cdot \sinh a_0\bar{d}(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2} \cosh a_0\bar{d}(\varphi^2 - 1)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.106}$$

3.3.4.5 Mittlere Vertikalbewegung unter der Grundplatte

Aus (3.104) erhält man unter der Erregergrundplatte, also für $\bar{r} \leq 1$, keinen konstanten Wert für \bar{u}_z . Nach [5] bzw. [17] kann man eine gewichtete mittlere Verschiebung (zusätzlicher Index "m"), die unter der Grundplatte als konstant angesehen werden kann, aus (3.107) erhalten.

$$u_{zm} = \int_0^a \frac{u_z r}{a\sqrt{a^2 - r^2}} dr \tag{3.107}$$

bzw.

$$\bar{u}_{zm} = \int_0^1 \frac{\bar{u}_z \bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2}} d\bar{r}. \tag{3.108}$$

Wendet man dies auf (3.104) an, so wird $J_0(a_0\bar{r}\varphi)$ ersetzt durch $(\sin a_0\varphi)/(a_0\varphi)$, und es bleibt

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{zm}(\bar{t}) = & \frac{e^{i\bar{t}}}{8\pi\bar{G}} \left[\int_0^\infty \frac{\sin^2(a_0\varphi)Z(\varphi)}{a_0\varphi N(\varphi)} d\varphi \right. \\
& \left. - i\pi \sum_n \frac{\sin^2(a_0\varphi_n)Z(\varphi_n)}{a_0\varphi_n N'(\varphi_n)} \right]
\end{aligned} \tag{3.109}$$

3.3.4.6 Komplexe Nachgiebigkeit

Häufig wird die Verschiebung auch in der Form

$$u_z = \frac{F e^{i\Omega t}}{Ga} (f_1 + i f_2) \quad (3.110)$$

dargestellt (vergleiche u.a. [86]). Manchmal wird dabei $f_1(a_0, \bar{d}, \nu)$ als der Lösungsanteil "in Phase" mit der Erregung, $f_2(a_0, \bar{d}, \nu)$ als der Anteil "in Gegenphase" zur Erregung bezeichnet, was nicht korrekt ist, da i lediglich eine Phasenverschiebung um $\pi/2$ bewirkt.

$(f_1 + i f_2)$ stellt dabei die komplexe Nachgiebigkeit dar.

Die Amplitude ist dann

$$A_0 = \frac{F}{Ga} \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.111)$$

In dimensionsloser Darstellung lautet die mittlere Verschiebung der Platte

$$\bar{u}_{zm} = \frac{e^{i\bar{t}}}{G} (f_1 + i f_2) \quad (3.112)$$

und deren Realteil

$$Re\{\bar{u}_{zm}\} = \frac{1}{G} (f_1 \cos \bar{t} - f_2 \sin \bar{t}) = \bar{A}_0 \cos(\bar{t} - \varphi) \quad (3.113)$$

mit der dimensionslosen Amplitude

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{G} \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.114)$$

und der Phasenlage

$$\tan \varphi = -\frac{f_2}{f_1} \quad (3.115)$$

Hier sind

$$f_1 = Re \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(a_0 \varphi) Z(\varphi)}{a_0 \varphi N(\varphi)} d\varphi - i \frac{1}{8} \sum_n \frac{\sin^2(a_0 \varphi_n) Z(\varphi_n)}{a_0 \varphi_n N'(\varphi_n)} \right\}, \quad (3.116)$$

$$f_2 = Im \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(a_0 \varphi) Z(\varphi)}{a_0 \varphi N(\varphi)} d\varphi - i \frac{1}{8} \sum_n \frac{\sin^2(a_0 \varphi_n) Z(\varphi_n)}{a_0 \varphi_n N'(\varphi_n)} \right\}. \quad (3.117)$$

Untersucht man (3.109), dann stellt sich heraus, daß das Integral reellwertig ist und somit f_1 liefert, während sich aus der ebenfalls reellwertigen Summe gerade f_2 ergibt,

also

$$f_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(a_0\varphi)Z(\varphi)}{a_0\varphi N(\varphi)} d\varphi, \quad (3.118)$$

$$f_2 = -\frac{1}{8} \sum_n \frac{\sin^2(a_0\varphi_n)Z(\varphi_n)}{a_0\varphi_n N'(\varphi_n)}. \quad (3.119)$$

(3.116) bis (3.119) gelten jeweils bei der Annahme "statischer" Spannungsverteilung unter der Platte. Nimmt man konstante Spannung unter der Platte an, hat man lediglich $\sin^2(a_0\varphi)$ durch $2\sin(a_0\varphi)J_1(a_0\varphi)$ bzw. $\sin^2(a_0\varphi_n)$ durch $2\sin(a_0\varphi_n)J_1(a_0\varphi_n)$ zu ersetzen.

Ist die starre Grundplatte massebehaftet, so lautet nach E. REISSNER [68] die Amplitude

$$A_m = \frac{F}{Ga} \left[\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 + ba_0^2 f_1)^2 + (ba_0^2 f_2)^2} \right]^{1/2} \quad (3.120)$$

mit dem Massenverhältnis

$$b = m_0^{-1} a^{-3}. \quad (3.121)$$

Mit B_z nach (3.78), also

$$B_z = \frac{1 - \nu}{4} b, \quad (3.122)$$

lautet die Amplitude dimensionslos

$$\overline{A_m} = \frac{1}{G} \left[\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 + \frac{4B_z}{(1-\nu)} a_0^2 f_1\right)^2 + \left(\frac{4B_z}{(1-\nu)} a_0^2 f_2\right)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.123)$$

3.3.4.7 Impedanz und Steifigkeiten

Bei anderen Fragestellungen als der nach der Baugrunderkundung interessiert häufig der Widerstand, den ein Boden einer dynamischen Beanspruchung entgegenbringt.

Um den Zusammenhang herzustellen, wird die Impedanz einer Schicht bei Vertikal-erregung berechnet. Hier ist anzumerken, daß die normierte Impedanzfunktion \hat{I} (3.125) auch komplexe Steifigkeit genannt wird; ihr Realteil gibt die normierte Federsteifigkeit wieder, ihr Imaginärteil ist proportional der normierten Dämpfung [56]†.

†Statt den in der Mechanik gebräuchlichen Kennbuchstaben c für die Federsteifigkeit und k für den Dämpfungsbeiwert werden in diesem Kapitel die genau gegenteilig verwendeten amerikanischen Bezeichnungen benützt. Dies soll die Vergleichbarkeit mit fast allen diesbezüglichen Literaturstellen erleichtern. Der Arbeitskreis "Baugruddynamik" verwendet k für den Federanteil und d für den Dämpferanteil.

Es gilt

$$\overline{u_{zm}} = \frac{e^{i\bar{t}}}{G} \cdot \frac{1}{\bar{I}} \quad (3.124)$$

mit

$$\hat{I} = k_z + ia_0c_z. \quad (3.125)$$

k_z und c_z hängen mit f_1 und f_2 wie folgt zusammen, wie aus dem Vergleich von (3.112) und (3.124) hervorgeht:

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{k_z + ia_0c_z}. \quad (3.126)$$

Man hätte auch gleich wie im Reellen die Nachgiebigkeit als Kehrwert der Steifigkeit anschreiben können.

Trennt man Real- und Imaginärteil, dann erhält man für die Federsteifigkeit[†]

$$k_z = \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.127)$$

und für den Dämpfungsbeiwert

$$c_z = -\frac{f_2}{a_0(f_1^2 + f_2^2)}, \quad (3.128)$$

bzw. durch Erweiterung der rechten Seite von (3.126) mit $(k_z - ia_0c_z)$ nach den Teilen der Nachgiebigkeit getrennt:

$$f_1 = \frac{k_z}{k_z^2 + c_z^2}, \quad (3.129)$$

$$f_2 = -\frac{a_0c_z}{k_z^2 + a_0^2c_z^2}. \quad (3.130)$$

In der Praxis wird unter Impedanz häufig die "akustische" Impedanz als Produkt aus Dichte und "seismischer" Geschwindigkeit (Dimension $ML^{-2}T^{-1}$) verstanden. Diese Definition umfaßt also lediglich den Realteil von \hat{I} in modifizierter Form.

Damit stehen drei Paare zur Beschreibung einer Schwingung zur Verfügung:

- Amplitude A_0 oder A_m und Phase(nlage) φ ,
- Steifigkeiten k_z und c_z oder
- Nachgiebigkeiten f_1 und f_2 ,

die gleichwertig sind und je nach Aufgabenstellung benützt werden können.

[†]Diese Bezeichnung ist für die Schicht problematisch, weil k_z auch negative Werte annehmen kann! (siehe Kapitel 6)

3.3.4.8 Resonanzfrequenz einer Schicht

Im unendlichen Kontinuum ist jede Wellenzahl möglich (dies wurde in Kapitel 3.3.2 bereits angewandt), also ist auch jede Frequenz Eigenfrequenz. Trotzdem gibt es in der elastischen Schicht Resonanzen, die bei Vertikalerregung an der Oberfläche durch die Reflexion der vertikal fortschreitenden Kompressionswellen; sonst auch durch die Reflexion der vertikal fortschreitenden Scherwellen am starren Untergrund zustande kommen. Bei diesen Resonanzfrequenzen ist zwar eine Überhöhung der Amplitude zu beobachten, eine Resonanzkatastrophe findet jedoch wegen der geometrischen Wellenabstrahlung nicht statt. Daher halte ich auch die englische Bezeichnung "natural frequency" für treffender; der Ausdruck "kritische Frequenz bei Vertikalerregung" ist in der Literatur auch anzutreffen.

Das Integral in f_1 nach (3.118) divergiert für bestimmte Werte von a_0 , nämlich für

$$a_{0R} = \frac{(2n-1)\pi}{2\bar{d}\tau} \quad (3.131)$$

und damit auch für bestimmte Ω ; diese liefern nach [5] und [17] die Resonanzfrequenzen

$$\Omega_R = \frac{(2n-1)\pi}{2d} \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \frac{(2n-1)\pi}{2d} c_p \quad (3.132)$$

und damit

$$f_R = \frac{\Omega_R}{2\pi} = \frac{2n-1}{4d} c_p \quad (3.133)$$

Die niederste Resonanzfrequenz einer elastischen Schicht bei Vertikalerregung ergibt sich für $n=1$ zu

$$f_{R1} = \frac{c_p}{4d} \quad (3.134)$$

oder dimensionslos

$$\bar{f}_{R1} = \frac{1}{2\bar{d}\tau a_0} \quad (3.135)$$

AUERSCH [6] nimmt fälschlich c_s als Bezug und beschreibt, daß Resonanzen in einer Schicht bei $f_R = c_s/2d$ gefunden wurden. Im sandigen Boden mit ν zwischen ca. 0,28 und 0,37 (siehe auch Kapitel 6) ergibt sich $f_R \approx (0,9 - 1,1) \cdot c_s/2d$, was seinen Irrtum erklärt.

Der Ausdruck $f = c_s/2d$ wird von ihm als "untere Grenzfrequenz" bezeichnet, weil darunter kein Wellentransport stattfindet. BYCROFT [17] gibt für Torsionserregung an

der Oberfläche einer Schicht an, daß sich unterhalb von $a_0 = \pi/2\bar{d}$ keine freien Schwingungen ausbilden und keine Energieausbreitung stattfindet. Umgerechnet ergibt sich dafür ein zu (3.134) analoger Ausdruck, nämlich $f = c_s/4d$. Ich vermute daher, daß die Resonanzfrequenz nach (3.134) bei Vertikalerregung auch die untere Grenzfrequenz darstellt. Bei meinen Untersuchungen kann die untere Grenzfrequenz vermutlich nicht festgestellt werden, da sie sich nur auf die Verschiebungen bei $r = 0$ beziehen[†].

Mißt man an einem Ort die Resonanzfrequenz f_R und ist die Geschwindigkeit der Kompressionswellen für das anstehende Bodenmaterial bekannt, so läßt sich daraus die Dicke d einer Schicht bestimmen zu

$$d = \frac{c_p}{4f_R} \quad (3.136)$$

bzw. dimensionslos

$$\bar{d} = \frac{1}{2f_R \tau a_0} \quad (3.137)$$

Dies gilt umso mehr, als (3.131) sowohl für die hier verwendete, am Untergrund haftende Schicht als auch für eine auf dem Untergrund gleitende Schicht gültig ist.

3.3.5 Numerische Auswertung der Lösung für die elastische Schicht

In die Berechnungen gehen Festwerte, Eingangswerte und Parameter ein (siehe Kapitel 3.3.4.3).

Die Festwerte m_0 , r_0 , a und m können in gewissen Grenzen variiert werden, z.B. durch Unwuchtverstellung oder durch die Verwendung von Zusatzlasten bzw. von verschiedenen Rüttlern.

Der Eingangswert Ω unterscheidet sich von diesen dadurch, daß er während des Versuchs systematisch in diskreten Schritten variiert wird.

Die vor einer Bodenerkundung unbekanntenen Größen G , ν , ρ und d sind für die Berechnungen als Parameter anzusehen. Sie wurden mit den Fest- und Eingangswerten zu den dimensionslosen Parametern \bar{G} , a_0 , \bar{d} und B_z verknüpft; ν bzw. das daraus abgeleitete τ sind selbst dimensionslos.

[†]siehe aber Kapitel 6.2

3.3.5.1 Praktisch relevante Werte der Parameter

Zur Einschränkung der numerischen Untersuchungen werden die praktisch relevanten Wertebereiche der Parameter ermittelt.

1) Rüttlerdaten

a) Rüttler der Vorversuche (nach dem Firmenprospekt)

Betriebs"gewicht"	m	=	760	kg
"Flieh"kraft	F	=	35	kN
Erregerfrequenz	f	=	24	Hz
Aufstandsfläche	a_1/b_1	=	0,68 m/0,66 m	$\approx 0,45 \text{ m}^2$

Hieraus errechnet man

$$\begin{aligned}\Omega &= 2\pi f && \approx 150,8 && \text{s}^{-1} \\ a &= \sqrt{a_1 b_1 / \pi} && \approx 0,378 && \text{m} \\ m_0 r_0 &= F \Omega^{-2} && \approx 1,539 && \text{kgm}\end{aligned}$$

b) Geplanter Versuchsrüttler

m	=	250	kg (+ 5 · 50 kg Zusatzmassen)
a	=	0,40	m ($\hat{=}$ Aufstandsfläche $\approx 0,5 \text{ m}^2$)
$m_0 r_0$	=	1,5	kgm
Ω	=	30 – 600	s^{-1} (aus $f \approx 5 – 100 \text{ Hz}$)

2) Bodendaten

Diese werden der bodenmechanischen Literatur, z.B. [55], entnommen.

a) Querdehnzahl

theoretische Grenzwerte (elastisches Kontinuum):

$$0 \leq \nu \leq 0,5$$

im Boden: $0,25 \leq \nu < 0,5$

Für die Beispielrechnung wählen viele Autoren glatte Werte für ν (0, 1/4, 1/3, 1/2). Als guter Mittelwert für sämtliche Böden gilt nach Thesen des Arbeitskreises Baugrunddynamik $\nu = 0,4$.

Ich verwende bei meinen Beispielrechnungen daher

$$\nu = 0,25; 0,33; 0,40; 0,49.$$

b) Schubmodul

$$2 \cdot 10^6 \leq \text{Elastizitätsmodul } E \leq 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2,$$

$$\text{mit } G = E/2(1 + \nu) \text{ also } 6 \cdot 10^5 \leq G \leq 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2.$$

c) Dichte

$$10 \leq \text{spez. Gewicht } \gamma \leq 24 \text{ kN/m}^3 \text{ (ohne Fels),}$$

$$\text{mit } \rho = \gamma/g \text{ also } 1000 \leq \rho \leq 2500 \text{ kg/m}^3.$$

3) Schichtdicke

Es wird erwartet, daß Schichten mit einer Dicke von

$$0,2 \leq d \leq 4 \text{ m feststellbar sind.}$$

Ab $d = 2 \text{ m}$ würde die Halbraumlösung eine gute Näherung darstellen (nach [7] oder [56]), sie wird hier aber nicht verwendet.

4) Parameterbereiche

Aus 1) bis 3) erhält man durch Kombination der jeweils ungünstigsten Werte die Grenzen, innerhalb deren sich die Parameterwerte bewegen. Eine weitere Einschränkung ließe sich dadurch erzielen, daß praktisch unmögliche Kombinationen eliminiert würden, z.B. kann ein Boden geringer Dichte kaum einen extrem hohen Schubmodul haben. Da aber eindeutige Abhängigkeiten nicht quantifiziert vorliegen, wird darauf verzichtet.

Parameter	Gleichung	Vorversuch	Versuch	gewählte Grenzen
\bar{G}	(3.75)	2,45 – 490	0,178 – 14200	$2,5 \cdot 10^{-1} - 2,5 \cdot 10^4$
a_0	(3.74)	0,165 – 3,68	0,0346 – 15,5	$1 \cdot 10^{-2} - 4,5 \cdot 10^0$
\bar{d}	(3.77)	0,529 – 52,9	0,5 – 50	$1 \cdot 10^0 - 4 \cdot 10^0$
B_z	(3.78)	0,704 – 2,64	0,195 – 1,46	$1,5 \cdot 10^{-1}$
bzw. b	(3.121)	5,63 – 14,1	1,56 – 7,81	$-1,5 \cdot 10^1$
ν	—	$\approx 0,3$	0,25 – 0,499	0,25 – 0,49

Tabelle der Parameterbereiche

3.3.5.2 Untersuchung der Dispersionsrelation

Wie in Kapitel 3.3.3 bereits erwähnt, erhält man mit den aus der Dispersionsrelation gewonnenen Eigenwerten die freien Schwingungen.

Dies führt auf die Suche der Nullstellen von $N(\varphi) = 0$ [$N(\varphi)$ nach (3.96)].

Wie man leicht sieht, erfüllen zwar $\varphi^2 = \tau^2$ und $\varphi^2 = 1$ diese Beziehung, stellen aber keine verwertbaren dimensionslosen Wellenzahlen dar, sie bedeuten nämlich $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$.

Für $\varphi > 1$ ergibt sich oberhalb bestimmter Wertekombinationen der Parameter ν und $a_0 \bar{d} = d \cdot \Omega \sqrt{\rho/G}$ genau eine Nullstelle bei $\varphi = \varphi_n$, für die der Integrand einen einfachen Pol hat (siehe Bild 12).

Für große $a_0 \bar{d}$ stellt φ_n das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Transversal- zur RAYLEIGHwelle dar, also $\lim_{a_0 \bar{d} \rightarrow \infty} \varphi_n = c_s/c_R = 1/\sqrt{\gamma_1}$ (siehe auch Kapitel 6.1).

Für $\varphi^2 < 1$ und $\varphi^2 \neq \tau^2$ ergeben sich je nach Parameterkombination einige Nullstellen von $N(\varphi)$ und damit einige Pole, die für die Berechnung der Residuen, also für f_2 von Bedeutung sind.

3.3.5.3 Nachgiebigkeit, Impedanz, Amplitude und Phase

Die Ausdrücke für f_1 (3.118) und f_2 (3.119) sind nicht in dieser Form mit dem Rechner auswertbar.

Insgesamt gibt es 8 verschiedene Bereiche von φ für die Berechnung:

$$\begin{aligned} \varphi^2 = 0, & \quad 0 < \varphi^2 < \tau^2, \quad \varphi^2 = \tau^2, \quad \tau^2 < \varphi^2 < 1, \\ \varphi^2 = 1, & \quad \varphi^2 = \varphi_n^2 (> 1), \quad \varphi^2 > 1 (\neq \varphi_n^2), \quad \varphi^2 \text{ groß.} \end{aligned}$$

Die Funktionen $Z(\varphi)$ nach (3.95), $N(\varphi)$ nach (3.96) und $N'(\varphi)$ nach (3.106) müssen bereichsweise untersucht werden und sind dazu umzuschreiben.

Für $\varphi < 1$ werden die Diskriminanten der vorhandenen Wurzeln teilweise negativ, die Argumente der Hyperbelfunktionen und die Funktionen selbst damit imaginär. Zum Umschreiben stehen die Beziehungen

$$\sinh ix = i \sin x \quad (3.138)$$

$$\cosh ix = \cos x. \quad (3.139)$$

zur Verfügung. In den Beispielen ist im Bereich $\tau^2 < \varphi^2 < 1$ der Imaginärteil der jeweiligen Funktion dargestellt, außerhalb dieses Bereiches jeweils der Realteil.

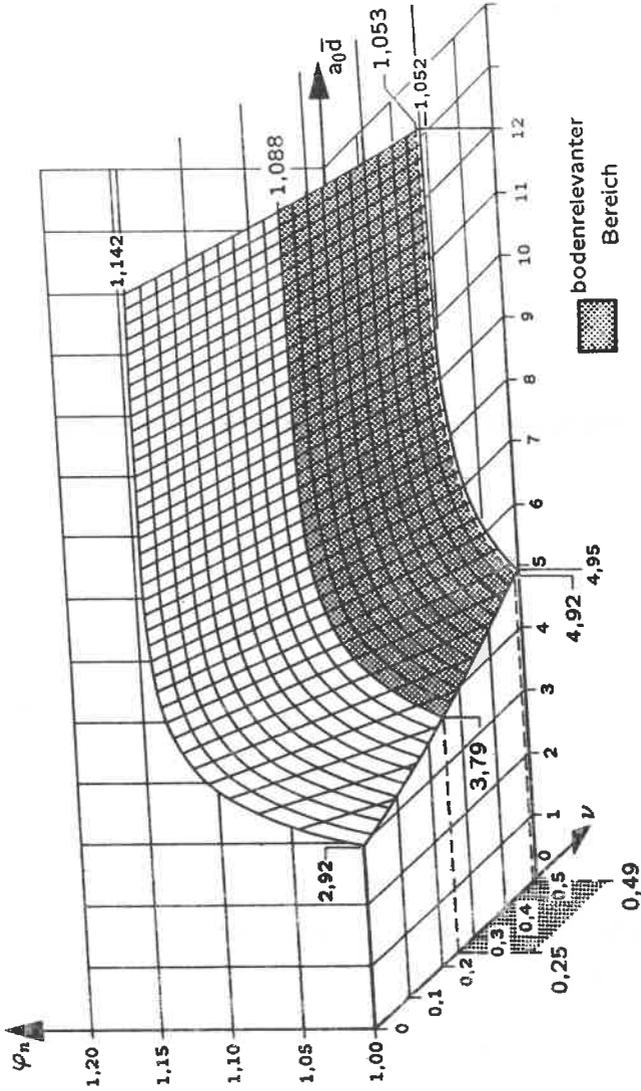


Bild 12: Nullstellen $\varphi_n > 1$ der Dispersionsrelation $N(\varphi) = 0$ in Abhängigkeit von den Parametern ν und $a_0 d$

Für $\varphi^2 > \tau^2$ bzw. $\varphi^2 > 1$ wachsen die Argumente mit $(\varphi^2 - \tau^2)^{1/2}$ bzw. $(\varphi^2 - 1)^{1/2}$ und damit die Hyperbelfunktionen zu schnell. Zur Abhilfe dividiert man sowohl Zähler als auch Nenner in f_1 und f_2 durch die Exponentialfunktionen derselben Argumente, damit nicht die Differenz großer Zahlen zu bilden ist, was bekanntlich leicht zu falschen Ergebnissen führen kann. Die Nullstellen ändern sich dadurch nicht, weil $e^x \neq 0$ für alle x .

Das Integral in f_1 muß auch bereichsweise ausgewertet werden.

Für $\varphi^2 < \varphi_n^2$ (> 1) wird das Integrationsintervall jeweils von Pol zu Pol gewählt und zur Berechnung die GAUSSsche Integration aus dem Programmpaket QUADPACK [65] verwendet, das auch eine spezielle Routine zur Integration über die Pole hinweg enthält.

Für $\varphi^2 > \varphi_n^2$ (> 1) wird das Integrationsintervall jeweils von einer Nullstelle des Sinus bis zur nächsten gewählt, so lange, bis der Zuwachs kleiner als eine zu wählende Grenze ist. Dieser Abbruch ist erlaubt, weil der Integrand des uneigentlichen Integrals für große φ den Wert $\sin^2 a_0 \varphi \cdot (1 + \tau^2)/(a_0 \varphi^2)$ annimmt, das heißt mit φ quadratisch gegen Null geht und damit das Integral konvergiert.

Die Summenfunktion in f_2 wird nur für die Bereiche

$$0 < \varphi^2 < \tau^2, \tau^2 < \varphi^2 < 1, \varphi^2 = \varphi_n^2 (< 1, 142)$$

benötigt, also dort, wo Pole auftreten können.

3.4 Viskoelastische Schicht

In diesem Kapitel stelle ich zuerst das seit L. BOLTZMANN (2. Hälfte des 19. Jahrhunderts) bekannte, aber erst in den 50er und 60er Jahren unseres Jahrhunderts weiterentwickelte, "klassische" Konzept der linearen Viskoelastizität soweit dar, wie ich es benötige. Dann wird diesem die in der baugruddynamischen Literatur übliche Behandlung des Bodens mit Dämpfung gegenübergestellt. Anschließend erfolgt die Lösung für das mechanische Problem "harmonische Vertikalerregung einer Kreisfläche auf einer viskoelastischen Schicht".

3.4.1 Lineare Viskoelastizität

Die Viskoelastizität umfaßt sowohl die *elastischen* als auch die *viskosen* Eigenschaften eines Stoffes. Beide Arten sind (neben anderen) im Boden vorhanden.

In Ergänzung zu dem elastischen Stoffgesetz, das Spannungen und Verzerrungen verknüpft, werden Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten eingeführt, also die Geschwindigkeiten, mit denen sich **Spannungen und Verzerrungen im Laufe der Zeit ändern**.

Die *lineare* Viskoelastizität beschränkt sich auf lineare Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen und deren *Zeitabhängigkeiten*. Nimmt man höhere Zeitableitungen hinzu, kann die lineare Viskoelastizität in allgemeiner Differentialoperatorform z.B. nach [19] oder [29] dargestellt werden

$$\underline{P}\sigma_{ik} = \underline{Q}\varepsilon_{ik} \quad (3.140)$$

mit den Operatoren

$$\underline{P} = \sum_{n=0}^m p_n D^n \quad (3.141)$$

$$\underline{Q} = \sum_{n=0}^m q_n D^n \quad (3.142)$$

$$D^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (3.143)$$

Die beiden Tensoren σ_{ik} und ε_{ik} können jeweils in einen Kugeltensor und einen Deviator aufgespalten werden:

$$\sigma_{ik} = \overset{\circ}{\sigma}_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} \quad (3.144)$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ik} = \frac{1}{3}\sigma_{jj}\delta_{ik} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \quad (3.145)$$

$$s = \frac{1}{3}\sigma_{jj} \quad (3.146)$$

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} - s\delta_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - s & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - s & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - s \end{pmatrix} \quad (3.147)$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{jj} = \sigma_{jj} \quad (3.148)$$

$$\tilde{\sigma}_{jj} = 0 \quad (3.149)$$

$$\varepsilon_{ik} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + \tilde{\varepsilon}_{ik} \quad (3.150)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{3}\varepsilon_{jj}\delta_{ik} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

$$e = \frac{1}{3}\varepsilon_{jj} \quad (3.152)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ik} = \varepsilon_{ik} - e\delta_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - e & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - e & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - e \end{pmatrix} \quad (3.153)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{jj} = \varepsilon_{jj} \quad (3.154)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{jj} = 0 \quad (3.155)$$

Der Vorteil dieser Aufspaltung liegt darin, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Abhängigkeiten eingegrenzt werden können: ein hydrostatischer Spannungszustand bewirkt nur Dilatation (Volumenänderung), ein Schubspannungszustand bewirkt nur Distortion (Gestaltänderung).

Die Voraussetzungen sind: Isotropie (gleiche Eigenschaften in allen Richtungen) und Gültigkeit des Superpositionsprinzips (Verformungen und deren Zeitableitungen müssen

klein sein). Beide können im Rahmen dieses Problems als zutreffend angenommen werden.

Damit sind die Abhängigkeiten in allgemeiner Form:

$$\overset{\circ}{P}\overset{\circ}{\sigma}_{ik} = \overset{\circ}{Q}\overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} \quad (3.156)$$

$$\tilde{P}\tilde{\sigma}_{ik} = \tilde{Q}\tilde{\varepsilon}_{ik} \quad (3.157)$$

mit den vier voneinander unabhängigen Operatoren

$$\overset{\circ}{P} = \sum_{n=0}^m \overset{\circ}{p}_n D^n \quad (3.158)$$

$$\overset{\circ}{Q} = \sum_{n=0}^m \overset{\circ}{q}_n D^n \quad (3.159)$$

$$\tilde{P} = \sum_{n=0}^m \tilde{p}_n D^n \quad (3.160)$$

$$\tilde{Q} = \sum_{n=0}^m \tilde{q}_n D^n \quad (3.161)$$

Zusammengefaßt gilt also

$$\underline{P}\sigma_{ik} = \overset{\circ}{P}\overset{\circ}{\sigma}_{ik} + \tilde{P}\tilde{\sigma}_{ik} = \overset{\circ}{Q}\overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + \tilde{Q}\tilde{\varepsilon}_{ik} = \underline{Q}\varepsilon_{ik}. \quad (3.162)$$

Im Hinblick auf den gewählten Versuch wird das einfachste Modell mit Berücksichtigung von Elastizität und verzögerter Elastizität (bzw. instantaner und retardierter Elastizität) gesucht. Dies ist der *lineare Standardfestkörper*, der reine Viskosität, wie sie bei einer Flüssigkeit auftritt, nur im Grenzfall berücksichtigt. Als Abkürzung führe ich dafür "LSt" ein.

Die verbleibenden Koeffizienten lauten dann nach vorheriger Normierung auf die bei der Spannung stehenden $\overset{\circ}{p}_0 = \tilde{p} = 1$:

$$p_n = \{\overset{\circ}{p}_n, \tilde{p}_n\} \begin{cases} = 1 & n = 0 \\ \neq 0 & n = 1 \\ = 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad (3.163)$$

$$q_n = \{\overset{\circ}{q}_n, \tilde{q}_n\} \begin{cases} \neq 0 & n = 0, 1 \\ = 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad (3.164)$$

und das Stoffgesetz des LSt wird formal zu

$$\sigma_{ik} + p_1 \sigma_{ik,t} = q_0 \varepsilon_{ik} + q_1 \varepsilon_{ik,t} \quad (3.165)$$

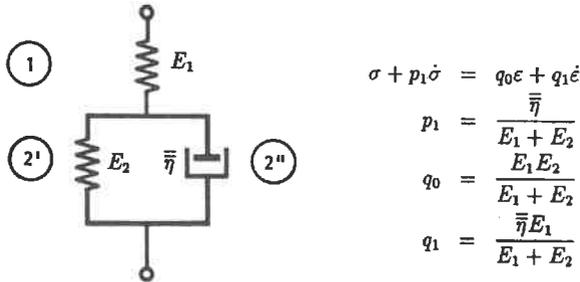


Bild 13: Linearer Standardfestkörper (eindimensionales Modell)

bzw. aufgespalten

$$\dot{\sigma}_{ik} + \dot{p}_1 \dot{\sigma}_{ik,t} + \bar{\sigma}_{ik} + \bar{p}_1 \bar{\sigma}_{ik,t} = \dot{q}_0 \dot{\varepsilon}_{ik} + \dot{q}_1 \dot{\varepsilon}_{ik,t} + \bar{q}_0 \bar{\varepsilon}_{ik} + \bar{q}_1 \bar{\varepsilon}_{ik,t} \quad (3.166)$$

Zur Veranschaulichung sind in Bild 13 das eindimensionale Modell des LSt und die zugehörige Differentialgleichung dargestellt, wie sie häufig in der Literatur zu finden sind (u.a. in [16],[29] und [53]). E_1 und E_2 repräsentieren die Elastizitätsmoduli in den Federelementen, $\bar{\eta}$ die Viskosität in dem Dämpferelement des Modells, das durch Serienschaltung einer Feder /1/ mit einem VOIGT-KELVIN-Element /2/ entsteht, wobei letzteres die Parallelschaltung einer Feder /2'/ und eines Dämpfers /2''/ ist und manchmal auch nur VOIGT-Element oder KELVIN-Element genannt wird. Häufig werden für die drei Elemente des Modells auch die Federsteifigkeiten c_1 und c_2 sowie die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskonstante k (deutsche Bezeichnungen!) verwendet.

Der LSt für dreidimensionale Betrachtungen wird nun aus den elastischen und viskosen Kugel- und Deviatoranteilen aufgebaut. Dadurch werden die Koeffizienten p_n und q_n in den bekannten Werkstoffkenngrößen wie Kompressionsmodul K , Schubmodul G , Volumenviskosität κ und Scherviskosität η ausgedrückt. Es gilt

$$\text{Statik: } \sigma_{ik}^1 = \sigma_{ik}^2 = \sigma_{ik} \quad (3.167)$$

$$\text{Geometrie: } \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^1 + \varepsilon_{ik}^2 \quad (3.168)$$

$$\varepsilon_{ik}^2 = \varepsilon_{ik}^{2'} = \varepsilon_{ik}^{2''} \quad (3.169)$$

$$\text{Werkstoff: Aufspaltung} \quad \sigma_{ik} = \overset{\circ}{\sigma}_{ik} + \bar{\sigma}_{ik} \quad (3.170)$$

$$\varepsilon_{ik} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + \bar{\varepsilon}_{ik} \quad (3.171)$$

$$\text{Element /1/} \quad \sigma_{ik}^1 = 3K_1 \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^1 + 2G_1 \bar{\varepsilon}_{ik}^1 \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned} \text{Element /2/} \quad \sigma_{ik}^2 &= \sigma_{ik}^{2'} + \sigma_{ik}^{2''} \\ &= 3K_2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^2 + 2G_2 \bar{\varepsilon}_{ik}^2 + 3\kappa_2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik,t}^2 + 2\eta_2 \bar{\varepsilon}_{ik,t}^2 \end{aligned} \quad (3.173)$$

Hieraus erhält man durch Umformen, Einsetzen und durch Bilden der Zeitableitungen z.B. nach [14] sowie mit den Abkürzungen

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \quad (3.174)$$

$$G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad (3.175)$$

$$\kappa = \frac{K_1 \kappa_2}{K_1 + K_2} \quad (3.176)$$

$$\eta = \frac{G_1 \eta_2}{G_1 + G_2} \quad (3.177)$$

$$\chi = \frac{\kappa_2}{K_1 + K_2} \quad (3.178)$$

$$\zeta = \frac{\eta_2}{G_1 + G_2} \quad (3.179)$$

das Werkstoffgesetz des LSt zu

$$\sigma_{ik} + \chi \overset{\circ}{\sigma}_{ik,t} + \zeta \bar{\sigma}_{ik,t} = 3K \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + 3\kappa \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik,t} + 2G \bar{\varepsilon}_{ik} + 2\eta \bar{\varepsilon}_{ik,t}. \quad (3.180)$$

Dieses Werkstoffgesetz mit 6 Werkstoffkenngrößen sieht noch etwas unhandlich aus.

Als weitere Vereinfachung wird die aus der Fließtheorie z.B. im Stahlbau bekannte Annahme benützt, daß der hydrostatische Spannungszustand kein Fließen bewirkt (sondern Gewaltbruch, der hier nicht in Betracht kommt).

Auf das viskoelastische Kontinuum übertragen heißt dies, daß beim Kriechen nur eine Gestaltänderung auftritt, d.h. es erfolgt volumentreu; somit

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ik,t}^2 = 0 \quad (3.181)$$

Damit reduziert sich das Stoffgesetz; man erhält statt (3.180) eines mit lediglich noch den 4 Werkstoffkenngrößen (3.174), (3.175), (3.177), (3.179):

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ik} + \bar{\sigma}_{ik} + \zeta \bar{\sigma}_{ik,t} = 3K \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + 2G \bar{\varepsilon}_{ik} + 2\eta \bar{\varepsilon}_{ik,t}. \quad (3.182)$$

Zum Vergleich mit dem HOOKEschen Gesetz der linearen Elastizität werden die Beziehungen (3.146), (3.147) und (3.151) bis (3.153) und der Zusammenhang zwischen Kompressionsmodul, Schubmodul und Querdehnzahl eingearbeitet:

$$3K = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (3.183)$$

Man erhält nach entsprechendem Zusammenfassen

$$\begin{aligned} & \sigma_{ik} + \zeta \left(\sigma_{ik,t} - \frac{1}{3} \sigma_{jj,t} \delta_{ik} \right) \\ = & 2G \left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right) + 2\eta \left(\varepsilon_{ik,t} - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj,t} \delta_{ik} \right). \end{aligned} \quad (3.184)$$

Dieses Werkstoffgesetz des linearen Standardfestkörpers mit volumentreuem Kriechen, abgekürzt **LStvK**, sieht formal aus wie eine Erweiterung des HOOKEschen Gesetzes ((3.4), also die beiden linken Terme) um die beiden Geschwindigkeitsterme (rechts), hat mechanisch aber einen völlig anderen Charakter, wie sich bei der Weiterbearbeitung zeigt.

3.4.2 Behandlung dynamischer Probleme der Viskoelastizität in der Baugruddynamik

Dynamische Probleme der Viskoelastizität werden mit Hilfe zweier Konzepte behandelt: Komplexe Moduli und Verwendung der LAPLACE-Transformation. Deren Anwendungsgebiete decken sich nicht ganz, sie sind aber für bestimmte Fragestellungen äquivalent, z.B. für $t \rightarrow \infty$ (eingeschwungener Zustand).

Da in der Praxis der Baugruddynamik hauptsächlich der komplexe Schubmodul G_d und die (dynamische) Querdehnzahl ν verwendet werden (siehe Kapitel 2), für die analytische Weiterbearbeitung aber die LAPLACE-Transformation benötigt wird, werden beide Konzepte kurz vorgestellt.

Zunächst werden die komplexen Moduli des gewählten Modells **LStvK** bestimmt.

Bei harmonischer Erregung läßt sich die Zeitfunktion von den komplexen Amplitudenfaktoren trennen und muß außerdem für Spannungen und Verzerrungen identisch sein, also lauten die Ansätze

$$\sigma_{ik} = \hat{\sigma}_{ik} e^{i\Omega t} \quad (3.185)$$

$$\varepsilon_{ik} = \hat{\varepsilon}_{ik} e^{i\Omega t}. \quad (3.186)$$

Setzt man diese in (3.182) ein, wird daraus

$$\hat{\sigma}_{ik} + (1 + i\Omega\zeta)\hat{\sigma}_{ik} = 3K\hat{e}_{ik} + 2(G + i\Omega\eta)\hat{e}_{ik}. \quad (3.187)$$

Durch Vergleich mit dem formalen Zusammenhang

$$\hat{\sigma}_{ik} = 3\hat{K}\hat{e}_{ik} \quad (3.188)$$

$$\hat{\sigma}_{ik} = 2\hat{G}\hat{e}_{ik}. \quad (3.189)$$

erkennt man, daß

$$\hat{K} = K \quad (3.190)$$

$$\hat{G} = \frac{G + i\Omega\eta}{1 + i\Omega\zeta} = \frac{G + \eta\zeta\Omega^2}{1 + \zeta^2\Omega^2} + i\frac{(\eta - G\zeta)\Omega}{1 + \zeta^2\Omega^2}. \quad (3.191)$$

\hat{K} und \hat{G} sind dabei der komplexe Kompressions- bzw. Schubmodul; beide sind im allgemeinen frequenzabhängig. Sie werden auch *Übertragungsfunktionen* genannt; ihre Realteile werden häufig als *Speichermoduli*, ihre Imaginärteile als *Verlustmoduli* bezeichnet.

$$\hat{K} = K' + iK'' \quad (3.192)$$

$$\hat{G} = G' + iG'' \quad (3.193)$$

Für das gewählte Modell haben diese Moduli also das folgende Aussehen

$$K' = K \quad (3.194)$$

$$K'' = 0 \quad (3.195)$$

$$G' = \frac{G + \eta\zeta\Omega^2}{1 + \zeta^2\Omega^2} \quad (3.196)$$

$$G'' = \frac{(\eta - G\zeta)\Omega}{1 + \zeta^2\Omega^2} \quad (3.197)$$

bzw. gilt mit den dimensionslosen Größen (3.277) und (3.278) aus Kapitel 3.4.7.1

$$\overline{\hat{K}} = \frac{2}{3}\overline{G}\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (3.198)$$

$$\overline{\hat{G}} = \frac{\overline{G} + \overline{\eta}\overline{\zeta}}{1 + \overline{\zeta}^2} + i\frac{\overline{\eta} - \overline{G}\overline{\zeta}}{1 + \overline{\zeta}^2} \quad (3.199)$$

Oft wird das Verhältnis

$$\frac{G''}{G'} = \tan \varphi \quad (3.200)$$

genannt mit φ als dem Phasenwinkel zwischen Kraft- und Verformungsamplitude, somit ist

$$\dot{G} = G'(1 + i \tan \varphi). \quad (3.201)$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß G' hier nicht wie bei der alleinigen Verwendung des VOIGT-KELVIN-Modells mit dem HOOKEschen Schubmodul identisch ist; dieser kann höchstens in erster Näherung dafür gleichgesetzt werden. Nur für $\eta = G \cdot \zeta$ wäre auch hier $G' = G$.

In der baugrunddynamischen Literatur, z.B. [30] oder [60], werden häufig die komplexen Moduli zuerst allgemein eingeführt. Danach werden die Auswirkungen zweier verschiedener Dämpfungsarten getrennt untersucht, d.h. es werden für die Imaginärteile der Moduli Ansätze gemacht.

Dies soll am Beispiel des komplexen Schubmoduls (3.193) gezeigt werden: *Viskose* Dämpfung liegt dann vor, wenn G'' linear von der Erregerfrequenz Ω abhängt, also mit der Proportionalitätskonstante \tilde{G} ("viskoser" Schubmodul)

$$G'' = \Omega \tilde{G}. \quad (3.202)$$

Dieser sogenannte *zeitaktivierte* Mechanismus entspricht der Verwendung des VOIGT-KELVIN-Modells und bewirkt, daß bei Sinuserregung die dissipierte Energie pro Zyklus proportional der Frequenz ist.

Im Gegensatz dazu ist bei der *hysteretischen* Dämpfung G'' unabhängig von Ω , etwa

$$G'' = 2\beta_G G', \quad (3.203)$$

wobei β_G die Materialdämpfung bei Gestaltänderung darstellt. Bei diesem sogenannten *verformungsaktivierten* Mechanismus ist die dissipierte Energie nur noch von der Zyklenzahl abhängig, aber nicht von der Erregerfrequenz.

3.4.3 Bemerkungen zur Dämpfung

Beide stoffspezifische Dämpfungsarten treffen im Boden aber nur in begrenzten Frequenzbereichen zu.

Daher schlagen verschiedene Autoren vor, eine Kombination beider zu verwenden. Beispielsweise enthält das Computerprogramm FLUSH [58], das in Berkeley am dortigen

Erdbebeninstitut der Universität zur Analyse der Boden-Bauwerks-Wechselwirkung entwickelt wurde, folgenden Ausdruck für den komplexen Schubmodul

$$\hat{G} = G(1 - 2\beta_G^2 + i2\beta_G\sqrt{1 - \beta_G^2}), \quad (3.204)$$

der auch einfacher geschrieben werden könnte

$$\hat{G} = Ge^{i2\gamma} \quad (3.205)$$

mit

$$\beta_G = \sin \gamma, \quad (3.206)$$

und verwendet zusätzlich viskose Ränder.

Bei dem beschriebenen Vorgehen wird allerdings der nichtlineare Charakter der hysteretischen Dämpfung nicht beachtet. LAZAN wies bereits 1959 auf dem Kolloquium "Structural Damping" [52] darauf hin, daß die komplexe Methode nicht auf Materialien mit Strukturdämpfung anwendbar sei. Er schlug vor, Energieeinheiten wie z.B. die Dämpfungsenergie zu verwenden, da diese für beide Arten definiert werden können. Allerdings räumte er ein, daß für kleine Dämpfungen eine äquivalente viskose Dämpfung (mit Vorsicht) benutzt werden könnte. THOMSON zeigt in [28], wie dieses Äquivalent für einige Dämpfungsarten im interessierenden Resonanzbereich ermittelt wird.

Beim gewählten Modell LStvK ist die Abhängigkeit der Dämpfung von der Frequenz gebrochen rational, also weder viskos noch hysteretisch. Der qualitative Verlauf ist in *Bild 14* dargestellt. Dieser Verlauf paßt mit den mir bekannten Literaturaussagen über das Verhalten des Bodens bei Schwingungen zusammen.

Im *stationären* Fall wird die durch Erregung zugeführte Energie gerade durch die (Gesamt-)Dämpfung verbraucht, die Summe aus sich austauschender Feder- und kinetischer Energie bleibt erhalten (siehe hierzu auch Kapitel 5).

Unter Dämpfung (Energiedissipation) fällt hierbei sowohl die *Werkstoff-* oder *innere* Dämpfung, also die Umsetzung in z.B. Wärme oder Schall, als auch die *Abstrahlungs-* oder geometrische "Dämpfung" durch die Wellenabstrahlung in alle Richtungen.

Beim Baugrund ist die Werkstoffdämpfung im allgemeinen klein gegenüber der Abstrahlungsdämpfung und hängt unter anderem ab von den in Kapitel 2.1.3 für den dynamischen Schubmodul genannten Bedingungen (siehe auch [35]).

Die Abstrahlungsdämpfung kann ein Vielfaches der Materialdämpfung betragen. Sie hängt außer von der Geländegeometrie noch ab von

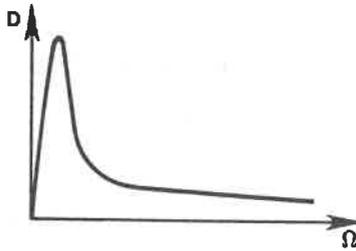


Bild 14: Dämpfung beim Modell LStvK

- Abmessungen, Form und Steifigkeit der Lasteintragsplatte,
- Erregerfrequenz,
- Erregermodus (vertikal, horizontal, Kippen oder Torsion).

Um einen Eindruck von der Größenordnung zu vermitteln, entnehme ich der Literatur [89] den gemessenen Wert der Gesamtdämpfung bei $B_z = 1$ (nach (3.78)) und $\nu = 0,25$ zu $D = 40\%$, wovon etwa ein Zehntel auf die Materialdämpfung entfällt.

Diese Gesamtdämpfung des Kontinuums ist dabei unter bestimmten Voraussetzungen einem ersetzenden linearen Dämpfungsmaß zuordenbar. Häufig geschieht dies auch nur mit der Werkstoffdämpfung; siehe dazu die Anmerkung am Schluß dieses Kapitels.

Die Annahme eines *linearen* Dämpfungsmaßes ist gerechtfertigt, da im betrachteten stationären Zustand auch gedämpfte Systeme periodische Schwingungen ausführen.

Zur Berechnung von D wird (wie z.B. im verwendeten Frequenzanalysator) die charakteristische Bewegung des Systems (je nach Modus) als die eindimensionale Bewegung des gedämpften Einmassenschwingers mit harmonischer Erregung aufgefaßt.

Im folgenden werden nur die verschiedenen Dämpfungsmaße eingeführt; als Vergleichsrechnung für den Versuch wird in Kapitel 4 das näherliegende System "Masse auf eindimensionalem LStvK" behandelt.

Das in *Bild 2 a* vorgestellte Modell kann bei harmonischer Erregung mit folgender Differentialgleichung beschrieben werden, anhand deren verschiedener Schreibweisen die Begriffe erläutert werden:

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = F e^{i\Omega t} \quad (3.207)$$

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \frac{c}{m}z = \frac{F}{m} e^{i\Omega t} \quad (3.208)$$

$$\ddot{z} + 2D\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m} e^{i\Omega t} \quad (3.209)$$

mit m = Masse, k = Dämpfungskoeffizient, c = Federkonstante, F = Erregerkraftamplitude, Ω = Erregerkreisfrequenz,

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad (3.210)$$

Abklingkoeffizient,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (3.211)$$

Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems,

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{k}{2\omega_0 m} = \frac{k}{2\sqrt{cm}} = \frac{\omega_0 k}{2c} = \frac{1}{4\pi} \cdot \psi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Delta W}{W} \quad (3.212)$$

LEHRsches Dämpfungsmaß bzw. Anteil der kritischen Dämpfung, ψ = Dämpfungskapazität, ΔW = Dämpfungsarbeit, W = Gesamtarbeit.

Die Dämpfung D kann unter anderem über einen *Ausschwingversuch*, über die Messung des *Phasen(verschiebungs)winkels* φ , über die sogenannte *Halbwertsbreite* (*Bild 9*) oder über die *Hystereseschleife* (*Bild 4 b*) ermittelt werden.

Aus dem Diagramm des Ausschwingversuchs (*Bild 15*) läßt sich das sogenannte *logarithmische Dekrement* ermitteln zu

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}. \quad (3.213)$$

Es ist mit den anderen Dämpfungsgrößen wie folgt verknüpft

$$\Lambda = \frac{2\pi\delta}{\omega_D} = \frac{2\pi D\omega_0}{\omega_D} = \frac{\psi}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_D} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{\pi k}{m\omega_D} = 2\pi \tan \Phi \quad (3.214)$$

mit Φ = Dämpfungswinkel und

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad (3.215)$$

Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems.

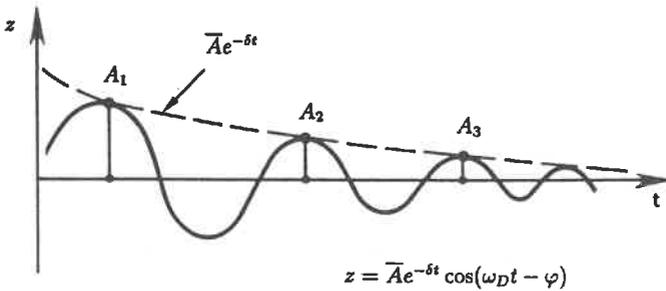


Bild 15: Diagramm des Ausschwingversuchs

Für kleine Dämpfungen gilt $\sqrt{1 - D^2} \approx 1$ und damit

$$\Lambda \approx 2\pi D = \frac{\psi}{2}, \quad (3.216)$$

also

$$D \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (3.217)$$

und

$$D = \sin \Phi \approx \tan \Phi \approx \Phi. \quad (3.218)$$

Mit dem Phasenwinkel φ hängt die Dämpfung D wie folgt zusammen: Im Resonanzfall ist $\Omega = \omega_R$, wobei im gedämpften System die Kreisfrequenz bei Resonanz

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2} \quad (3.219)$$

aber nicht gleich der Eigenkreisfrequenz ω_D ist.

Damit ist

$$\tan \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{2\delta\omega_R}{\omega_0^2 - \omega_R^2} = \frac{2\delta\omega_R}{2\delta^2} = \frac{\omega_R}{\delta} = \frac{\omega_R}{D\omega_0} \quad (3.220)$$

$$D = \frac{\omega_R}{\omega_0 \tan \varphi} \approx \frac{1}{\tan \varphi}. \quad (3.221)$$

Zu einem anderen Ergebnis kommt man, wenn man D mit β_G identifiziert (wie z.B. in [60]; β_G ist aber lediglich die hysteretische Materialdämpfung bei Distortion!).

Es ergibt sich wegen $2 \beta_G = \tan \varphi$

$$D = \frac{1}{2} \tan \varphi. \quad (3.222)$$

(3.221) und (3.222) widersprechen anscheinend dem häufig in der Literatur angegebenen Wert

$$D \approx \tan \varphi, \quad (3.223)$$

der sich nur ergibt, wenn man z.B. im VOIGT-KELVIN-Modell D mit $\omega \bar{G}/G$ identifiziert.

Anscheinend besteht hier eine verbreitete Verwechslung des *Phasenwinkels* φ mit dem *Dämpfungswinkel* Φ zwischen ungedämpfter und gedämpfter Eigenkreisfrequenz.

Diese beiden Winkel hängen beim Einmassenschwinger zusammen. Aus (3.218) und (3.221) folgt

$$\tan \Phi \cdot \tan \varphi = 1. \quad (3.224)$$

Über die Halbwertsbreite ergibt sich aus dem Leistungsspektrum (siehe *Bild 9*)

$$\delta = \frac{1}{2} \Delta \omega = \frac{1}{2} (\omega_{\text{oben}} - \omega_{\text{unten}}) \quad (3.225)$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} (\omega_{\text{oben}} + \omega_{\text{unten}}) \quad (3.226)$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \approx \frac{\omega_{\text{oben}} - \omega_{\text{unten}}}{\omega_{\text{oben}} + \omega_{\text{unten}}} \quad (3.227)$$

Weitere Zusammenhänge der verschiedenen Dämpfungsgrößen siehe z.B. [12],[78].

Berechnet man diese so definierte Dämpfung D für das Modell LStvK, erhält man

$$D = \frac{1}{2} \tan \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{G''}{G'} = \frac{(\eta - G\zeta)\Omega}{2(G + \eta\zeta\Omega^2)} \quad (3.228)$$

bzw. mit den später in Kapitel 3.4.7.1 einzuführenden dimensionslosen Parametern $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$

$$D = \frac{\bar{\eta} - \bar{G}\bar{\zeta}}{2(\bar{G} + \bar{\eta}\bar{\zeta})}. \quad (3.229)$$

Daraus ließe sich z.B. bei vorher bestimmten G und η sowie bei bekanntem Ω und errechnetem D die Größe ζ bestimmen zu

$$\zeta = \frac{\eta\Omega - 2GD}{\Omega(2D\eta\Omega + G)} \quad (3.230)$$

bzw. dimensionslos

$$\bar{\zeta} = \frac{\bar{\eta} - 2\bar{G}D}{2D\bar{\eta} + \bar{G}} \quad (3.231)$$

Diese Methode wird von mir jedoch nicht angewandt.

Es sei nochmal darauf hingewiesen, daß dieser Wert und daraus abgeleitete Größen nur *lokale* Gültigkeit haben, für den Meßort aber sämtliche Einflüsse berücksichtigen, wenn man das LEHRsche Dämpfungsmaß mit der Gesamtdämpfung identifiziert.

Anmerkung: Sowohl der Begriff "Dämpfung" alleine als auch die Bezeichnung "*D*" werden in der Literatur (und auch von mir!) für verschiedene Inhalte verwendet, und zwar für

- Werkstoffdämpfung,
- Gesamtdämpfung (Summe aus Werkstoff- und geometrischer Dämpfung),
- LEHRsches Dämpfungsmaß (Definition am Einmassenschwinger).

Verstärkt werden die Schwierigkeiten bei der Verwendung der Begriffe dadurch, daß bei allen bisher üblichen Versuchen zur Bestimmung der Dämpfung Werkstoff- und Systemeinflüsse gemischt wirken, so daß der Wunsch nach einer im Versuch ermittelbaren *systemunabhängigen* Größe nicht erfüllt werden kann.

Eine Lösung scheint nur teilweise in Sicht zu sein: Der Arbeitskreis "Baugrunddynamik" schlägt die Verwendung der Dämpfungskapazität ψ vor. Bis sich diese Größe allgemein durchsetzt, sollte man jeweils verdeutlichen, welches *D* gerade gemeint ist.

3.4.4 Dynamische Querdehnzahl

Nach der Definition von \hat{G} (mit *D*) fehlt zur Anwendung in der Praxis nur noch die Querdehnzahl ν .

Im vorliegenden viskoelastischen Fall ist diese selbstverständlich ebenfalls eine komplexe Größe.

Die aus der Messung von Wellenlaufzeiten errechnete Querdehnzahl wird zwar häufig (u.a. in [36]) "dynamisch" genannt, sie wird aber unter der Voraussetzung eines homoge-

nen elastischen Mediums (ohne Dämpfung!) aus den Geschwindigkeiten der Scherwelle

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.232)$$

und der (isothermen) Kompressionswelle

$$c_p = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.233)$$

errechnet:

$$\nu = \frac{c_p^2 - 2c_s^2}{2(c_p^2 - c_s^2)}. \quad (3.234)$$

Diese Berechnung liefert eine Querdehnzahl, die frequenzunabhängig und daher gleich der statischen Querdehnzahl ist. Sie ist somit rein reell und stellt bestenfalls den Realteil der komplexen Querdehnzahl $\hat{\nu}$ dar.

Definiert man den Zusammenhang der komplexen Größen \hat{K} , \hat{G} und $\hat{\nu}$ analog (3.183), z.B. wie [28]:

$$1 - 2\hat{\nu} = \frac{3\hat{G}}{3\hat{K} + \hat{G}} \quad (3.235)$$

und setzt (3.192) bis (3.197) ein, so erhält man

$$\hat{\nu} = \frac{3K' - 2G' - i2G''}{6K' + 2G' + i2G''} = \frac{(3/2K - G') - iG''}{(3K + G') + iG''} \quad (3.236)$$

und weiter für den LStvK den unhandlichen Ausdruck

$$\hat{\nu} = \frac{[G \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1 + \zeta^2 \Omega^2) - (G + \eta \zeta \Omega^2)] - i[(\eta - G\zeta)\Omega]}{[2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1 + \zeta^2 \Omega^2) + (G + \eta \zeta \Omega^2)] + i[(\eta - G\zeta)\Omega]} \quad (3.237)$$

bzw. wiederum mit den dimensionslosen Größen

$$\hat{\nu} = \frac{[\bar{G} \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1 + \bar{\zeta}^2) - (\bar{G} + \bar{\eta} \bar{\zeta})] - i(\bar{\eta} - \bar{G} \bar{\zeta})}{[2\bar{G} \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1 + \bar{\zeta}^2) + (\bar{G} + \bar{\eta} \bar{\zeta})] + i(\bar{\eta} - \bar{G} \bar{\zeta})}. \quad (3.238)$$

Berücksichtigt man, daß sich die Querdehnzahl in den meisten Böden im Bereich von $\nu = 0,25$ bis $\nu = 0,49$ bewegt, und daß der Imaginärteil von $\hat{\nu}$ keine unmittelbare physikalische Meßgröße ist, dann erscheint die Verwendung des obigen Ausdrucks als nicht angemessen.

Statt dessen kann (zumindest in erster Näherung) die komplexe Querdehnzahl gleich der statischen gesetzt werden

$$\hat{\nu} = \nu, \quad (3.239)$$

obwohl dies streng genommen einen Widerspruch zu der getroffenen Annahme (3.181) darstellt, aus der folgte

$$\hat{K} = K. \quad (3.240)$$

In theoretischen Untersuchungen werden manchmal noch weitere komplexe Größen definiert, z.B. in [30] und [60]. Diese komplexen Wellengeschwindigkeiten, Verschiebungen, Kriech- und Relaxationsfunktionen tragen meines Erachtens zum Verständnis der Vorgänge bei Erregung des Bodens wenig bei, da sie alle ohne physikalisches Äquivalent sind. Deshalb wird hier auf deren Einführung verzichtet.

3.4.5 LAPLACE-Transformation

Wie in der Einleitung zu Kapitel 3.4.2 erwähnt, wird nun die LAPLACE-Transformation als Hilfsmittel eingeführt.

Ihr Vorteil liegt darin, daß mit ihrer Hilfe die lineare Viskoelastizität über das sogenannte *Korrespondenzprinzip* wie die lineare Elastizität behandelt werden kann.

Hierzu werden die Feldgleichungen inklusive der Anfangs- und Randwerte in den (LAPLACE-)Bildraum transformiert und dort gelöst. Das Ergebnis muß dann wieder in den Originalraum rücktransformiert werden, wobei im allgemeinen die größten Probleme entstehen.

Im folgenden werden nur die wichtigsten Regeln bei ihrer Anwendung wiedergegeben. Nähere Ausführungen siehe vor allem bei DOETSCH (je nach Anforderung [21],[22] oder [23]).

Die Transformationsvorschrift lautet

$$f^*(s) = \mathcal{L}f(t) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.241)$$

mit $f(t)$ = Originalfunktion und $f^*(s)$ = Bildfunktion.

Die Rücktransformation ist formal durch

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} f^*(s) \quad (3.242)$$

gegeben.

Bei beidseitiger Anwendung der *Rekursionsformel*

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = - \sum_{i=1}^n f^{(n-i)}(+0)s^{(i-1)} + s^n f^*(s) \quad (3.243)$$

auf den **LStvK** (92 a) erhält man

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ik}^* + \overset{\circ}{\sigma}_{ik}^* - \zeta \overset{\circ}{\sigma}_{ik}^*(+0) + \zeta s \overset{\circ}{\sigma}_{ik}^* = 3K \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^* + 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^* - 2\eta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^*(+0) + 2\eta s \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^*, \quad (3.244)$$

was sich auch schreiben läßt als

$$\sigma_{ik}^* = \overset{\circ}{E}^* \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^* + \overset{\circ}{E}^* \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^* + \text{Anfangswerte}, \quad (3.245)$$

womit die Analogie zum HOOKEschen Gesetz (ohne Sterne) deutlich wird. Dabei sind

$$\overset{\circ}{E}^* = 3K \quad (3.246)$$

$$\overset{\circ}{E}^* = \frac{2(G + \eta s)}{1 + \zeta s} \quad (3.247)$$

und die

$$\text{Anfangswerte} = \frac{1}{1 + \zeta s} [\zeta \overset{\circ}{\sigma}_{ik}^*(+0) - 2\eta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}^*(+0)]. \quad (3.248)$$

Nach Umschreiben sowie unter Anwendung des *Dämpfungssatzes*

$$\mathcal{L}^{-1} f^*(s + a) = e^{-at} f(t) \quad (3.249)$$

(a beliebig komplex) und des *Faltungssatzes*

$$\mathcal{L}^{-1}\{f_1^*(s) \cdot f_2^*(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (3.250)$$

("*" = "gefaltet mit")

erhält man für den **LStvK**

$$\sigma_{ik} = (3K \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + 2\frac{\eta}{\zeta} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}) + 2\frac{G\zeta - \eta}{\zeta^2} \int_0^t e^{-\frac{\zeta}{2}\tau} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}(t - \tau) d\tau + [\overset{\circ}{\sigma}_{ik}(+0) - 2\frac{\eta}{\zeta} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}(+0)] e^{-\frac{\zeta}{2}t}. \quad (3.251)$$

Dies ist eine zu (3.182) bzw. (3.184) alternative Darstellung des hier verwendeten Modells.

Der Term

$$[\overset{\circ}{\sigma}_{ik}(+0) - 2\frac{\eta}{\zeta} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik}(+0)]$$

bezeichnet den *Geburtszustand*, der infolge des Faktors $e^{-\frac{t}{\zeta}}$ mit der Zeit an Einfluß abnimmt und daher für den im Versuch angenommenen eingeschwungenen Zustand verschwindet, es bleibt

$$\sigma_{ik} = (3K \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + 2\frac{\eta}{\zeta}\dot{\varepsilon}_{ik}) + 2\frac{G\zeta - \eta}{\zeta^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\zeta}} \dot{\varepsilon}_{ik}(t-\tau) d\tau. \quad (3.252)$$

Der Term

$$(3K \overset{\circ}{\varepsilon}_{ik} + 2\frac{\eta}{\zeta}\dot{\varepsilon}_{ik})$$

wird als *instantane Elastizität* bezeichnet, das Integral

$$\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\zeta}} \dot{\varepsilon}_{ik}(t-\tau) d\tau$$

repräsentiert in dem gewählten Stoffgesetz die aufgelaufene *Verzerrungsgeschichte*, bei der ebenfalls weiter zurückliegende Ereignisse von geringerem Einfluß sind als zeitlich nähere ("fading memory").

Diese Darstellung läßt sich hier allerdings nicht zur Weiterbearbeitung verwenden, da die auftretende Verzerrungsgeschichte des Deviators $\dot{\varepsilon}_{ik}(t-\tau)$ unbekannt ist, weil kein weggesteuerter Versuch vorliegt.

3.4.6 Korrespondenzprinzip

Das Korrespondenzprinzip wird in der folgenden Version angewandt (siehe z.B. [29]):

Ist die Lösung eines elastischen Problems bekannt, kann die LAPLACE-transformierte Lösung des korrespondierenden viskoelastischen Problems gefunden werden, indem die elastischen Konstanten durch die Quotienten der transformierten Operatorpolynome und die tatsächliche Belastung durch ihre LAPLACE-Transformierte ersetzt werden.

Die Lösung des viskoelastischen Problems erhält man dann durch Rücktransformation.

Die Operatoren in (3.162) lauten für den LStvK

$$\overset{\circ}{P} = 1 \quad (3.253)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{P}} = 1 + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.254)$$

$$\dot{Q} = 3K \quad (3.255)$$

$$\ddot{Q} = 2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.256)$$

ihre LAPLACE-Transformierten sind dann

$$\mathcal{L} \dot{P} = \dot{P}^* = 1 \quad (3.257)$$

$$\mathcal{L} \ddot{P} = \ddot{P}^* = 1 + \zeta s \quad (3.258)$$

$$\mathcal{L} \dot{Q} = \dot{Q}^* = 3K \quad (3.259)$$

$$\mathcal{L} \ddot{Q} = \ddot{Q}^* = 2(G + \eta s). \quad (3.260)$$

Die nach [29] daraus gebildeten Operatorpolynome ergeben formal die transformierten Konstanten

$$K^* = \frac{\dot{Q}^*}{3 \dot{P}^*} = \frac{2}{3} G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (3.261)$$

$$G^* = \frac{\ddot{Q}^*}{2 \ddot{P}^*} = \frac{G + \eta s}{1 + \zeta s} \quad (3.262)$$

$$\nu^* = \frac{\dot{Q}^* \ddot{P}^* - \dot{P}^* \ddot{Q}^*}{2 \dot{Q}^* \ddot{P}^* + \dot{P}^* \ddot{Q}^*} = \frac{G(1 + \nu)(1 + \zeta s) - (1 - 2\nu)(G + \eta s)}{2G(1 + \nu)(1 + \zeta s) + (1 - 2\nu)(G + \eta s)} \quad (3.263)$$

bzw. in dimensionsloser Schreibweise

$$\overline{K^*} = \frac{2}{3} \overline{G} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (3.264)$$

$$\overline{G^*} = \frac{\overline{G} + \overline{\eta s}}{1 + \overline{\zeta s}} \quad (3.265)$$

$$\nu^* = \frac{\overline{G}(1 + \nu)(1 + \overline{\zeta s}) - (1 - 2\nu)(\overline{G} + \overline{\eta s})}{2\overline{G}(1 + \nu)(1 + \overline{\zeta s}) + (1 - 2\nu)(\overline{G} + \overline{\eta s})} \quad (3.266)$$

Vergleicht man (3.261) mit (3.190) und (3.183) bzw. (3.262) mit (3.191), so wird deutlich, daß die komplexen Moduli eng mit diesen transformierten Konstanten zusammenhängen (statt $i\Omega$ steht hier s) und damit im stationären Fall auch die beiden Methoden (komplexe Moduli und LAPLACE-Transformation).

Der Vergleich von ν^* (3.266) und $\hat{\nu}$ (3.238) zeigt aber auch, daß ein paralleles Bearbeiten beider Methoden bei speziellen Ergebnissen die Möglichkeit bietet, den bequemeren Ausdruck für weitere Berechnungen zu verwenden.

3.4.7 Lösung für die viskoelastische Schicht

3.4.7.1 Lösung im Bildraum

Setzt man in die Bewegungsgleichungen (3.7) und (3.8) des homogenen elastischen Kontinuums im rotationssymmetrischen Fall den LStvK ein und führt dann die LAPLACE-Transformation durch, erhält man

$$\rho s^2 u_r^* - \frac{1}{3} \left(2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} + \frac{G+\eta s}{1+\zeta s} \right) \Theta_{,r}^* - \frac{G+\eta s}{1+\zeta s} \left(\Delta u_r^* - \frac{u_r^*}{r^2} \right) = 0 \quad (3.267)$$

$$\rho s^2 u_z^* - \frac{1}{3} \left(2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} + \frac{G+\eta s}{1+\zeta s} \right) \Theta_{,z}^* - \frac{G+\eta s}{1+\zeta s} \Delta u_z^* = 0. \quad (3.268)$$

Die Randbedingungen lauten LAPLACE-transformiert

$$\sigma_{zz}^*(z=0) = \begin{cases} -\frac{F}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}} \cdot \frac{1}{s-i\Omega} & : 0 \leq r \leq a \\ 0 & : r > a \end{cases} \quad (3.269)$$

$$\sigma_{rz}^*(z=0) = 0 \quad (3.270)$$

$$u_r^*(z=d) = 0 \quad (3.271)$$

$$u_z^*(z=0) = 0. \quad (3.272)$$

Wird das Korrespondenzprinzip in der dargelegten Form angewandt, müssen die elastischen Konstanten in der Lösung (3.109) bzw. (3.112) mit (3.118) und (3.119) ersetzt werden, also G durch G^* (3.262) und ν durch ν^* (3.266), das heißt τ^2 durch

$$\tau^{2*} = \frac{3(1-2\nu)(G+\eta s)}{2[G(1+\nu)(1+\zeta s) + 2(1-2\nu)(G+\eta s)]} \quad (3.273)$$

Neben den in Kapitel 3.3.4.3 aufgezählten Größen benötigt man für die viskoelastische Lösung außerdem

		Variable	Dimension
s	LAPLACE-Variable		T^{-1} (hier)
η	Scherviskosität (= dynamische Zähigkeit bei kleinen Verformungen)	Parameter	$KT L^{-2} = ML^{-1}T^{-1}$
ζ	"Spannungsviskosität" (von mir so genannt, weil er im Stoffgesetz bei den Spannungen steht).	Parameter	T

Auch diese Größen werden durch Bezug auf die gewählten Grundgrößen a , Ω und m_0 dimensionslos gemacht:

$$\bar{s} = s\Omega^{-1} \quad (3.274)$$

$$\bar{\eta} = \eta m_0^{-1} a \Omega^{-1} = \eta a^2 m_0^{-1} r_0^{-1} \Omega^{-1} = \eta a^2 \Omega F^{-1} \quad (3.275)$$

$$\bar{\zeta} = \zeta \Omega \quad (3.276)$$

Bildet man analog zum elastischen Fall auch hier zusammengesetzte Bezugsgrößen, so erhält man zusätzlich zu den Größen in Kapitel 3.3.4.3

$$\bar{G}^* = G^* \frac{a^2}{m_0 r_0 \Omega^2} = \frac{(G + \eta s)a^2}{(1 + \zeta s)m_0 r_0 \Omega^2} = \frac{\bar{G} + \bar{\eta} \bar{s}}{1 + \bar{\zeta} \bar{s}} \quad (3.277)$$

$$\tau^{2*} = \frac{3(1 - 2\nu)(\bar{G} + \bar{\eta} \bar{s})}{2[\bar{G}(1 + \nu)(1 + \bar{\zeta} \bar{s}) + 2(1 - 2\nu)(\bar{G} + \bar{\eta} \bar{s})]} = \frac{3\tau^2}{\frac{\bar{G}}{G^*}(3 - 4\tau^2) + 4\tau^2} \quad (3.278)$$

$$\bar{a}_0^* = a\Omega \sqrt{\frac{\rho}{G^*}} = a\Omega \sqrt{\frac{\rho(1 + \zeta s)}{G + \eta s}} = a_0 \sqrt{\frac{(1 + \bar{\zeta} \bar{s})\bar{G}}{\bar{G} + \bar{\eta} \bar{s}}} = a_0 \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{G}^*}} \quad (3.279)$$

Wie man leicht zeigen kann, sind hierin die elastischen Parameter \bar{G} , τ^2 und a_0 für $\bar{\eta} = \bar{\zeta} = 0$ eingeschlossen.

Die Transformation von $e^{i\bar{s}}$ lautet

$$\mathcal{L}\{e^{i\bar{s}}\} = \frac{1}{\bar{s} - i} \quad (3.280)$$

Setzt man alle Größen in die dimensionslose elastische Lösung (3.109) ein und multipliziert mit Ω , so ergibt sich die dimensionslose viskoelastische Lösung im Bildraum für den gewichteten Mittelwert unter der Platte zu

$$\bar{u}_{z_m}^*(\bar{s}) = \frac{1}{8\bar{G}^*(\bar{s} - i)} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(\bar{a}_0^* \varphi) Z^*(\varphi, \bar{s})}{\bar{a}_0^* \varphi N^*(\varphi, \bar{s})} d\varphi - i \sum_n \frac{\sin^2(\bar{a}_0^* \varphi_n) Z^*(\varphi_n, \bar{s})}{\bar{a}_0^* \varphi_n N'^*(\varphi_n, \bar{s})} \right]. \quad (3.281)$$

Für $Z^*(\varphi, \bar{s})$, $N^*(\varphi, \bar{s})$, $Z^*(\varphi_n, \bar{s})$ und $N'^*(\varphi_n, \bar{s})$ werden in (3.95), (3.96) und (3.106) jeweils die Größen τ^2 und a_0 durch τ^{2*} und \bar{a}_0^* ersetzt. Damit werden diese Funktionen abhängig von \bar{s} , also auch das Integral und die Summe in (3.281).

Die mittlere dimensionslose Verschiebung unter der Platte auf der viskoelastischen Schicht wird im Bildraum in der Form wie (3.110) zu

$$\bar{u}_{z_m}^* = \frac{1}{\bar{G}^*(\bar{s} - i)} (f_1^* + i f_2^*) \quad (3.282)$$

mit den Funktionen

$$f_1^*(\bar{s}) = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(\bar{a}_0^* \varphi) Z^*(\varphi, \bar{s})}{\bar{a}_0^* \varphi N^*(\varphi, \bar{s})} d\varphi \quad (3.283)$$

$$f_2^*(\bar{s}) = -\frac{1}{8} \sum_n \frac{\sin^2(\bar{a}_0^* \varphi_n) Z^*(\varphi_n, \bar{s})}{\bar{a}_0^* \varphi_n N'^*(\varphi_n, \bar{s})} \quad (3.284)$$

Die Lösung ist in dieser Form noch nicht interpretierbar.

3.4.7.2 Rücktransformation der Lösung in den Originalraum

Der Realteil aus der Rücktransformation dieser Lösung (3.281) in den Originalraum ergibt dann die gesuchte Lösung für die viskoelastische Schicht. Formal ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\overline{u_{zm}^*}(\bar{s})\} &= \Omega \cdot \overline{u_{zm}}(\bar{t}) \\ &= \Omega \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{i\bar{s}\bar{t}} \overline{u_{zm}^*} d\bar{s} = \begin{cases} F(\bar{t}) & \bar{t} \geq 0 \\ 0 & \bar{t} < 0 \end{cases} \quad (3.285) \end{aligned}$$

(x ist die Abszisse in der Halbebene absoluter Konvergenz).

Dieser formale Zusammenhang ist im allgemeinen für die Anwendung wenig geeignet. Meist werden zunächst so weit wie möglich die sogenannten Korrespondenztabelle (z.B. von DOETSCH [22]) verwendet. Aus diesen können zu gegebenen Funktionen im Bildraum die zugehörigen Funktionen im Originalraum entnommen werden.

Hierzu wird (3.282) geschrieben

$$\overline{u_{zm}^*}(\bar{s}) = f_3^*(\bar{s}) [f_1^*(\bar{s}) + i f_2^*(\bar{s})] \quad (3.286)$$

mit

$$f_3^*(\bar{s}) = \frac{1}{G^*(\bar{s} - i)} = \frac{1 + \bar{\zeta}\bar{s}}{(\bar{G} + \bar{\eta}\bar{s})(\bar{s} - i)} \quad (3.287)$$

Bei Anwendung des Faltungssatzes (3.250) erhält man

$$\begin{aligned}
 \overline{u_{z_{mv}}}(t) &= \frac{1}{\Omega} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\overline{u_{z_m}^*}(\bar{s})\} = \frac{1}{\Omega} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{f_3^*(f_1^* + i f_2^*)\} \\
 &= \frac{1}{\Omega} [\mathcal{L}^{-1}\{f_1^* f_3^*\} + i \mathcal{L}^{-1}\{f_2^* f_3^*\}] \\
 &= \frac{1}{\Omega} \left[\int_0^{\bar{t}} f_1(\tau) f_3(\bar{t} - \tau) d\tau + i \int_0^{\bar{t}} f_2(\tau) f_3(\bar{t} - \tau) d\tau \right] \quad (3.288)
 \end{aligned}$$

mit

$$f_i = \mathcal{L}^{-1}\{f_i^*\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.289)$$

Die Rücktransformation von f_3^* ergibt

$$\begin{aligned}
 f_3(\bar{t}) &= \frac{1}{\overline{G}^2 + \overline{\eta}^2} \left\{ \left[(\overline{G}\bar{\zeta} - \overline{\eta}) \left(\frac{\overline{G}}{\overline{\eta}} e^{-\frac{\overline{G}}{\overline{\eta}}\bar{t}} - \sin \bar{t} \right) + (\overline{G} + \overline{\eta}\bar{\zeta}) \cos \bar{t} \right] \right. \\
 &\quad \left. + i \left[(\overline{G}\bar{\zeta} - \overline{\eta}) \left(-e^{-\frac{\overline{G}}{\overline{\eta}}\bar{t}} + \cos \bar{t} \right) + (\overline{G} + \overline{\eta}\bar{\zeta}) \sin \bar{t} \right] \right\} \quad (3.290)
 \end{aligned}$$

Falls man den gesamten Zeitverlauf der harmonisch erregten viskoelastischen Schicht ermitteln wollte, könnte man z.B. versuchen, mit Hilfe der Korrespondenztabelle die Rücktransformationen von f_1^* und f_2^* zu bilden, was mir wegen der umfangreichen Ausdrücke und wegen des Integrals in f_1^* bzw. der Summe in f_2^* fast unmöglich erscheint. Formal ergibt sich bei der Rücktransformation von f_1^* ein dreifaches Integral (über φ von 0 bis ∞ , über \bar{s} von $-i\infty$ bis $+i\infty$ und über τ von 0 bis \bar{t}).

Im Zusammenhang mit dem geplanten Versuch interessiert jedoch nur der eingeschwungene Zustand, der sich für $t \rightarrow \infty$ einstellt.

3.4.7.3 Aufbereitung der Lösung für die Vergleichsrechnung

Nach DOETSCH [21],[23] erhält man als Lösung der linearen Differentialgleichung bei passiven Systemen (d.h. ohne innere Energiequellen oder -senken) mit der harmonischen sogenannten *Eingangsfunktion* $F(t) = e^{i\Omega t}$ und bei beliebigen, speziell also auch bei verschwindenden Anfangsbedingungen ($Y^{(n)}(0) = 0$ für alle n) für den eingeschwungenen Zustand ($t \rightarrow \infty$)

$$\sum_{n=0}^m C_n Y^{(n)} = F(t) \quad (3.291)$$

die *Ausgangsfunktion*

$$Y_n(t) = q(i\Omega) e^{i\Omega t}, \quad (3.292)$$

weil der restliche Lösungsanteil für $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

Der Frequenzgang $q(i\Omega)$ ergibt sich, wenn man direkt im Bildraum in die Übertragungsfunktion $q(s) = y(s)/f(s)$ [$y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$ und $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$] für $s = i\Omega$ einsetzt, was wesentlich einfacher ist als die Bildung ihrer Rücktransformation. An dieser Stelle wird der Zusammenhang mit den komplexen Moduli wieder deutlich.

Auf die vorliegende Funktion $\overline{u_{zm}^*}$ (3.282) angewandt, erhält man

$$\overline{q}(\overline{s} = i) = \frac{1}{G^*(\overline{s} = i)} [f_1^*(\overline{s} = i) + i f_2^*(\overline{s} = i)] \quad (3.293)$$

und damit

$$\overline{u_{zm,v}}(\overline{t}) = \overline{q}(i) \cdot e^{i\overline{t}}. \quad (3.294)$$

Zerlegt man den Frequenzgang $q(i\Omega)$ in Realteil $u(\Omega)$ (sogenannte *Wirkkomponente*) und Imaginärteil $v(\Omega)$ (sogenannte *Blindkomponente*), kann man die auch experimentell ermittelbare Übergangsfunktion $Y_U(t)$ aus lediglich einem der beiden Teile errechnen, z.B.

$$Y_U(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u(\Omega)}{\Omega} \sin \Omega t d\Omega. \quad (3.295)$$

Mit ihrer Hilfe bekommt man für jede beliebige (!) Eingangsfunktion $F(t)$ die Ausgangsfunktion nach der DUHAMELSchen Formel

$$Y_\Omega(t) = Y'_U(t) * F(t). \quad (3.296)$$

Diese Formel ergibt sich aus der Differentiation der Faltung

$$Y_\Omega(t) = \frac{d}{dt}(Y_U * F) = Y'_U * F + Y_U(0)F(t), \quad (3.297)$$

weil in unserem Fall $Y_U(0) = 0$ ist. $Y'_U(t)$ stellt hierbei die GREENSche Funktion des jeweiligen Problems dar.

Eine andere Möglichkeit zur Ermittlung von $Y_\Omega(t)$ des vorliegenden Problems ergibt sich aus $u(\Omega)$ und $v(\Omega)$ über

$$Y_\Omega(t) = A_0(\Omega) e^{i[\Omega t - \varphi(\Omega)]} \quad (3.298)$$

mit der Amplitude

$$A_0(\Omega) = |q(i\Omega)| = \sqrt{u^2(\Omega) + v^2(\Omega)} \quad (3.299)$$

und der Phasenlage

$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{-v(\Omega)}{u(\Omega)}. \quad (3.300)$$

Der Realteil von $Y_{\Omega}(t)$ ist wiederum die gesuchte Vergleichslösung zum Versuch.

In dimensionsloser Darstellung lauten die benötigten Größen

$$\bar{u}(i) = \operatorname{Re}\{\bar{q}(i)\} \quad (3.301)$$

$$\bar{v}(i) = \operatorname{Im}\{\bar{q}(i)\} \quad (3.302)$$

$$\bar{A}_{0v} = |\bar{q}(i)| = \frac{1}{|\bar{G}^*(i)|} |f_1^*(i) + i f_2^*(i)| \quad (3.303)$$

$$\varphi_v = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\bar{q}\}}{\operatorname{Re}\{\bar{q}\}} = \arctan \frac{f_2^*(i)}{f_1^*(i)} \quad (3.304)$$

$f_1^*(i)$ und $f_2^*(i)$ sind die $|\bar{G}^*|$ -fachen Real- bzw. Imaginärteile der dimensionslosen viskoelastischen Lösung im Bildraum, wenn man $\bar{s} = i$ setzt. Diese Lösung im Bildraum erhält man nach dem Korrespondenzprinzip durch Ersetzen der elastischen Konstanten in der elastischen Lösung, also hier von a_0 , \bar{G} und τ^2 durch \bar{a}_0 , \bar{G}^* und τ^{2*} nach (3.277) bis (3.279).

Zunächst ergibt sich damit \bar{u}_{zm}^* nach (3.281), dann

$$\bar{q}(\bar{s}) = \frac{\bar{u}_{zm}^*}{f(\bar{s})} = \bar{u}_{zm}^* \cdot (\bar{s} - i) = \frac{1}{\bar{G}^*} (f_1^* + i f_2^*) \quad (3.305)$$

mit

$$f(\bar{s}) = \mathcal{L}^{-1}\{F(i)\} \quad (3.306)$$

und damit die viskoelastische Lösung

$$\bar{u}_{zmv} = \frac{e^{i\bar{t}}}{\bar{G}_v} (f_1^* + i f_2^*) = e^{i\bar{t}} \cdot \frac{1}{|\bar{G}_v|} (f_{1v} + i f_{2v}). \quad (3.307)$$

und die für die Weiterbearbeitung relevanten Ergebnisse

$$\operatorname{Re}\{\bar{u}_{zmv}\} = \sqrt{\frac{1 + \bar{\zeta}^2}{\bar{G}^2 + \bar{\eta}^2}} (f_{1v} \cos \bar{t} - f_{2v} \sin \bar{t}) \quad (3.308)$$

$$\bar{A}_{0v} = \frac{1}{|\bar{G}_v|} \sqrt{f_{1v}^2 + f_{2v}^2} = \sqrt{\frac{1 + \bar{\zeta}^2}{\bar{G}^2 + \bar{\eta}^2}} \sqrt{f_{1v}^2 + f_{2v}^2} \quad (3.309)$$

$$\tan \varphi_v = -\frac{f_{2v}}{f_{1v}} \quad (3.310)$$

Die einzelnen Teile darin lauten

$$f_{1v} = \frac{1}{|\overline{G}_v|} [\operatorname{Re}\{\overline{G}_v\} \cdot f_1^* + \operatorname{Im}\{\overline{G}_v\} \cdot f_2^*] \quad (3.311)$$

$$f_{2v} = \frac{1}{|\overline{G}_v|} [\operatorname{Re}\{\overline{G}_v\} \cdot f_2^* - \operatorname{Im}\{\overline{G}_v\} \cdot f_1^*] \quad (3.312)$$

$$\overline{G}_v = \overline{G}^*(\overline{s} = i) = \frac{\overline{G} + i\overline{\eta}}{1 + i\overline{\zeta}} = \frac{\overline{G} + \overline{\eta}\overline{\zeta}}{1 + \overline{\zeta}^2} + i \frac{\overline{\eta} - \overline{G}\overline{\zeta}}{1 + \overline{\zeta}^2} \quad (3.313)$$

$$\frac{1}{|\overline{G}_v|} = \sqrt{\frac{1 + \overline{\zeta}^2}{\overline{G}^2 + \overline{\eta}^2}} \quad (3.314)$$

$$f_1^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(a_{0v}\varphi) Z^*(\varphi, \overline{s} = i)}{a_{0v}\varphi N^*(\varphi, \overline{s} = i)} d\varphi \right. \\ \left. + i \left[-\frac{1}{8} \sum_n \frac{\sin^2(a_{0v}\varphi_n) Z^*(\varphi_n, \overline{s} = i)}{a_{0v}\varphi_n N^{*'}(\varphi_n, \overline{s} = i)} \right] \right\} \quad (3.315)$$

$$f_2^* = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(a_{0v}\varphi) Z^*(\varphi, \overline{s} = i)}{a_{0v}\varphi N^*(\varphi, \overline{s} = i)} d\varphi \right. \\ \left. + i \left[-\frac{1}{8} \sum_n \frac{\sin^2(a_{0v}\varphi_n) Z^*(\varphi_n, \overline{s} = i)}{a_{0v}\varphi_n N^{*'}(\varphi_n, \overline{s} = i)} \right] \right\} \quad (3.316)$$

$$Z^*(\varphi, \overline{s} = i) = (\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} \left[(\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \cdot \sinh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} \cosh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ \left. - \varphi^2 \cosh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} \sinh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.317)$$

$$N^*(\varphi, \overline{s} = i) = 2(\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \\ - (\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \left[(\varphi^2 - \frac{1}{2})^2 + \varphi^4 \right] \\ \cdot \cosh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} \cosh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ + \varphi^2 \left[(\varphi^2 - \tau^{2*})(\varphi^2 - 1) + (\varphi^2 - \frac{1}{2})^2 \right] \\ \cdot \sinh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - \tau^{2*})^{\frac{1}{2}} \sinh a_{0v}\overline{d}(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.318)$$

$$a_{0v} = \overline{a}_0^*(\overline{s} = i) = a_0 \sqrt{\frac{\overline{G}}{\overline{G}^*(\overline{s} = i)}} = a_0 \sqrt{\frac{\overline{G}(1 + i\overline{\zeta})}{\overline{G} + i\overline{\eta}}} \\ = \sqrt{\frac{\overline{G}}{\overline{G}^2 + \overline{\eta}^2}} \cdot \sqrt{(\overline{G} + \overline{\eta}\overline{\zeta}) + i(\overline{G}\overline{\zeta} - \overline{\eta})} \quad (3.319)$$

$$\begin{aligned}\tau_v^2 &= \tau^{2*}(\bar{s} = i) = \frac{3\tau^2}{\frac{\bar{G}}{G^*(\bar{s}=i)}(3 - 4\tau^2) + 4\tau^2} \\ &= \frac{3\tau^2(\bar{G} + i\bar{\eta})}{\bar{G}(1 + i\bar{\zeta})(3 - 4\tau^2) + 4\tau^2(\bar{G} + i\bar{\eta})}.\end{aligned}\quad (3.320)$$

Z^* und N^* ergeben sich aus (3.95) und (3.96).

In dieser Darstellung (3.307) im Originalraum zeigt sich deutlich, daß bei harmonischer Erregung die Antwort des viskoelastischen Systems ebenfalls harmonisch ist, und zwar mit derselben Antwortfrequenz wie die Erregerfrequenz (also wie im elastischen Fall), aber mit gegenüber dem elastischen System veränderter Amplitude und veränderter Phasenlage.

Aus der komplexen Nachgiebigkeit läßt sich auch hier wieder die Impedanz (3.125) berechnen:

$$\hat{I}_v = k_{z_v} + ia_0 c_{z_v} = \frac{1}{f_{1_v} + if_{2_v}} \quad (3.321)$$

und hieraus

$$k_{z_v} = \frac{f_{1_v}}{f_{1_v}^2 + f_{2_v}^2} \quad (3.322)$$

$$c_{z_v} = \frac{-f_{2_v}}{a_0(f_{1_v}^2 + f_{2_v}^2)} \quad (3.323)$$

Auch die massebehaftete Amplitude läßt sich wie in (3.123) darstellen:

$$\overline{A_{m_v}} = \sqrt{\frac{1 + \bar{\zeta}^2}{\bar{G}^2 + \bar{\eta}^2} \left[\frac{f_{1_v}^2 + f_{2_v}^2}{(1 + ba_0^2 f_{1_v})^2 + (ba_0^2 f_{2_v})^2} \right]} \quad (3.324)$$

Die elastische Lösung ist für $\bar{\eta} = \bar{\zeta} = 0$ eingeschlossen. Dies bewirkt, daß der Imaginärteil des Integranden in f_1^* und f_2^* verschwindet.

Das Integral in (3.315) und (3.316) hat einen komplexen Integranden, aber eine reelle Integrationsvariable. Es läßt sich daher aufspalten in zwei Integrale (\hat{F} komplex)

$$\int \hat{F}(\varphi) d\varphi = \int \operatorname{Re}\{\hat{F}\} d\varphi + i \int \operatorname{Im}\{\hat{F}\} d\varphi \quad (3.325)$$

Hierbei ist $\hat{F}(\varphi) = \frac{Z_v(\varphi)}{N_v(\varphi)}$, so daß gilt

$$\operatorname{Re}\{\hat{F}\} = \frac{\operatorname{Re}\{Z_v\}\operatorname{Re}\{N_v\} + \operatorname{Im}\{Z_v\}\operatorname{Im}\{N_v\}}{(\operatorname{Re}\{N_v\})^2 + (\operatorname{Im}\{N_v\})^2} = \frac{Z_R}{N} \quad (3.326)$$

$$\operatorname{Im}\{\hat{F}\} = \frac{\operatorname{Re}\{N_v\}\operatorname{Im}\{Z_v\} - \operatorname{Re}\{Z_v\}\operatorname{Im}\{N_v\}}{(\operatorname{Re}\{N_v\})^2 + (\operatorname{Im}\{N_v\})^2} = \frac{Z_J}{N} \quad (3.327)$$

Analog ergibt sich für die Summe in (3.315) und (3.316) mit $F'_v(\varphi_n) = \frac{Z_v(\varphi_n)}{N'_v(\varphi_n)}$

$$\sum F'_v = \sum \operatorname{Re}\{F'_v\} + i \sum \operatorname{Im}\{F'_v\} \quad (3.328)$$

$$\operatorname{Re}\{F'_v\} = \frac{Z_R}{N'} \quad (3.329)$$

$$\operatorname{Im}\{F'_v\} = \frac{Z_J}{N'} \quad (3.330)$$

mit der Nennerableitung

$$\begin{aligned} N' = N_{,\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} [(\operatorname{Re}\{N_v\})^2 + (\operatorname{Im}\{N_v\})^2] \\ &= 2[\operatorname{Re}\{N_v\}(\operatorname{Re}\{N_v\})' + \operatorname{Im}\{N_v\}(\operatorname{Im}\{N_v\})'] \end{aligned} \quad (3.331)$$

$$N_v = a_{0v}\varphi N^* \quad (3.332)$$

N'_v ergibt sich, wenn man in (3.106) die elastischen Parameter gegen die viskoelastischen austauscht.

Insgesamt ist damit

$$\begin{aligned} f_1^* + if_2^* &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{Z_R}{N} d\varphi + i \frac{1}{8\pi} \int \frac{Z_J}{N} d\varphi \\ &\quad - i \left[\frac{1}{8} \sum_n \frac{Z_R}{N'}(\varphi_n) + i \frac{1}{8} \sum_n \frac{Z_J}{N'}(\varphi_n) \right] \end{aligned} \quad (3.333)$$

Hieraus ermittelt man

$$f_1^* = \frac{1}{8\pi} \int \frac{Z_R}{N} d\varphi + i \frac{1}{8} \sum_n \frac{Z_J}{N'}(\varphi_n) \quad (3.334)$$

$$f_2^* = \frac{1}{8\pi} \int \frac{Z_J}{N} d\varphi - i \frac{1}{8} \sum_n \frac{Z_R}{N'}(\varphi_n) \quad (3.335)$$

Im Gegensatz zur elastischen Lösung gibt es keine Pole des Integranden, da (außer bei $\varphi = 0$) N nie identisch Null wird, was ja bedeuten würde, daß $\operatorname{Re}\{N_v\}$ und $\operatorname{Im}\{N_v\}$ gleichzeitig Null sein müßten. Für die numerische Integration nehme ich die Stellen, an denen $\operatorname{Re}\{N_v\} = 0$ ist, als Integrationsgrenzen.

Im viskoelastischen Fall sind also für die Vergleichsrechnung in (3.311) und (3.312) einzusetzen

$$f_1^* = \frac{1}{8\pi} \int \frac{Z_R}{N} d\varphi \quad (3.336)$$

$$f_2^* = \frac{1}{8\pi} \int \frac{Z_J}{N} d\varphi \quad (3.337)$$

Hierin ist allerdings die elastische Lösung für $\bar{\eta} = \bar{\zeta} = 0$ nicht mehr enthalten.

3.4.8 Numerische Auswertung für die viskoelastische Schicht

Neben den Parametern des elastischen Problems \bar{G} , a_0 , \bar{d} , B_z und ν sind zusätzlich $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ zu variieren.

Die praktisch relevanten Bereiche dieser beiden Parameter sind a priori nicht anzugeben, da mir keine entsprechenden Bodendaten vorliegen.

Die *dynamische* Viskosität η als Maß der inneren Reibung ist abhängig von der Temperatur, vom Druck und eventuell noch vom Geschwindigkeitsunterschied. Letztere Abhängigkeit führt auf ein nichtlineares η . Für meine Untersuchungen sind diese Abhängigkeiten von geringem Einfluß und werden deshalb nicht berücksichtigt.

Um Anhaltswerte dieser Größen für den Boden zu bekommen, entnahm ich verschiedenen Handbüchern (vor allem [51]) die Werte der folgenden Tabelle, die sich mit einer Ausnahme alle auf 20° C beziehen und auf das SI-Einheitensystem umgerechnet wurden:

$$1 \frac{kg}{m \cdot s} = 1 Pa \cdot s = 1 \frac{N \cdot s}{m^2} = 10 Poise = 10 \frac{dyn \cdot s}{cm^2}.$$

Teilweise war nur die *kinematische* Viskosität ν angegeben, aus der die dynamische Viskosität η über die Dichte errechnet wurde:

$$\eta = \nu \cdot \rho. \quad (3.338)$$

Tabelle: Dynamische Viskosität η bei 20° C in $\frac{kg}{m \cdot s}$

Gase und Dämpfe	$8,5 \cdot 10^{-6} - 2,2 \cdot 10^{-5}$
Luft	$2 \cdot 10^{-5}$
Kältemittel	$7 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-4}$
Benzin	$5 \cdot 10^{-4} - 6,5 \cdot 10^{-4}$
Wasser	10^{-3}
Alkohol	$10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}$
diverse Öle (mineralisch, tierisch, pflanzlich)	$5 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-1}$
Milch	$2 \cdot 10^{-1}$
Gelatine	$5 \cdot 10^{-1}$
Teer	10^2
Bitumen	$10^4 - 10^6$
Gletschereis	bis $8,5 \cdot 10^4$
Glas	$10^{17} - 10^{19}$
Fels (> 300° C)	$10^{18} - 10^{23}$

Bindige und feuchte rollige Böden liegen schätzungsweise im Bereich zwischen Gelatine und Teer, d.h. ich nehme für die Berechnungen an

$$\eta = 10^{-1} - 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}.$$

Während für die Scherviskosität von Stoffen (außer Böden) viele Messungen vorliegen, ist die Spannungsviskosität ζ nicht in der Werkstoffkunde eingeführt; es liegen daher keinerlei Werte vor.

Für die Berechnungen wähle ich ζ so, daß der Term

$$\zeta(\sigma_{ik,t} - \frac{1}{3}\sigma_{jj,t}\delta_{ik}) \quad (3.339)$$

im Stoffgesetz (3.180) die gleiche Größenordnung erhält wie der Term

$$2\eta(\varepsilon_{ik,t} - \frac{1}{3}\varepsilon_{jj,t}\delta_{ik}). \quad (3.340)$$

Aus Bild 6 erhält man bei Vibratoren an der Oberfläche für die Schubverzerrung

$$\gamma \approx 10^{-7} - 10^{-5}.$$

Bei eindimensionaler Betrachtung und mit $G = 5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ als mittlerem Schubmodul entspricht dies einer aufgebrachtten Spannung von $\sigma(G) = 10^2 \text{ N/m}^2$.

Wird diese Verzerrung z.B. bei 25 Hz erreicht, entspricht dies einer Spannungsänderung von $\dot{\sigma} = 10^4 \text{ N/(m}^2 \cdot \text{s)}$ und einer Verzerrungsänderung von $\dot{\varepsilon} = 10^{-4} \text{ 1/s}$.

Bei der angenommenen Scherviskosität $\eta = 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ergibt sich mit Term (3.340) $\sigma(\eta) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}^2$. Setzt man dasselbe für den Term (3.339) an, kann man errechnen

$$\zeta = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

Für die Parametervariationen nehme ich an:

$$\zeta = 10^{-8} - 10^{-6} \text{ s}.$$

Hieraus ergeben sich durch Kombination mit den ungünstigsten Größen aus Kapitel 3.3.5.1

$$\bar{\eta} \text{ nach (3.275)} \approx 1,5 \cdot 10^{-5} - 4 \cdot 10^{-1} \quad \text{und}$$

$$\bar{\zeta} \text{ nach (3.276)} \approx 3 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-4}.$$

Kapitel 4

Eindimensionale Vergleichsrechnung

Zur Verdeutlichung von Tendenzen wird eine eindimensionale Vergleichsrechnung zur viskoelastischen Schicht durchgeführt.

Die Differentialgleichung der Bewegung für den eindimensionalen linearen Standardfestkörper (eLSt) erhält man am schnellsten durch Ergänzung zum System mit zwei Freiheitsgraden (Bild 16) und nachträgliche Berücksichtigung des Fehlens der Masse m_2 .

Bei Schwingungen des Systems um die statische Ruhelage und bei Erregung mit $F(t) = F \cdot e^{i\Omega t}$, also verschwindendem $F(t=0)$, ergibt sich die lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\ddot{z} + \frac{c_1 + c_2}{k} \dot{z} + \frac{c_1}{m} z + \frac{c_1 c_2}{km} z = \left(\frac{c_1 + c_2}{k} + i\Omega \right) \frac{F}{m} e^{i\Omega t} \quad (4.1)$$

Durch die Reduktion des Systems geht eine Anfangsbedingung verloren. Daher folgt aus der Vorgabe von Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit ein abhängiger Ausdruck für die Anfangsbeschleunigung, allgemein folgt aus

$$z(0) = z_0 \quad (4.2)$$

$$\dot{z}(0) = v_0, \quad (4.3)$$

so daß gilt

$$\ddot{z} = -\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)m} z_0, \quad (4.4)$$

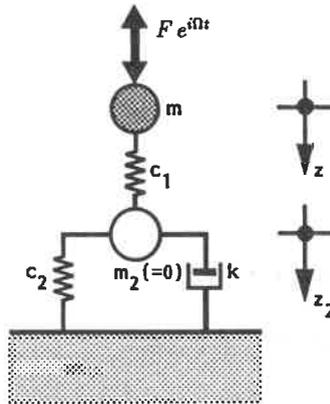


Bild 16 : Linearer Standardfestkörper als Schwinger mit zwei Freiheitsgraden

und daraus folgt

$$\ddot{z}(0) = -\frac{c_1}{m} v_0. \quad (4.5)$$

Speziell wird gewählt: $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = 0$, was bedeutet, daß auch $\ddot{z}(0)$ und $\ddot{z}'(0)$ zu Null werden.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.1) setzt sich zusammen aus der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer Partikulärlösung.

Da die Lösung der homogenen Differentialgleichung von dem Wert der Diskriminante

$$D = \frac{c_1}{27m} \left[\left(\frac{c_1}{m} \right)^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{k} \right)^3 \cdot \frac{c_2}{k} - \frac{c_1}{m} \cdot \frac{(c_1^2 + 20c_1c_2 - 8c_2^2)}{4k^2} \right] \quad (4.6)$$

abhängt, ergeben sich Lösungen mit verschiedenem Verhalten, die hier allerdings nicht untersucht werden.

Statt dessen wird der Vergleich eLSt - LStvK direkt im Bildraum vorgenommen.

Hierzu wird die Differentialgleichung (4.1) samt der Anfangsbedingungen in den LAPLACERaum transformiert und dann nach $f^*(s)$ aufgelöst

$$f^*(s) = \frac{F \left(\frac{c_1 + c_2}{k} + i\Omega \right)}{m(s - i\Omega) \left(s^3 + \frac{c_1 + c_2}{k} s^2 + \frac{c_2}{m} s + \frac{c_1 c_2}{km} \right)} \quad (4.7)$$

Die Dimension von $f^*(s)$ ist $L \cdot T$.

Für den Vergleich mit der dimensionslosen Verschiebung $\overline{u_{zm}^*}$ nach (3.281) muß $f^*(s)$ noch durch die charakteristische Länge a dividiert und mit der Erregerfrequenz Ω multipliziert werden.

Da im eindimensionalen Fall die Querdehnung unberücksichtigt bleibt, wird aus der Differentialgleichung (3.182) mit (3.183)

$$\sigma_{ik} + \zeta \sigma_{ik,t} = 2G\varepsilon_{ik} + 2\eta\varepsilon_{ik,t}. \quad (4.8)$$

Die Koeffizienten lassen sich mit denen des eindimensionalen Modells (*Bild 19*) identifizieren: ζ mit p_1 , $2G$ mit q_0 und 2η mit q_1 . Unter Beachtung der Dimensionsechtheit erhält man damit

$$\frac{k}{c_1 + c_2} = \zeta \quad (4.9)$$

$$\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 2Ga \quad (4.10)$$

$$\frac{k c_1}{c_1 + c_2} = 2\eta a \quad (4.11)$$

Setzt man diese Ausdrücke in (4.7) ein, geht über auf dimensionslose Größen und formt geeignet um, so wird

$$f^*(\bar{s}) = \frac{\Omega}{a} f^*(s) = \frac{1 + i\zeta}{(\bar{s} - i) [\overline{m} \bar{s}^2 (1 + \overline{\zeta} \bar{s}) + 2(\overline{G} + \overline{\eta} \bar{s})]}. \quad (4.12)$$

Erweitert man noch um \overline{G}^* zu

$$f^*(\bar{s}) = \frac{\overline{G}^* \cdot (1 + i\overline{\zeta})}{\overline{G}^* \cdot (\bar{s} - i) [\overline{m} \bar{s}^2 (1 + \overline{\zeta} \bar{s}) + 2(\overline{G} + \overline{\eta} \bar{s})]}, \quad (4.13)$$

dann sieht man sofort durch Vergleich mit (3.282), daß zu identifizieren ist ($f_1^* + i f_2^*$) mit

$$\frac{\overline{G}^* \cdot (1 + i\overline{\zeta})}{\overline{m} \bar{s}^2 (1 + \overline{\zeta} \bar{s}) + 2(\overline{G} + \overline{\eta} \bar{s})} = q_e^* \quad (4.14)$$

(Der Index e steht für "eindimensional").

Mit (3.277) und für den eingeschwungenen Zustand, dann gekürzt, ist zu vergleichen der Realteil von (4.14), nämlich

$$Re\{q_e^*\} = \frac{2(\overline{G}^2 + \overline{\eta}^2) - \overline{m}(\overline{G} + \overline{\eta} \overline{\zeta})}{4(\overline{G}^2 + \overline{\eta}^2) + \overline{m}[\overline{m}(1 + \overline{\zeta}^2) - 4(\overline{G} + \overline{\eta} \overline{\zeta})]} \quad (4.15)$$

mit f_{1e} nach (3.311) und der Imaginärteil von (4.14), also

$$\operatorname{Im}\{q_e^*\} = \frac{\bar{m}(\bar{G}\bar{\zeta} - \bar{\eta})}{4(\bar{G}^2 + \bar{\eta}^2) + \bar{m}[\bar{m}(1 + \bar{\zeta}^2) - 4(\bar{G} + \bar{\eta}\bar{\zeta})]} \quad (4.16)$$

mit f_{2e} nach (3.312).

Zusammengefaßt lassen sich auch die Amplitude A_e und die Phasenlage φ_e des eindimensionalen Falles (im Originalraum!) berechnen zu

$$A_e = |q_e^*| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{q_e^*\})^2 + (\operatorname{Im}\{q_e^*\})^2} \quad (4.17)$$

und

$$\varphi_e = \arctan \frac{-\operatorname{Im}\{q_e^*\}}{\operatorname{Re}\{q_e^*\}} \quad (4.18)$$

und dann direkt mit der Amplitude \bar{A}_{0v} (3.309) und der Phasenlage φ_v (3.310) der viskoelastischen Schicht vergleichen. Dies kommt der Ermittlung der Ersatzparameter für das eindimensionale Ersatzsystem gleich.

Kapitel 5

Energieausbreitung in einer Schicht

Wie bereits früher erwähnt, wird die durch Erregung zugeführte Energie im stationären Fall vollständig durch Abstrahlungs- und Materialdämpfung verbraucht.

In einer Schicht läßt sich der Arbeitsausdruck bei Rotationssymmetrie an der Mantelfläche eines Zylinders mit Radius R im geeigneten Zeitintervall angeben. Mit dem Untergrund unter der Schicht und der Luft über der Schicht findet kein Energieaustausch statt. Dies entspricht zwar nicht der Wirklichkeit, ist aber eine Folge des gewählten Rechenmodells.

Bei der elastischen Schicht muß sich für jeden Radius derselbe Wert der Abstrahlung ergeben, und zwar genau die im Zeitintervall zugeführte Arbeit.

Bei der viskoelastischen Schicht tritt zusätzlich Materialdämpfung auf. Im Volumen eines Zylinders ergibt sie sich z.B. als Differenz von zugeführter Arbeit und der durch dessen Mantelfläche abgestrahlten Energie.

In diesem Kapitel wird die analytische Berechnung für die Energiezufuhr durch den Rüttler und für die Energieausbreitung in einer elastischen Schicht dargestellt; für die Energieausbreitung in einer viskoelastischen Schicht wird lediglich der Weg angedeutet.

5.1 Zugeführte Energie

Zunächst wird die Leistung des Rüttlers an der Oberfläche berechnet:

$$L_z(t) = F(t) \cdot v_{zm}(t) = F(t) \cdot u_{zm,t}(t). \quad (5.1)$$

Die zu verwendenden Realteile aus (3.11) und (3.110) bei Erregung mit der Kraftamplitude F und der Kreisfrequenz Ω sind

$$\operatorname{Re}\{F(t)\} = F \cos \Omega t, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{Re}\{u_{z_m,t}(t)\} = \frac{F}{Ga} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (f_1 \cos \Omega t - f_2 \sin \Omega t) = \frac{F\Omega}{Ga} (-f_1 \sin \Omega t - f_2 \cos \Omega t). \quad (5.3)$$

Die Leistung der Maschine lautet damit

$$L_z(t) = -\frac{F^2\Omega}{Ga} (f_1 \sin \Omega t \cos \Omega t + f_2 \cos^2 \Omega t). \quad (5.4)$$

bzw. dimensionslos

$$\bar{L}_z(t) = -\frac{1}{G} (f_1 \sin \bar{t} \cos \bar{t} + f_2 \cos^2 \bar{t}). \quad (5.5)$$

Für die Arbeit, die von der Maschine in einer Periode T zugeführt wird, erhält man

$$\begin{aligned} A_z &= \int_0^{T=\frac{2\pi}{\Omega}} -\frac{F^2\Omega}{Ga} (f_1 \sin \Omega t \cos \Omega t + f_2 \cos^2 \Omega t) dt \\ &= -\frac{F^2\Omega}{Ga} \left[f_1 \frac{1}{2\Omega} \sin^2 \Omega t + f_2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4\Omega} \sin 2\Omega t \right) \right]_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} = -\frac{F^2\pi}{Ga} \cdot f_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit f_2 nach (3.117). Da f_2 einen negativen Ausdruck darstellt, muß man tatsächlich Arbeit zuführen. Dimensionslos lautet sie

$$\bar{A}_z = -\frac{\pi}{G} f_2. \quad (5.7)$$

Zum Vergleich wird die mittlere Leistungsdichte nach E. REISSNER [68] oder nach BYCROFT [17] herangezogen. Sie setzen allerdings von vorneherein die Maschinenleistung mit der ins Unendliche abgestrahlten Leistung gleich:

$$L_M = \frac{F^2}{2a^2\sqrt{G\rho}} \cdot \frac{-a_0 f_2}{(1 + ba_0^2 f_1)^2 + (ba_0^2 f_2)^2}. \quad (5.8)$$

Hierbei wird die Masse m des Rüttlers berücksichtigt. Setzt man diese zu Null, ergibt sich $b = 0$ und damit

$$L_M = -\frac{F^2 a_0}{2a^2\sqrt{G\rho}} \cdot f_2 \quad (5.9)$$

und mit (3.74)

$$L_M = -\frac{F^2\Omega}{2Ga} \cdot f_2. \quad (5.10)$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit der aus (5.6) errechneten mittleren Leistung

$$L_m = \frac{A_z}{T} = -\frac{F^2\pi}{Ga} \cdot f_2 \cdot \frac{\Omega}{2\pi} = -\frac{F^2\Omega}{2Ga} \cdot f_2. \quad (5.11)$$

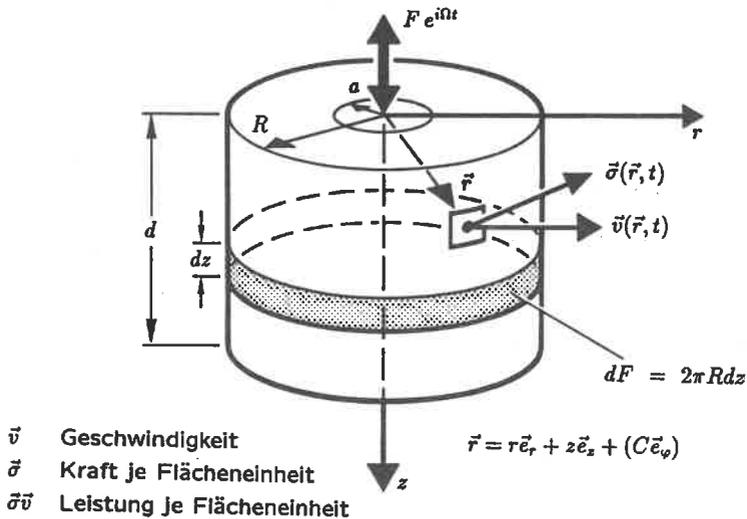


Bild 17: Abstrahlungsenergie an der Zylindermantelfläche

5.2 Abgestrahlte Energie

Die Arbeit an einer Fläche F im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ ist

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_F \vec{\sigma} \vec{v} dF \right) dt \quad (5.12)$$

mit den aus Bild 17 (nach [15]) ersichtlichen Bezeichnungen.

Die Leistung L berücksichtigt nur den Anteil aus den inneren Kräften, was auch durch Vereinfachung aus dem Ausdruck von G. HEINRICH [39] hervorgeht:

$$L = \int_F \left[\vec{v} \left(\rho \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \rho U \right) - \vec{v} \sigma \right] d\vec{\sigma} = \int_F \vec{S} d\vec{\sigma}. \quad (5.13)$$

Mit dem von ihm eingeführten Energietransportvektor \vec{S} und $d\vec{\sigma}$ als nach innen gerichtetem Oberflächenelement bedeutet dies den pro Zeiteinheit durch die Hüllfläche

erfolgenden Zustrom mechanischer Energie. Da dF nach außen gerichtet ist, ist also

$$L_a = \int_F \vec{S} dF \quad (5.14)$$

der Abstrom mechanischer Energie pro Zeiteinheit.

Nebenbei bemerkt: diesem Energietransportvektor entspricht der in der Elektrotechnik gebräuchliche POYNTING-Vektor.

Mit dem Potential der Massenkräfte

$$U = g(-u_z) + \bar{C} \quad (5.15)$$

lauten die Komponenten von \vec{S}

$$S_i = v_i \varrho \frac{v_k v_k}{2} - v_i \varrho [g(-u_z + C) \delta_{ik}] - v_k \sigma_{ik}. \quad (5.16)$$

Berücksichtigt man die Rotationssymmetrie, erhält man für die Leistung an der Mantelfläche des Zylinders mit Radius R

$$\begin{aligned} L_a(R, t) &= 2\pi R \int_{z=0}^d \left\{ \left[\varrho \frac{v^2}{2} (v_r + v_z) \right] + [\varrho g v_z u_z - \varrho g C v_z] \right. \\ &= \left. - [v_r \sigma_{rr} + (v_r + v_z) \sigma_{rz} + v_z \sigma_{zz}] \right\} dz \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit

$$v_r = u_{r,t} \quad (5.18)$$

$$v_z = u_{z,t} \quad (5.19)$$

$$v^2 = v_r^2 + v_z^2. \quad (5.20)$$

Die Gesamtenergie, die im Zeitintervall durch diese Mantelfläche abfließt, ist

$$A_a(R) = \int_{t_1}^{t_2} L_a(R, t) dt. \quad (5.21)$$

Als geeignetes Zeitintervall wird wie für die zugeführte Energie eine Periode $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ gewählt, da sämtliche Größen mit Ω oszillieren und somit die oszillierenden Energieanteile entfallen. Dies sind, wie sich zeigen läßt, die Anteile aus der Kinetik und aus dem Potential, so daß bleibt

$$A_a(R) = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \left\{ 2\pi R \int_{z=0}^d - [v_r \sigma_{rr} + (v_r + v_z) \sigma_{rz} + v_z \sigma_{zz}] dz \right\} dt \quad (5.22)$$

bzw. dimensionslos

$$\overline{A_a}(\overline{R}) = \int_0^{2\pi} \left\{ -2\pi \overline{R} \int_{\overline{r}=0}^{\overline{d}} [\overline{v}_r \overline{\sigma}_{rr} + (\overline{v}_r + \overline{v}_z) \overline{\sigma}_{rz} + \overline{v}_z \overline{\sigma}_{zz}] d\overline{z} \right\} d\overline{l}. \quad (5.23)$$

Es sind dabei

$$\overline{v}_i = v_i \cdot a^{-1} \Omega^{-1} \quad (5.24)$$

$$\overline{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} \cdot a^2 m_0^{-1} r_0^{-1} \Omega^{-2} \quad (5.25)$$

$$\overline{L_a} = L_a \cdot a^{-1} m_0^{-1} r_0^{-1} \Omega^{-3} \quad (5.26)$$

$$\overline{A_a} = A_a \cdot a^{-1} m_0^{-1} r_0^{-1} \Omega^{-2} \quad (5.27)$$

5.2.1 Elastische Schicht

Für die Berechnung des Arbeitsausdruckes werden die Spannungen und Geschwindigkeiten in der Form wie (3.110) dargestellt. Mit den dimensionslosen Parametern und Variablen lauten dann (3.53) bis (3.57)

$$u_r = \frac{ae^{i\bar{t}}}{4\pi\overline{G}} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_1(a_0\overline{r}\varphi)}{N(\varphi)} \cdot Z_1(\varphi) d\varphi \quad (5.28)$$

$$u_z = \frac{ae^{i\bar{t}}}{4\pi\overline{G}} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_0(a_0\overline{r}\varphi)}{N(\varphi)} \cdot Z_2(\varphi) d\varphi \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \frac{Ga_0e^{i\bar{t}}}{2\pi\overline{G}} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi)}{N(\varphi)} \left\{ \left[\left(\varphi^2 - \tau^2 + \frac{1}{2} \right) J_0(a_0\overline{r}\varphi) - \frac{\varphi}{a_0\overline{r}} J_1(a_0\overline{r}\varphi) \right] \cdot Z_{31}(\varphi) \right. \\ \left. + \left[\varphi^2 J_0(a_0\overline{r}\varphi) - \frac{\varphi}{a_0\overline{r}} J_1(a_0\overline{r}\varphi) \right] \cdot Z_{32}(\varphi) \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{Ga_0e^{i\bar{t}}}{2\pi\overline{G}} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_1(a_0\overline{r}\varphi)}{N(\varphi)} \cdot Z_4(\varphi) d\varphi \quad (5.31)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{Ga_0e^{i\bar{t}}}{2\pi\overline{G}} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_0(a_0\overline{r}\varphi)}{N(\varphi)} \cdot Z_5(\varphi) d\varphi, \quad (5.32)$$

jeweils mit $N(\varphi)$ nach (3.96). Die Z_i sind nur noch von den Parametern a_0, \overline{d}, τ und der Variablen z abhängig:

$$\begin{aligned}
Z_1(\varphi) = & \varphi \left\{ (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \cdot \left\{ \varphi^2 \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] + (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] \right\} \\
& + (\varphi^2 - \tau^2) (\varphi^2 - 1) \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& - (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& + \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& - (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \\
& \cdot \left. \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right\} \quad (5.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2(\varphi) = & (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\varphi^2 \left\{ (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \cdot \left. \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] + (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] \right\} \\
& + (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& - \varphi^4 \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& + \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& - (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \\
& \cdot \left. \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right\} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{31}(\varphi) = & (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] \\
& + \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& - (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \\
& \cdot \left. \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right\} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{32}(\varphi) = & -(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] \\
& + (\varphi^2 - \tau^2) (\varphi^2 - 1) \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& + (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 \\
& \cdot \left. \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right\} \quad (5.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_4(\varphi) = & (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \varphi \left\{ (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 \right. \\
& \cdot \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] + (\varphi^2 - \frac{1}{2})^2 \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] \\
& + (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \\
& \left\{ -\sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right. \\
& \left. + \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right\} \\
& + \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \left\{ \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right. \\
& \left. - \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \right\} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_5(\varphi) = & -(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2}) \\
& \left\{ \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] + \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{z}] \right\} \\
& - (\varphi^2 - \tau^2) (\varphi^2 - 1) \varphi^2 \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& + (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^4 \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& - \varphi^2 (\varphi^2 - \frac{1}{2})^2 \sinh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \sinh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})] \\
& + (\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \frac{1}{2})^2 \\
& \cdot \cosh[(\varphi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} a_0 \bar{d}] \cosh[(\varphi^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} a_0 (\bar{d} - \bar{z})]. \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Unterzieht man diese Funktionen den gleichen Prozeduren wie \bar{u}_z nach (3.93), führt also die Konturintegration aus, überlagert die freien Schwingungen so, daß die Bedingung im Unendlichen erfüllt ist, geht über zu der Schreibweise wie in (3.110) und nimmt dann die Realteile dieser Funktionen, so erhält man noch

$$u_r = \frac{a}{G} (g_1 \cos \bar{t} - g_2 \sin \bar{t}) \quad (5.39)$$

$$u_z = \frac{a}{G} (g_3 \cos \bar{t} - g_4 \sin \bar{t}) \quad (5.40)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{G a_0}{G} (g_5 \cos \bar{t} - g_6 \sin \bar{t}) \quad (5.41)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{G a_0}{G} (g_7 \cos \bar{t} - g_8 \sin \bar{t}) \quad (5.42)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{G a_0}{G} (g_9 \cos \bar{t} - g_{10} \sin \bar{t}). \quad (5.43)$$

Die Geschwindigkeiten errechnen sich aus (5.39) und (5.40) zu

$$v_r = -\frac{a\Omega}{G}(g_1 \sin \bar{t} + g_2 \cos \bar{t}) \quad (5.44)$$

$$v_z = -\frac{a\Omega}{G}(g_3 \sin \bar{t} + g_4 \cos \bar{t}) \quad (5.45)$$

mit den 10 Funktionen g_i :

$$g_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_1(a_0\bar{r}\varphi)}{N(\varphi)} Z_1(\varphi) d\varphi \quad (5.46)$$

$$g_2 = -\frac{1}{4} \sum_n \frac{\sin(a_0\varphi_n) J_1(a_0\bar{r}\varphi_n)}{N'(\varphi_n)} Z_1(\varphi_n) \quad (5.47)$$

$$g_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_0(a_0\bar{r}\varphi)}{N(\varphi)} Z_2(\varphi) d\varphi \quad (5.48)$$

$$g_4 = -\frac{1}{4} \sum_n \frac{\sin(a_0\varphi_n) J_0(a_0\bar{r}\varphi_n)}{N'(\varphi_n)} Z_2(\varphi_n) \quad (5.49)$$

$$g_5 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi)}{N(\varphi)} \left\{ \left[\left(\varphi^2 - \tau^2 + \frac{1}{2} \right) J_0(a_0\bar{r}\varphi) - \frac{\varphi}{a_0\bar{r}} J_1(a_0\bar{r}\varphi) \right] Z_{31}(\varphi) \right. \\ \left. + \left[\varphi^2 J_0(a_0\bar{r}\varphi) - \frac{\varphi}{a_0\bar{r}} J_1(a_0\bar{r}\varphi) \right] Z_{32}(\varphi) \right\} d\varphi \quad (5.50)$$

$$g_6 = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\sin(a_0\varphi_n)}{N'(\varphi_n)} \left\{ \left[\left(\varphi_n^2 - \tau^2 + \frac{1}{2} \right) J_0(a_0\bar{r}\varphi_n) - \frac{\varphi_n}{a_0\bar{r}} J_1(a_0\bar{r}\varphi_n) \right] Z_{31}(\varphi_n) \right. \\ \left. + \left[\varphi_n^2 J_0(a_0\bar{r}\varphi_n) - \frac{\varphi_n}{a_0\bar{r}} J_1(a_0\bar{r}\varphi_n) \right] Z_{32}(\varphi_n) \right\} \quad (5.51)$$

$$g_7 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_1(a_0\bar{r}\varphi)}{N(\varphi)} Z_4(\varphi) d\varphi \quad (5.52)$$

$$g_8 = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\sin(a_0\varphi_n) J_1(a_0\bar{r}\varphi_n)}{N'(\varphi_n)} Z_4(\varphi_n) \quad (5.53)$$

$$g_9 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(a_0\varphi) J_0(a_0\bar{r}\varphi)}{N(\varphi)} Z_5(\varphi) d\varphi \quad (5.54)$$

$$g_{10} = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\sin(a_0\varphi_n) J_0(a_0\bar{r}\varphi_n)}{N'(\varphi_n)} Z_5(\varphi_n). \quad (5.55)$$

Von den Integralen ist jeweils der CAUCHYSche Hauptwert zu nehmen, $N'(\varphi_n)$ ist nach (3.106) einzusetzen, und für \bar{r} ist bei der speziellen Berechnung $\bar{R} = \frac{R}{a}$ zu setzen.

Für die Leistung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 L_a &= \frac{2\pi R a^2 \Omega G}{G} \int_{\bar{z}=0}^{\bar{d}} \frac{a_0}{G} \left\{ \cos^2 \bar{t} (g_2 g_5 + g_4 g_9 + g_2 g_7 + g_4 g_7) \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 \bar{t} (g_1 g_6 + g_1 g_8 + g_3 g_8 + g_3 g_{10}) \right. \\
 &\quad \left. + \sin \bar{t} \cos \bar{t} (g_1 g_5 - g_2 g_6 + g_1 g_7 - g_2 g_8 + g_3 g_7 - g_4 g_8 + g_3 g_9 - g_4 g_{10}) \right\} d\bar{z} \\
 &= \frac{2\pi R F \Omega a_0}{G} \left(\cos^2 \bar{t} \int_0^{\bar{d}} h_1 d\bar{z} - \sin^2 \bar{t} \int_0^{\bar{d}} h_2 d\bar{z} + \sin \bar{t} \cos \bar{t} \int_0^{\bar{d}} h_3 d\bar{z} \right). \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Hierin sind die h_i die jeweiligen Klammerausdrücke.

Dimensionslos ändert sich nur der Faktor vor der Klammer in

$$\frac{2\pi \bar{R} a_0}{G}.$$

Die Arbeit erhält man zu

$$\begin{aligned}
 A_a &= \frac{2\pi R F a_0}{G} \left[\int_{\bar{t}=0}^{2\pi} \cos^2 \bar{t} \left(\int_{\bar{z}=0}^{\bar{d}} h_1 d\bar{z} \right) d\bar{t} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\bar{t}=0}^{2\pi} \sin^2 \bar{t} \left(\int_{\bar{z}=0}^{\bar{d}} h_2 d\bar{z} \right) d\bar{t} + \int_{\bar{t}=0}^{2\pi} \sin \bar{t} \cos \bar{t} \left(\int_{\bar{z}=0}^{\bar{d}} h_3 d\bar{z} \right) d\bar{t} \right]. \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

Vertauscht man die Integrationen, sind zunächst auszuführen

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \bar{t} d\bar{t} = \left[\frac{1}{2} \bar{t} + \frac{1}{4} \sin 2\bar{t} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad (5.58)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \bar{t} d\bar{t} = \left[\frac{1}{2} \bar{t} - \frac{1}{4} \sin 2\bar{t} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad (5.59)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \bar{t} \cos \bar{t} d\bar{t} = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \bar{t} \right]_0^{2\pi} = 0. \quad (5.60)$$

h_3 liefert also keinen Beitrag zum Arbeitsausdruck, von dem bleibt

$$A_a(R) = \frac{2\pi^2 R F a_0}{G} \int_{\bar{z}=0}^{\bar{d}} (h_1 - h_2) d\bar{z} \quad (5.61)$$

mit

$$\begin{aligned}
 (h_1 - h_2) &= g_2 g_5 + g_4 g_9 + g_2 g_7 + g_4 g_7 - g_1 g_6 - g_1 g_8 - g_3 g_8 - g_3 g_{10} \\
 &= g_2 g_5 + (g_2 + g_4) g_7 + g_4 g_9 - (g_6 + g_8) g_1 - (g_8 + g_{10}) g_3. \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

Die Kombination der Funktionen g , erfolgt so, daß jeweils ein Integral mit einer Summe multipliziert werden muß und sich der Faktor $(-1/(8\pi))$ vorziehen läßt, so daß für die numerische Auswertung in dimensionsloser Form entsteht:

$$\overline{A}_a(\overline{R}) = -\frac{\pi \overline{R} a_0}{4\overline{G}} \int_0^{\overline{d}} l d\overline{z} \quad (5.63)$$

mit

$$l = -8\pi(h_1 - h_2). \quad (5.64)$$

Im elastischen Fall muß die Summe aus zugeführter Energie und der allein durch Abstrahlung abgeführten Energie verschwinden, also

$$\overline{A}_z + \overline{A}_a = 0, \quad (5.65)$$

das heißt \overline{A}_a ist wie \overline{A}_z konstant über die Periode $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ betrachtet.

(5.7) und (5.63) eingesetzt ergibt

$$\left(-\frac{\pi}{\overline{G}} f_2\right) + \left(-\frac{\pi \overline{R} a_0}{4\overline{G}} \int_0^{\overline{d}} l d\overline{z}\right) = 0 \quad (5.66)$$

oder

$$\int_0^{\overline{d}} l d\overline{z} = -\frac{4}{a_0 \overline{R}} f_2 \quad (5.67)$$

mit f_2 nach (3.119).

Für den elastischen Fall ergeben sich dadurch keine neuen Erkenntnisse, für den viskoelastischen Fall sind damit aber notwendige Vorarbeiten gemacht.

5.2.2 Viskoelastische Schicht

Zunächst ist wiederum die LAPLACE-Rücktransformation der elastischen Lösungen auszuführen, wobei die elastischen Konstanten vorher durch die entsprechenden viskoelastischen Größen (3.277) bis (3.279) zu ersetzen sind.

Im viskoelastischen Fall besteht die abgeführte Energie aus Abstrahlungs- und aus Dämpfungsenergie

$$\overline{A}_a = \overline{A}_{av} + \overline{A}_{Dv} \quad (5.68)$$

Für die Dämpfungsenergie ergibt sich dann, da (5.65) weiterhin gültig ist,

$$\overline{A_{D_v}} = -(\overline{A_z} + \overline{A_{a_v}}). \quad (5.69)$$

Die Arbeitsausdrücke $\overline{A_{a_v}}$ und damit auch $\overline{A_{D_v}}$ sind Funktionen des Zylinderradius. Es läßt sich dann zu jedem Volumen die dissipierte Energie ausrechnen, also eine Materialdämpfung als spezifische Dämpfung je Volumeneinheit explizit bestimmen.

Formal erhält man

$$\overline{A_{D_v}} = \frac{\pi}{G_v} \left(f_2^* + \frac{a_{0_v} \bar{R}}{4} \int_0^{\bar{z}} l_v dz \right), \quad (5.70)$$

allerdings ohne nähere Angaben zu l_v .

Einer künftigen Untersuchung bleibt es vorbehalten, die entsprechenden Ausdrücke zu dieser Trennung von geometrischer und Materialdämpfung auszurechnen.

Kapitel 6

Parameterstudien

6.1 Wellen

Die Auswertung von \bar{u}_z nach (3.104) liefert die Wellenausbreitung an der Schichtoberfläche, die sogenannten RAYLEIGHwellen. Wie diese eingeordnet werden, sei mit einer kurzen Typologie der interessierenden Wellen gezeigt (siehe *Bild 18* und [47] oder [61]).

Der Begriff "Wellen" bezeichnet einen Ausbreitungsvorgang in einem System, und zwar räumlich *und* zeitlich betrachtet. Dabei wird (meist) nicht Materie, sondern Energie transportiert. Im Gegensatz dazu steht "Schwingungen" für das lokale zeitabhängige Phänomen.

Im allseitig unendlich ausgedehnten Kontinuum (Vollraum) breiten sich von einer Quelle nur *Raumwellen* in alle Richtungen aus.

Ist das Kontinuum berandet oder geschichtet, entstehen an den Rändern und Schichtgrenzen zusätzlich *Oberflächenwellen* mit verhältnismäßig geringer Tiefenwirkung und anderem Abklingverhalten als die Raumwellen.

Je nach Bewegungsrichtung der Teilchen im Vergleich zur Ausbreitungsrichtung der Raumwellen werden im isotropen Kontinuum *Longitudinalwellen* (auch Kompressions-, Primär-, P- oder Druckwellen) mit der Teilchenbewegung parallel zur Ausbreitungsrichtung und *Transversalwellen* (auch Scher-, Sekundär- oder S-Wellen) mit der Teilchenbewegung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unterschieden.

Diese beiden Wellentypen wandern mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und unterschiedlichen Energieanteilen von der Quelle aus gleichmäßig in alle Richtungen.

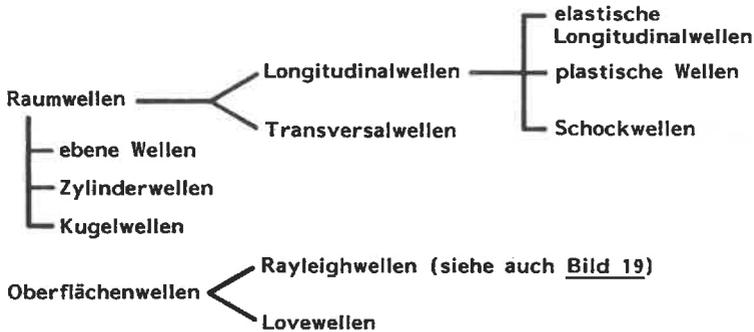


Bild 18: Zusammenstellung von Wellentypen

Treffen die Wellen auf einen Rand oder eine Schichtgrenze, werden sie teilweise reflektiert (aus P- bzw. S-Wellen werden jeweils P- und S-Wellen), teilweise werden *Oberflächenwellen* wie *RAYLEIGH-* oder *LOVEwellen* erzeugt.

Bei den *RAYLEIGHwellen*, die streng genommen nur an der *Halbraumoberfläche* ausgebildet sind, werden die Teilchen entlang aufrecht stehender Ellipsen parallel zur Ausbreitungsrichtung bewegt, siehe dazu *Bild 19*.

LOVEwellen sind Wellen an der Grenze zweier Medien, deren Eigenschaften in bestimmten Verhältnissen zueinander stehen, genauer: in der Grenzebene polarisierte Scherwellen.

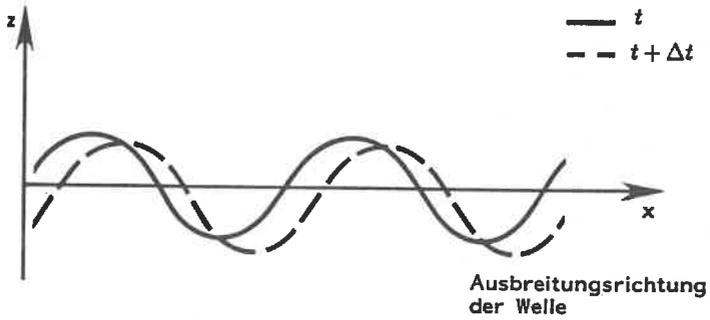
Je nach Form der Wellenfront unterscheidet man *ebene*, *Zylinder-* und *Kugelwellen*.

Alle diese Wellen treten nicht nur in *elastischen* Medien auf.

In *viskoelastischen* Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) $c = \omega/k$ aller Wellen abhängig von der Frequenz. Dies führt zur sogenannten *Dispersion* der Raumwellen, d.h. ein Wellenpaket bleibt bei der Ausbreitung nicht wie in elastischen Medien in derselben Form erhalten; es bewegt sich mit der sogenannten Gruppengeschwindigkeit $c_G = d\omega/dk$.

Oberflächenwellen sind selbst in elastischen Medien dispersiv.

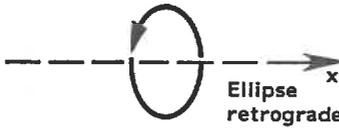
In *plastischen* Medien gibt es noch weitere Wellentypen: *Plastische Wellen* entste-



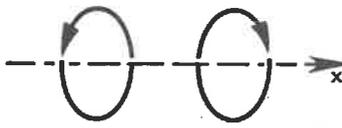
a) Wasser (ideale Flüssigkeit), z.B. [48]



b) elastisches Medium, z.B. [61]



c) viskoelastisches Medium [38]



Ellipse
retrograde oder prograde
(evtl. mehrfach wechselnd mit
Ausbreitungsrichtung und -tiefe)

Bild 19: Teilchenbewegungen bei RAYLEIGHwellen

hen, wenn nach dem Überschreiten der Fließgrenze hinter einer elastischen P-Welle eine langsamere plastische "Welle" das Fortschreiten der plastischen Verformung anzeigt. Es findet also stückweiser Transport von Materie statt. Dieselbe Auswirkung können auch die hauptsächlich in Flüssigkeiten auftretenden *Schockwellen* (Kennzeichen: steile Wellenfronten) in plastischen Medien zeigen [79].

Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten einiger Wellen sind aus verschiedenen Quellen in *Bild 20* zusammengestellt.

Am häufigsten benötigt man wie bei den vorliegenden Untersuchungen die Geschwindigkeiten von Scher- und Kompressionswellen im dreidimensionalen elastischen Kontinuum.

(3.232) und (3.233) lauten in dimensionsloser Form

$$\bar{c}_s = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \quad (6.1)$$

$$\bar{c}_p = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} = \frac{1}{\tau} \bar{c}_s \quad (6.2)$$

Da $\tau \leq 1/\sqrt{2} \approx 0,707$, ist also die Kompressionswelle schneller als die Scherwelle, im bodenrelevanten Bereich von ν (0,25 bis 0,49) beträgt der Faktor $1/\tau$ ca. 1,73 bis 7,14. Diese Unterschiede werden zu Baugrunduntersuchungen verwendet (siehe Kapitel 2.1).

Für die Geschwindigkeit der RAYLEIGHWelle, die etwas langsamer ist als die Scherwelle, gibt [26] an

$$c_R = \sqrt{\gamma_1} c_s \quad (6.3)$$

bzw. wiederum dimensionslos

$$\bar{c}_R = \sqrt{\gamma_1} \bar{c}_s \quad (6.4)$$

mit $\sqrt{\gamma_1}$ zwischen 0,874 für $\nu = 0$ und 0,955 für $\nu = 0,5$; d.h. das Geschwindigkeitsverhältnis von RAYLEIGH- zu Scherwellen ist in Böden nahezu konstant (zwischen ca. 0,92 für $\nu = 0,25$ und ca. 0,95 für $\nu = 0,49$). Siehe hierzu auch die Ergebnisse der Dispersionsrelation in Kapitel 3.3.5.2 für große $a_0 \bar{d}$ (*Bild 12*).

6.2 Elastische Schicht

Aus den theoretisch möglichen, beliebig vielen Parameterkombinationen wählte ich für die elastische Schicht vier Werte der Querdehnzahl ν (0,25 - 0,33 - 0,40 - 0,49) und

		bodenrelevanter Bereich			
		$\nu = 0,25$	$\nu = 0,49$	$\nu = 0,5$	
1-D	einachsiger Spannungszustand $c_p^I = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(= \sqrt{2(1+\nu)} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \right)$	1,414	1,726	1,732	
2-dimensional	ebener Spannungszustand lange Wellen $c_p^{II} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	1,414	1,980	2	
	lange Wellen $k d \ll \pi$ [26] $c_p^{II} = k d \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu)}} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	0,816 kd	0,943 kd	1,101 kd	1,155 kd
3-dimensional	ebene Kompressionswelle $c_p^{III} = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	1,414	1,732	7,141	∞
	ebene Scherwelle $c_p^{III} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	1	1	1	1
	Rayleighwelle $c_R^{III} = \sqrt{11} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	0,874	0,919	0,954	0,955
	Kugelwelle $c_p^{III} \text{ elastisch} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	0,816	1,291	7,047	∞
$G = \mu$		$E = 2(1+\nu)G$	$E_s = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}G = \frac{1}{3}G$	$K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}G$	

Bild 20: Zusammenstellung von Wellengeschwindigkeiten

ebenfalls vier Werte der dimensionslosen Schichtdicke \bar{d} (1,0 – 2,0 – 3,0 – 4,0), insgesamt also 16 Kombinationen.

Für jede dieser Kombinationen wurde die dimensionslose Frequenz a_0 von 0,1 (der Wert 0 ist nicht möglich) bis 4,5 in Schritten von 0,01 variiert, d.h. es wurden jeweils 441 Werte berechnet. Für jeden dieser 16 Rechenläufe benötigte die COMPAREX des Rechenzentrums der Universität Stuttgart ca. 30 – 50 Minuten reine Rechenzeit.

Das FORTRAN-Programm SCHICH mit den beiden Hauptzweigen ELSCHI und VISCHI wurde von mir speziell für diese Untersuchungen entwickelt. Es besteht neben dem Hauptprogramm aus 136 *Functions* und *Subroutines*, das Quellprogramm hat ca. 420 Kilobyte. Als Fremdprogramme wurden die Besselfunktion aus "Numerical Recipes" [66] und die Integrationsroutinen aus "QUADPACK" [65] sowie die Zeichenroutinen von PICASSO verwendet (letztere sind in den 420 Kilobyte nicht enthalten).

Als Ergebniskurven zeichnete ich zunächst alle sechs dimensionslosen Funktionen auf:

$$f_1, f_2, k_z, c_z, \bar{A}_0, \varphi.$$

Bewußt verzichtete ich darauf, wenige Punkte zu berechnen und anschließend irgendeine der bekannten Ausgleichskurven durchzulegen. Stattdessen wählte ich die genaue Schrittweite und die Polygonzugverbindung der gerechneten Funktionswerte. Zur Demonstration, wie man die Kurven eventuell hätte falsch glätten können, erstellte ich die Amplitudenkurve *Bild 23* mit wenigen Punkten und Polygonzugverbindung, woraus im Vergleich mit *Bild 21.43* zu sehen ist, daß sich die Natur doch nicht immer so benimmt, daß wenige Rechenergebnisse (oder auch Messungen) sämtliche Phänomene eines Vorgangs erklären können.

Die Ergebniskurven sind also nicht so glatt wie manche der in der Literatur anzutreffenden und daher teilweise schwierig zu interpretieren.

Aus den 96 Bildern der elastischen Schicht wählte ich die anschaulichsten aus, nämlich den Realteil der komplexen Steifigkeit k_z (*Bilder 21.1 – 21.16*), deren durch a_0 dividierten Imaginärteil c_z (*Bilder 21.17 – 21.32*) sowie die dimensionslose Amplitude \bar{A}_0 für $\bar{G} = 1$ (*Bilder 21.33 – 21.48*). Zur besseren Verwendbarkeit wurden alle Kurven mit einem CAD-Programm aufbereitet.

Die Kurven der Nachgiebigkeiten f_1 und f_2 sind nicht so aussagekräftig wie die der Steifigkeiten; die Phasenkurven φ sind in der erhaltenen Form kaum zu gebrauchen. Exemplarisch wurden für die Parameterkombination $\nu = 0,40$ und $\bar{d} = 3,0$ diese 3 Kurven zusätzlich aufgenommen (*Bilder 22.1 – 22.3*).

Die Ordinaten wurden für jede Funktion immer gleich gewählt, der Vergleich ist somit einfacher. Allerdings führte dies dazu, daß Maximal- und Minimalwerte teilweise abgeschnitten wurden.

Der Bereich $a_0 \bar{d} > \text{ca. } 8$ wurde jeweils gekennzeichnet, da sich ab diesem Wert, leicht erkennbar, numerische Schwierigkeiten ergeben.

Für $a_0 \bar{d} = \pi/(2\tau)$, in die Bilder eingetragen als a_{0R} , erhält man die erwarteten Resonanzphänomene (siehe hierzu Kapitel 3.3.4.8).

Für $a_0 \bar{d} < \pi/2$ gibt es keine Dämpfung, weil f_2 und damit c_2 Null sind. Entgegen meiner Vermutung in Kapitel 3.3.4.8 konnte ich die untere Grenzfrequenz also doch feststellen. Sie liegt dort, wo die Dämpfung beginnt, also bei

$$a_{0G} = \frac{\pi}{2\bar{d}}, \quad (6.5)$$

was umgerechnet bedeutet

$$f_G = \frac{c_s}{4\bar{d}}, \quad (6.6)$$

und dies ist dieselbe Grenzfrequenz wie bei der Torsionserregung (siehe [17]). a_{0G} ist ebenfalls in die Bilder eingetragen.

Anders gesagt: Erst ab einer Schichtdicke von

$$d = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k} \quad (6.7)$$

bilden sich Scherwellen aus, die Energie abtransportieren und damit Dämpfung hervorrufen. ($1/k$ ist die Wellenlänge der Scherwelle.) Und bei einer Schichtdicke von

$$d = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{h} \quad (6.8)$$

zeigen sich die ersten Resonanzen der Kompressionswelle. ($1/h$ ist die Wellenlänge der Kompressionswelle.)

Auch ungeklärte Effekte sind sichtbar, beispielsweise sind

- bei den Amplituden einige Überhöhungen zu sehen, z.B. in *Bild 28.3* bei $a_0 \approx 1,5$, deren Ursachen noch nicht untersucht sind.

Zur Kontrolle, speziell auch der Größenordnung der Ergebnisse, stellte ich einige Plausibilitätsuntersuchungen an:

1. Für $a_0 \rightarrow 0$ und $\bar{d} \rightarrow \infty$ muß sich als Grenzwert der statische Wert der Federsteifigkeit eines Kreisfundaments auf dem Halbraum ergeben. Nach [55] ist dieser (dort mit deutscher Bezeichnung c_z und mit r_0 statt a)

$$k_z = \frac{4Ga}{1-\nu}. \quad (6.9)$$

Mit (3.75) erhält man

$$k_z = \frac{F}{a} \cdot \frac{4\bar{G}}{1-\nu}. \quad (6.10)$$

Bei fehlender Dämpfung ist $f_2 = 0$ und damit

$$k_z = \frac{1}{f_1}, \quad (6.11)$$

das heißt

$$f_1 = \frac{a}{F} \cdot \frac{1-\nu}{4\bar{G}}. \quad (6.12)$$

Für $a/F = 1$ und $\bar{G} = 1$ ergibt sich

$$f_1 = \frac{1-\nu}{4} = 0,25 - 0,25\nu. \quad (6.13)$$

Variiert man im Programm ν von 0,005 bis 0,495 in Schritten zu 0,035 und wählt $a_0 = 0,05$, $\bar{d} = 10,05$, so erhält man *Bild 24*. Dies zeigt die Gerade

$$f_1 = 0,232 - 0,240\nu, \quad (6.14)$$

die sehr gut mit (6.13) übereinstimmt.

2. Berechnet man für $a_0 \rightarrow 0$ (gewählt wiederum $a_0 = 0,05$) und $\nu = 0,35$ bei variierter dimensionsloser Schichtdicke \bar{d} die Steifigkeit k_z , dann läßt sich die so erhaltene Kurve (*Bild 25.1*) mit *Fig. 3* von KAGAWA UND KRAFT[44] (*Bild 25.2*) vergleichen. Dort ist

$$\alpha = \frac{k_\nu}{k_{\nu\infty}} \quad (6.15)$$

in Abhängigkeit von

$$\frac{H}{2r_0} = \frac{\bar{d}}{2} \quad (6.16)$$

dargestellt.

Ich erhalte

$$k_z = \frac{4Ga}{1-\nu} \cdot \alpha, \quad (6.17)$$

mit $Ga = 1$ und $\nu = 0,35$ also

$$\alpha = \frac{k_z}{6,154}. \quad (6.18)$$

Der Vergleich mit dem dort dargestellten Problem "Schicht auf Halbraum" zeigt sehr gute Übereinstimmung: als Grenzwert für $G_2/G_1 = 1$ erhalte ich

$$\alpha \approx 1,1, \quad (6.19)$$

also fast 1. Für

$$\frac{G_2}{G_1} = \infty \quad (6.20)$$

sind die Kurven in [44] und von mir sehr gut übereinstimmend.

3. Um den Vergleich mit Halbraumlösungen zu erleichtern, wurden die *Bilder 26.1, 26.2* mit $\bar{d} = 10$ erstellt. Man sieht, daß die Kurven sich denjenigen der Halbraumlösung annähern.
4. Die *Bilder 21.1 - 21.32* lassen sich aber auch mit Schichtlösungen aus der Literatur vergleichen, z.B. mit *Fig. 10* von LUCO [56] (*Bilder 27.1, 27.2*).

In weiteren Darstellungen wird gezeigt, daß sich die Spannungsverteilung unter der Platte nicht wesentlich auf die Ergebnisse auswirkt, ob sie wie im statischen Fall oder konstant angenommen wird. (Vergleiche hierzu die *Bilder 28.1 - 28.3* mit den *Bildern 21.7/23/39*).

Um die Schwierigkeiten bei der Programmierung dieser mathematisch anspruchsvollen Funktionen und vor allem bei deren Integration zu verdeutlichen, sind die auftretenden Funktionen

- Zähler des Integranden
- Nenner des Integranden
- Integrand, einmal zwischen 0 und 1,15 und einmal zwischen 0 und 20
- Nennerableitung
- Summenfunktion

für die Randbedingungen "statisch" und "konstant" dargestellt (*Bilder 29.1 - 29.10*); der Nenner und dessen Ableitung sind allerdings unabhängig davon. Zur Darstellung dieser Funktionen siehe auch die Ausführungen in Kapitel 3.3.5.3.

Beispielhaft wurden die Zeitverläufe u_{z_m} bei "statischer" und konstanter Spannungsverteilung unter der Platte dargestellt (*Bilder 30.1, 30.2*). Dabei erkennt man die Phasenverschiebung der Bewegung gegenüber der Spannung.

Bilder 21.1 bis 21.48

**Parametervariationen für die elastische Schicht
bei Annahme "statischer" Spannungsverteilung**

Bilder 21.1 bis 21.16

k_z – Realteil der komplexen Steifigkeit; "Federsteifigkeit"

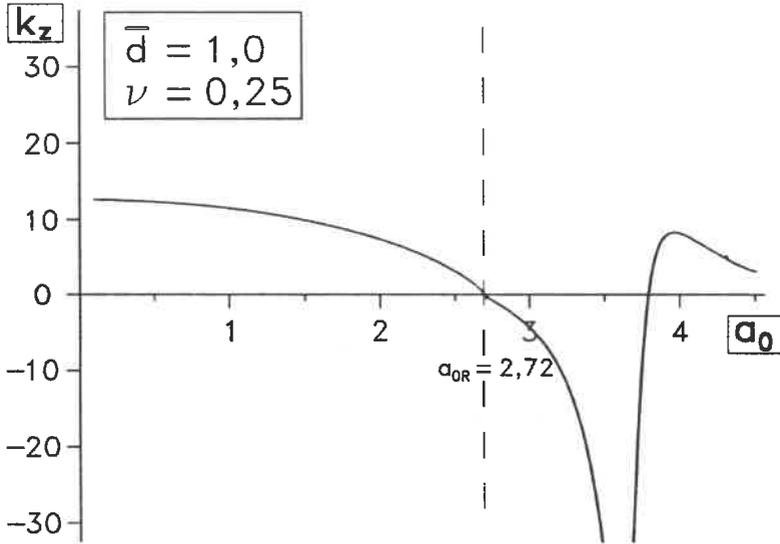


Bild 21.1

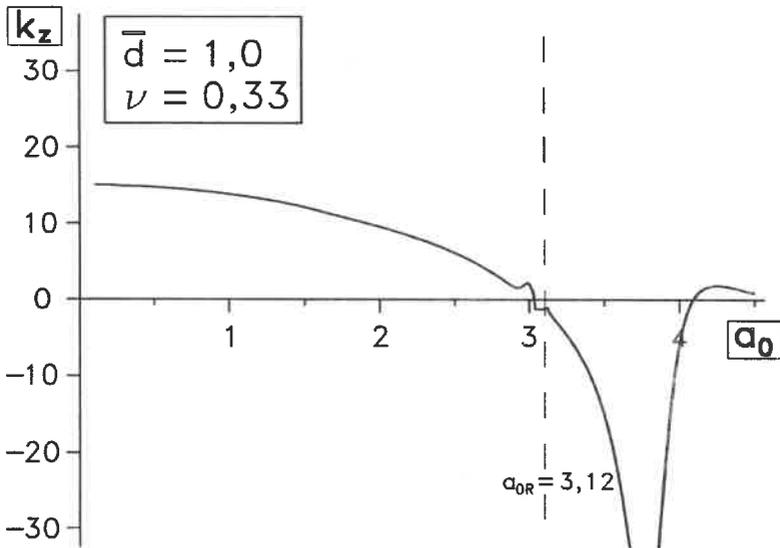


Bild 21.2

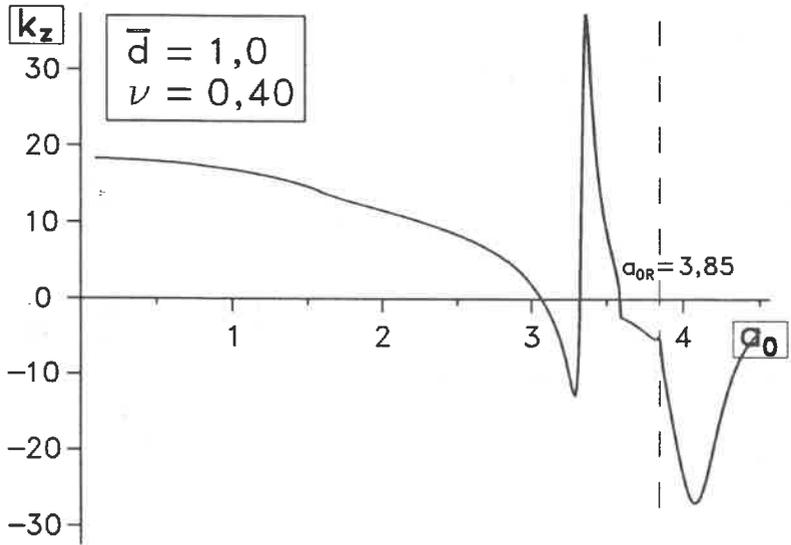


Bild 21.3

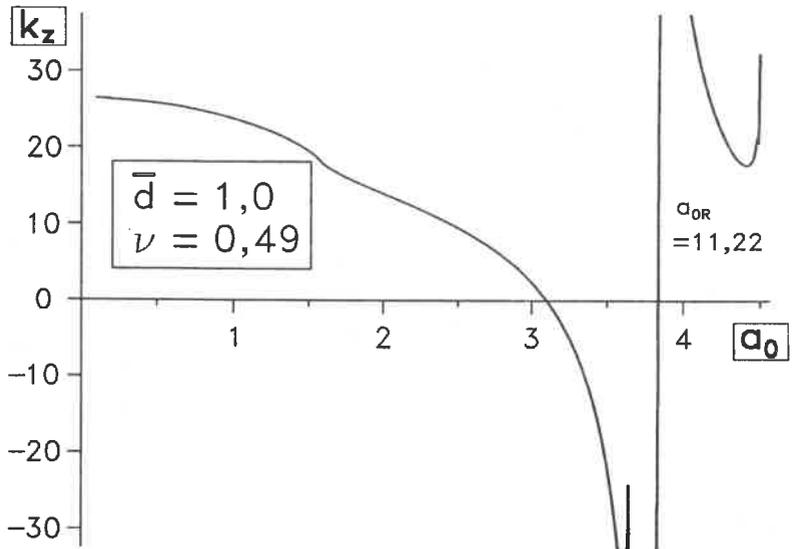


Bild 21.4

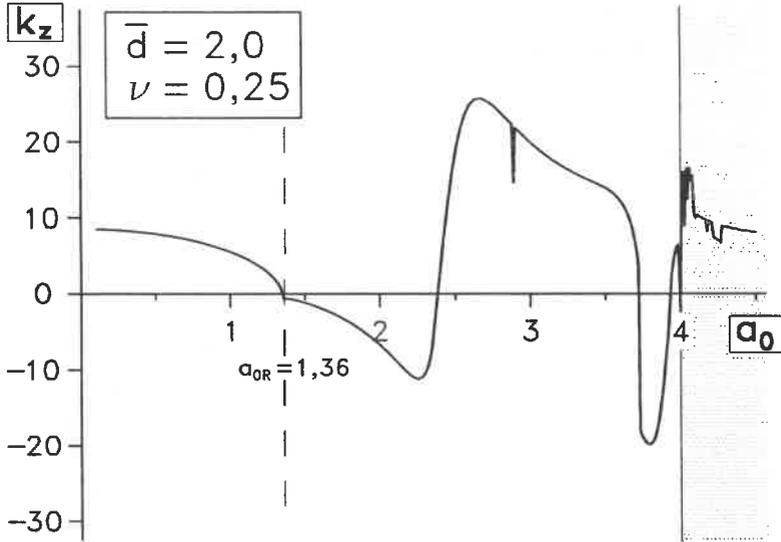


Bild 21.5

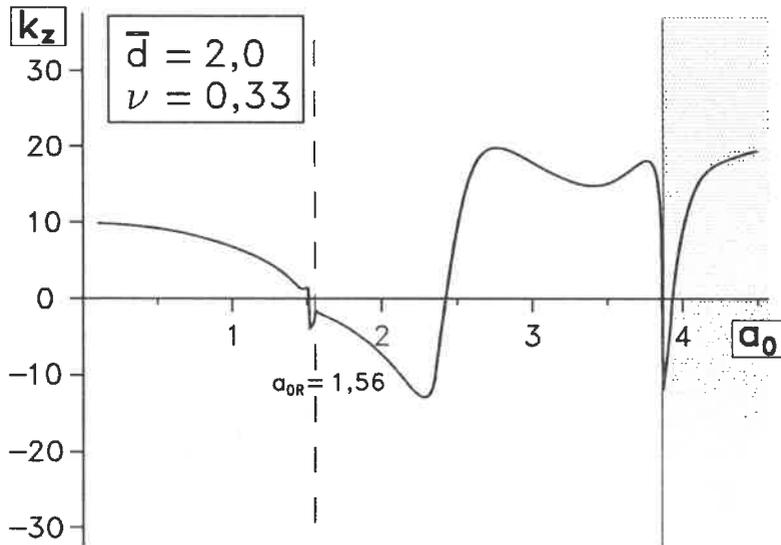


Bild 21.6

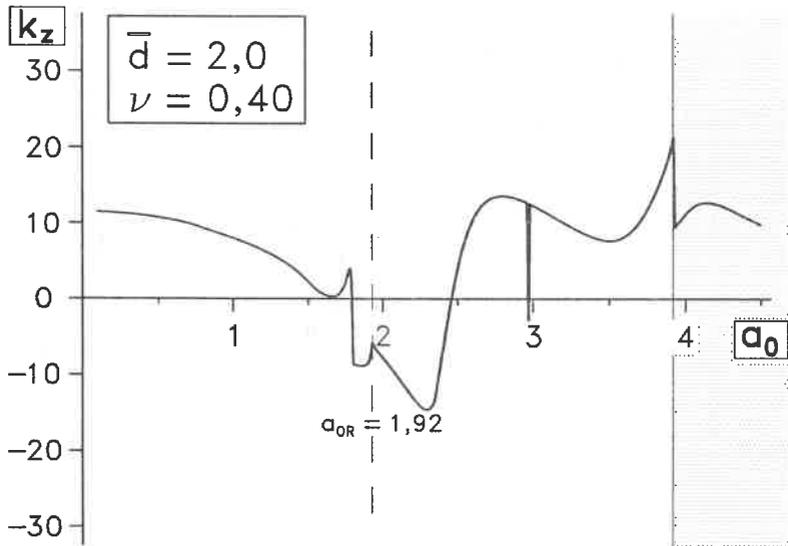


Bild 21.7

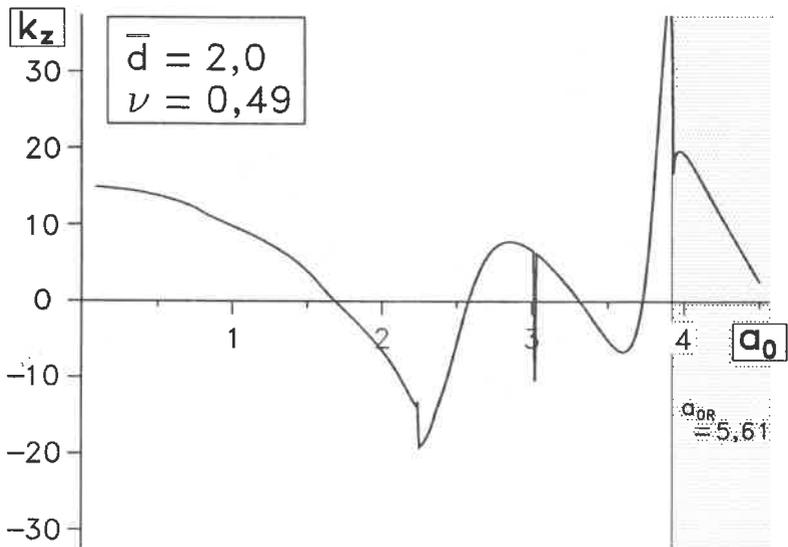


Bild 21.8

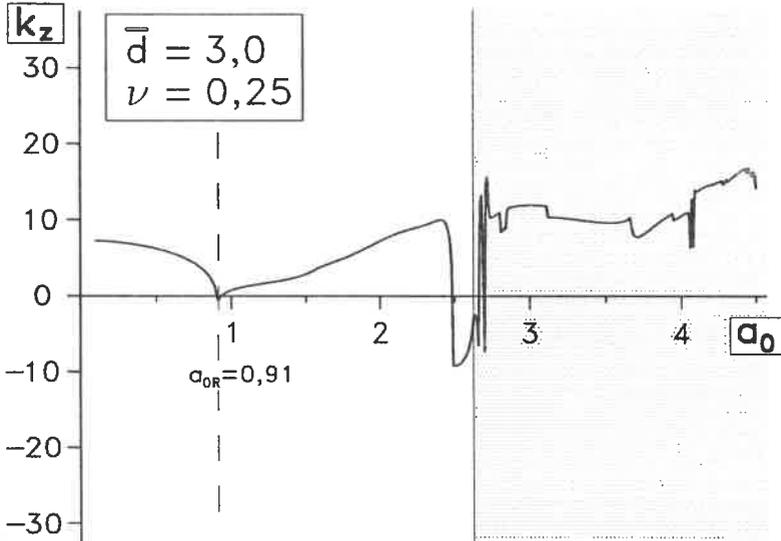


Bild 21.9

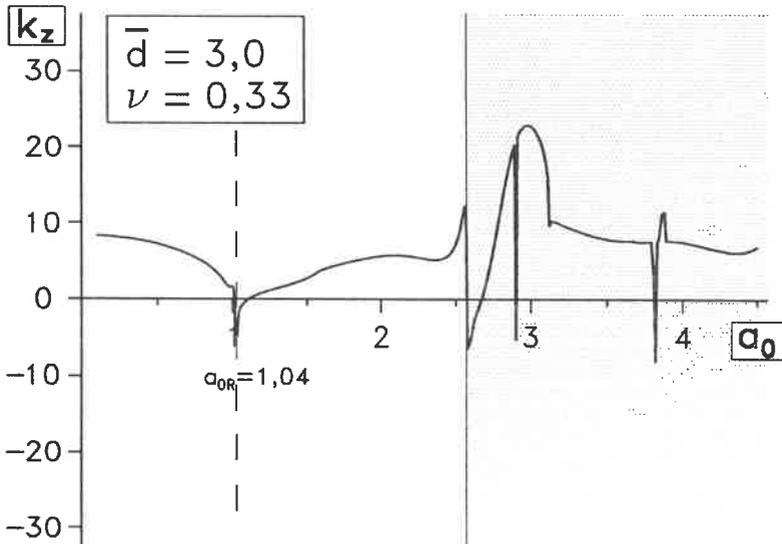


Bild 21.10

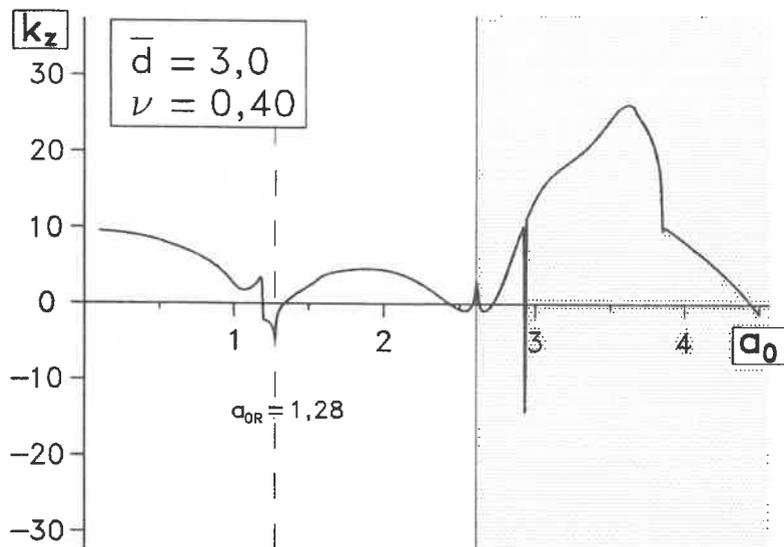


Bild 21.11

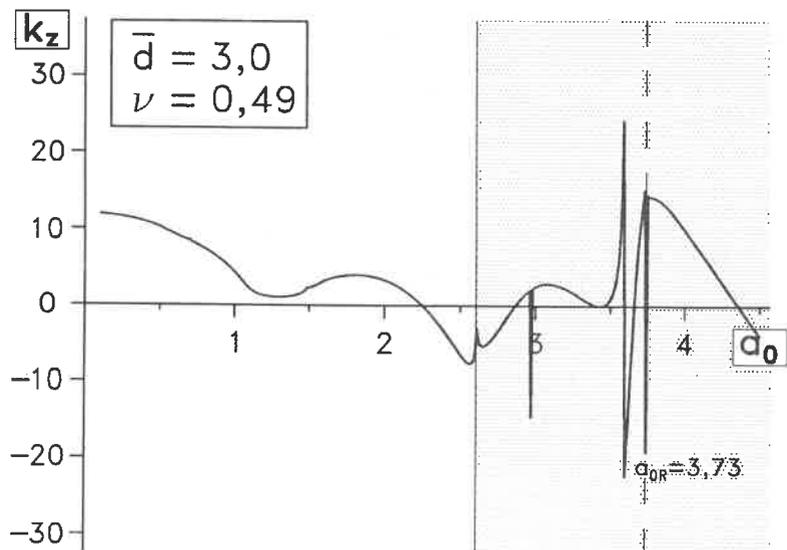


Bild 21.12

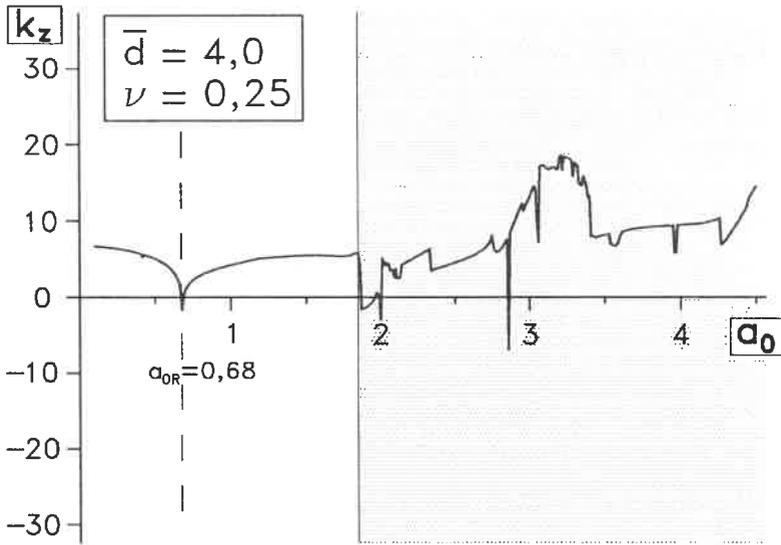


Bild 21.13

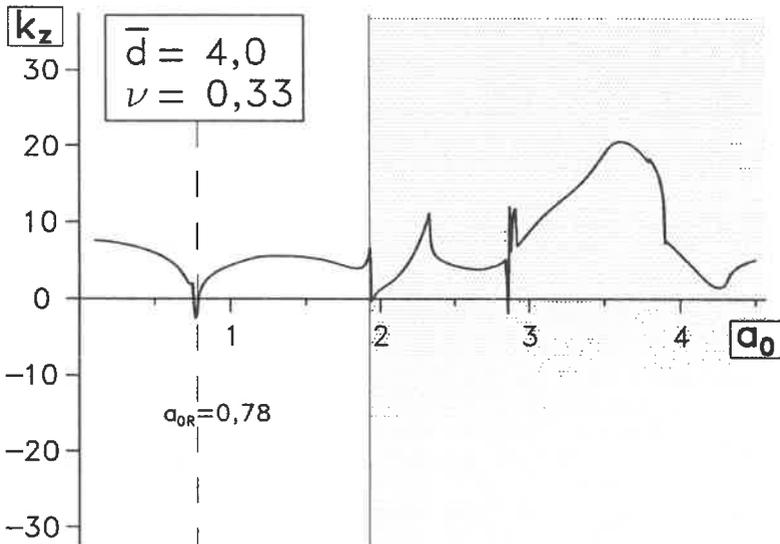


Bild 21.14

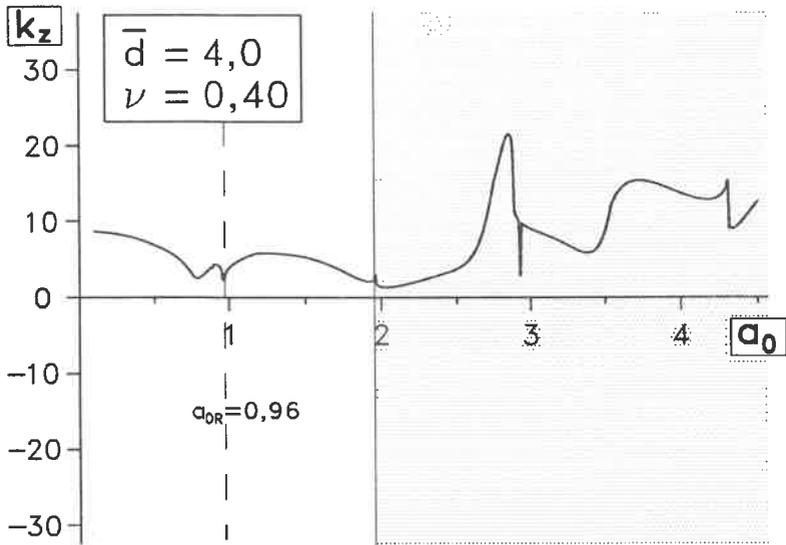


Bild 21.15

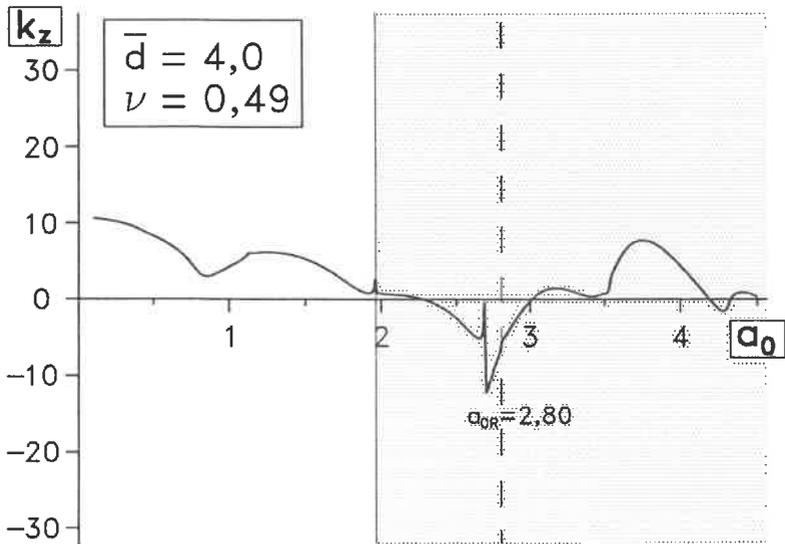


Bild 21.16

Bilder 21.17 bis 21.32
 c_z – modifizierter Imaginärteil der komplexen Steifigkeit; “Dämpfung”

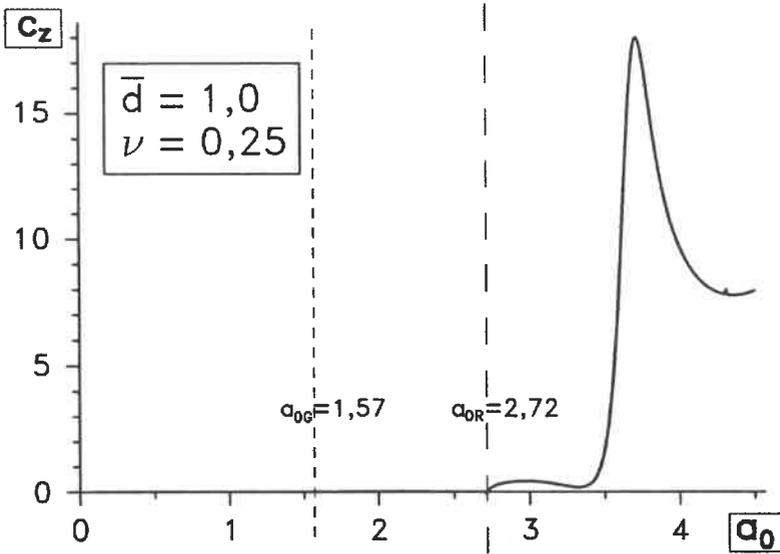


Bild 21.17

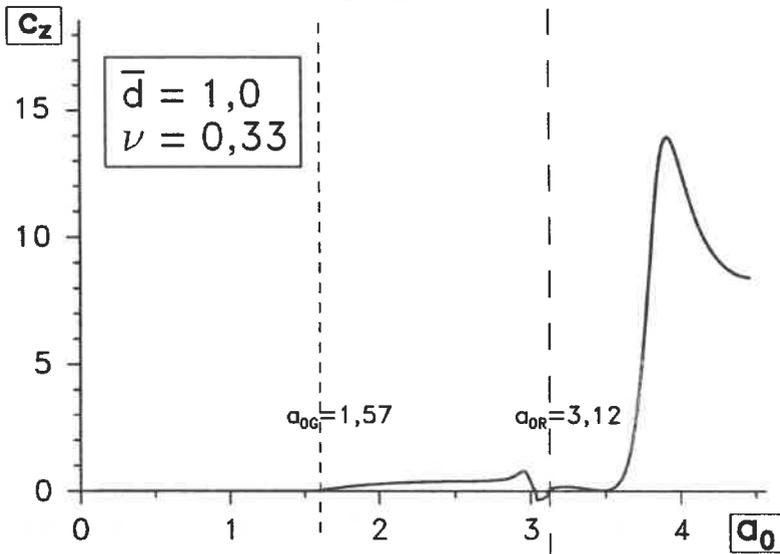


Bild 21.18

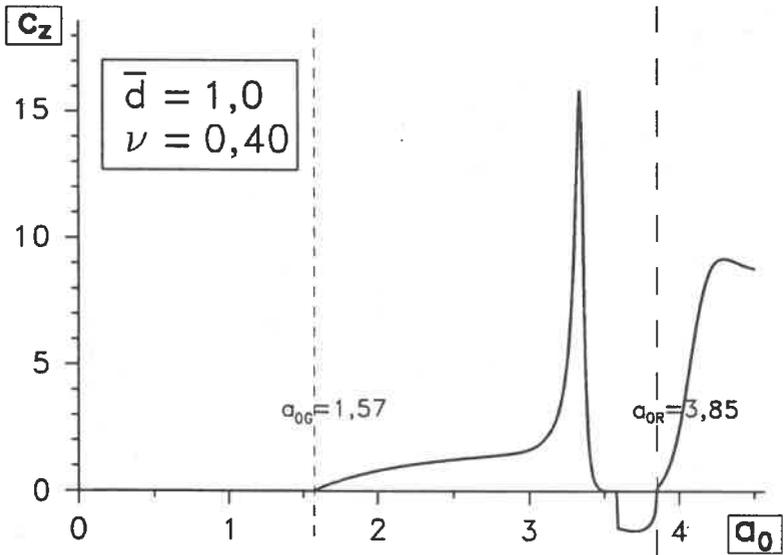


Bild 21.19

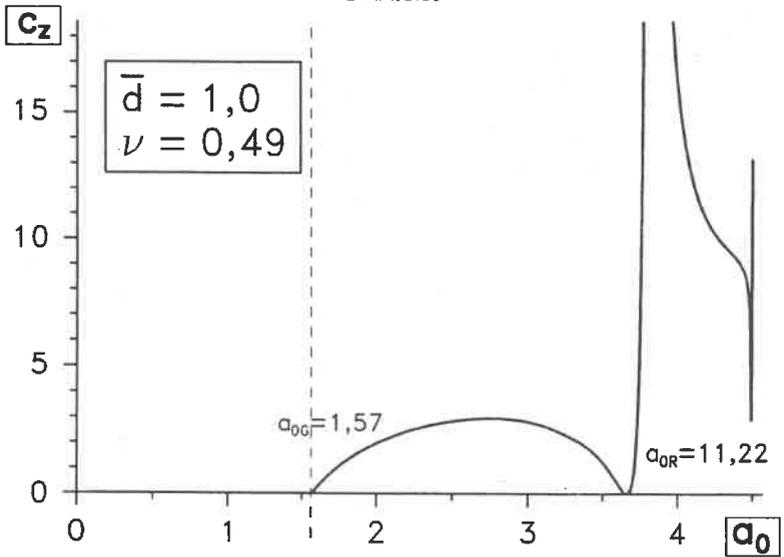


Bild 21.20

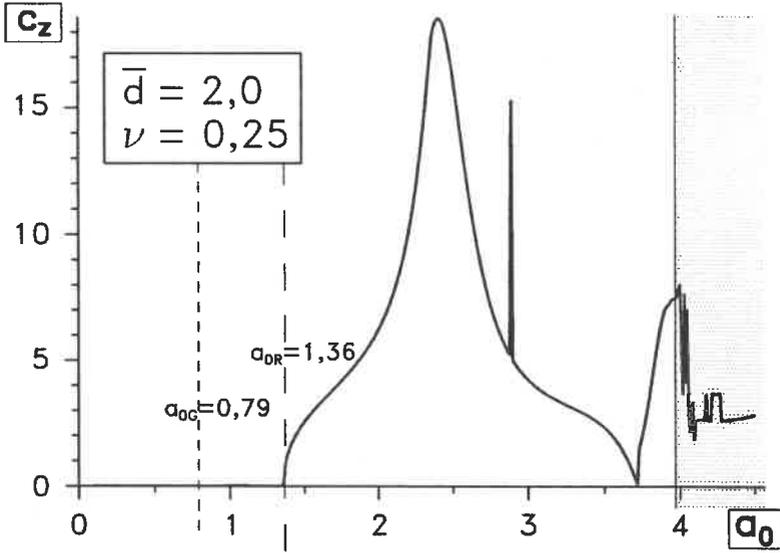


Bild 21.21

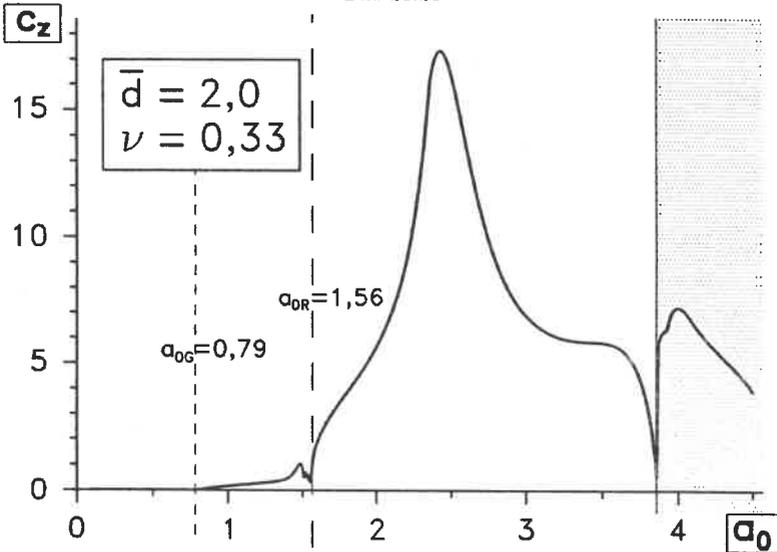


Bild 21.22

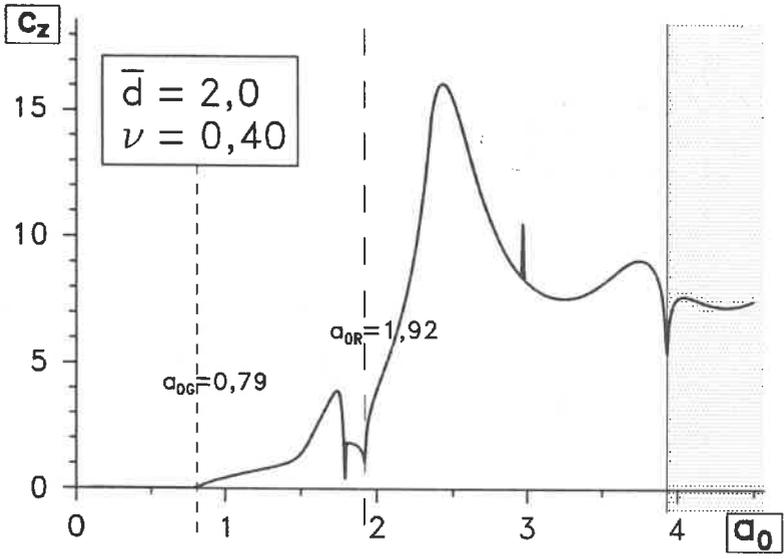


Bild 21.23

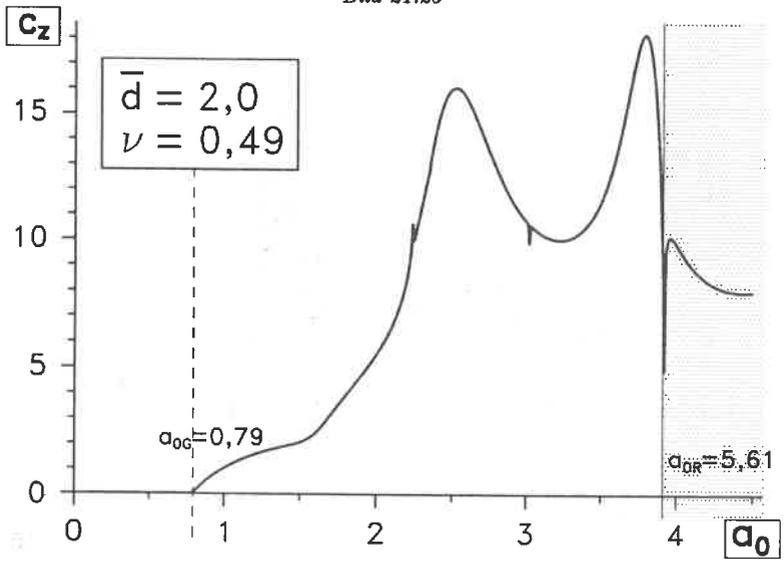


Bild 21.24

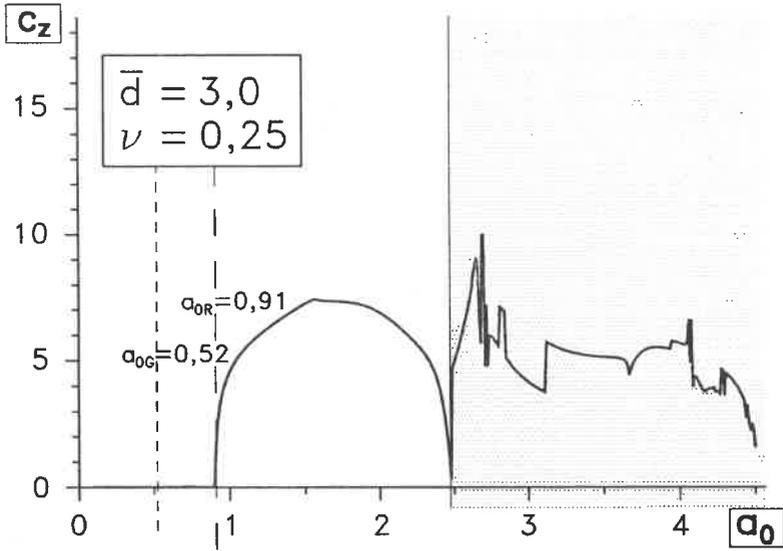


Bild 21.25

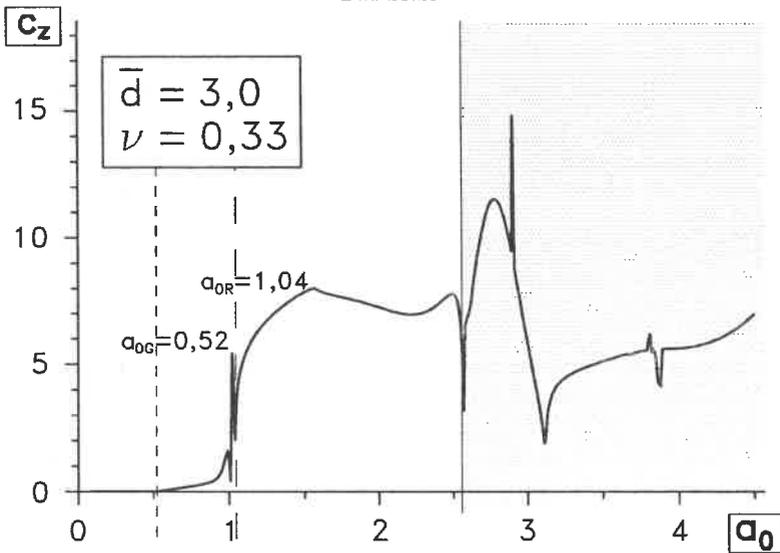


Bild 21.26

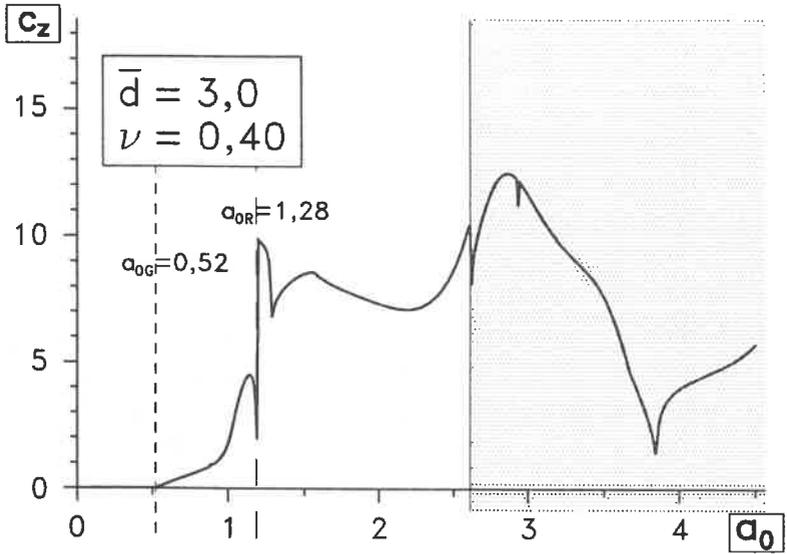


Bild 21.27

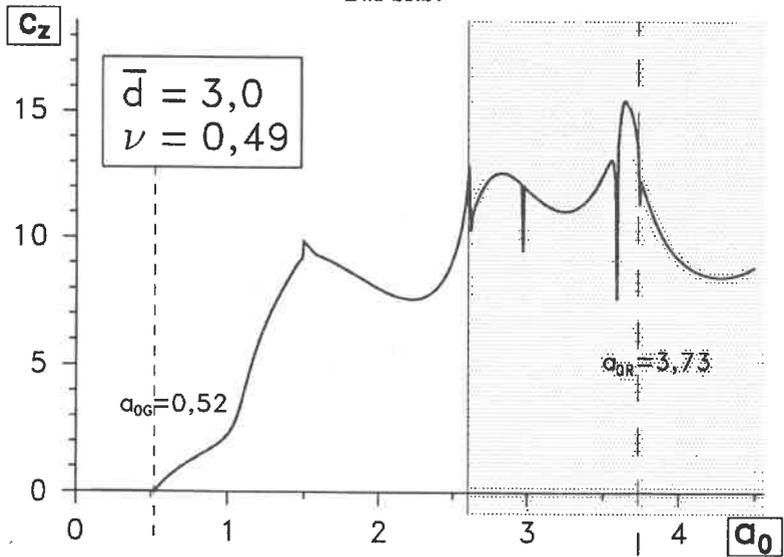


Bild 21.28

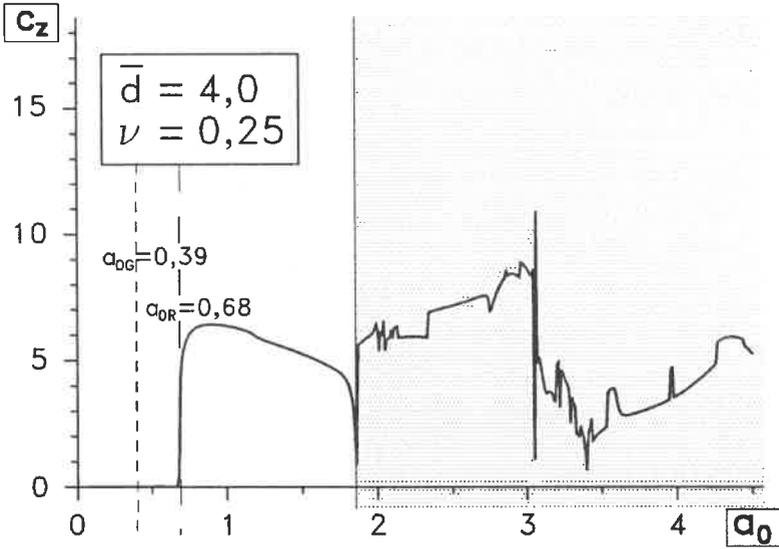


Bild 21.29

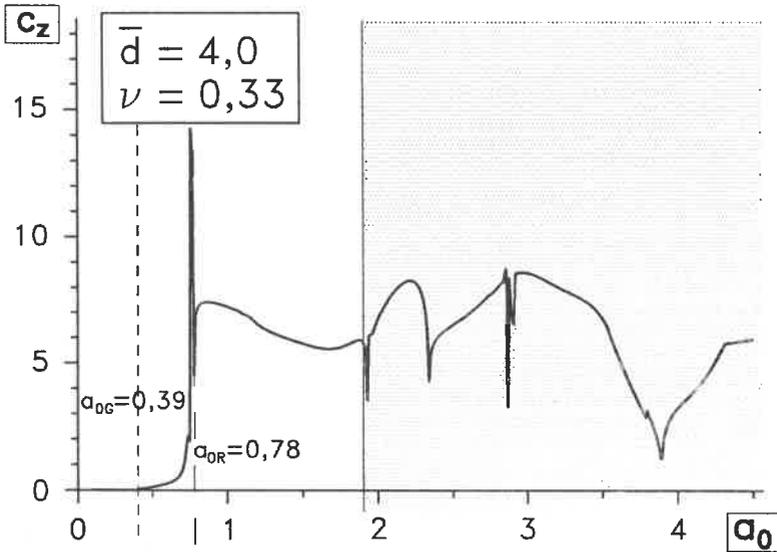


Bild 21.30

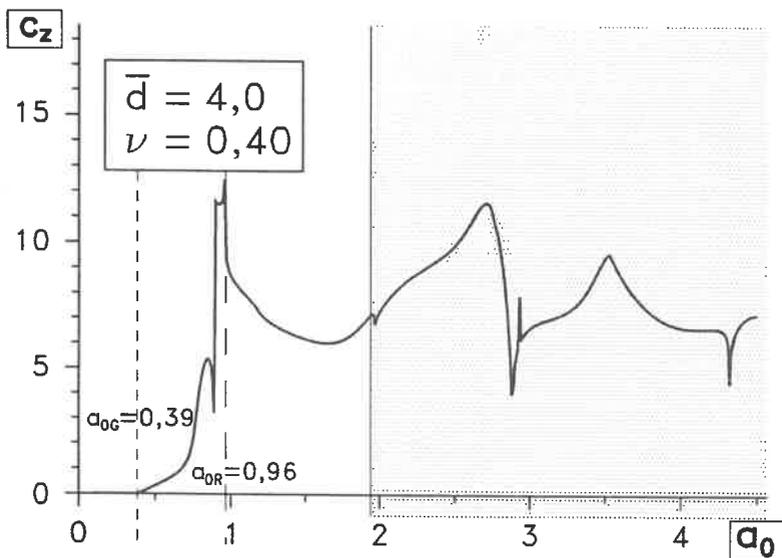


Bild 21.31

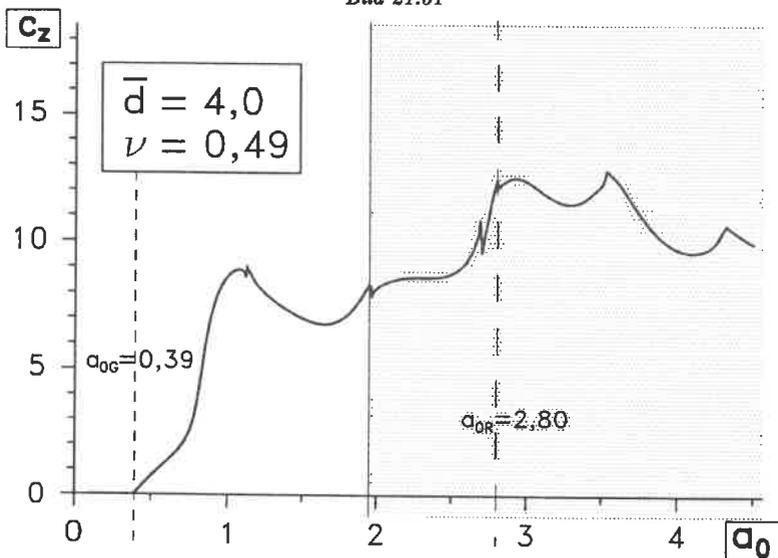


Bild 21.32

Bilder 21.33 bis 21.48
 $\overline{A_0}$ – dimensionslose Amplitude

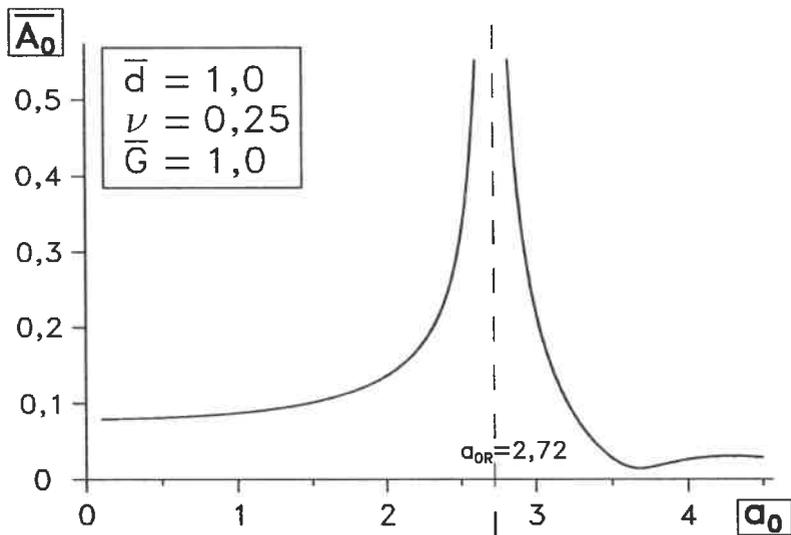


Bild 21.33

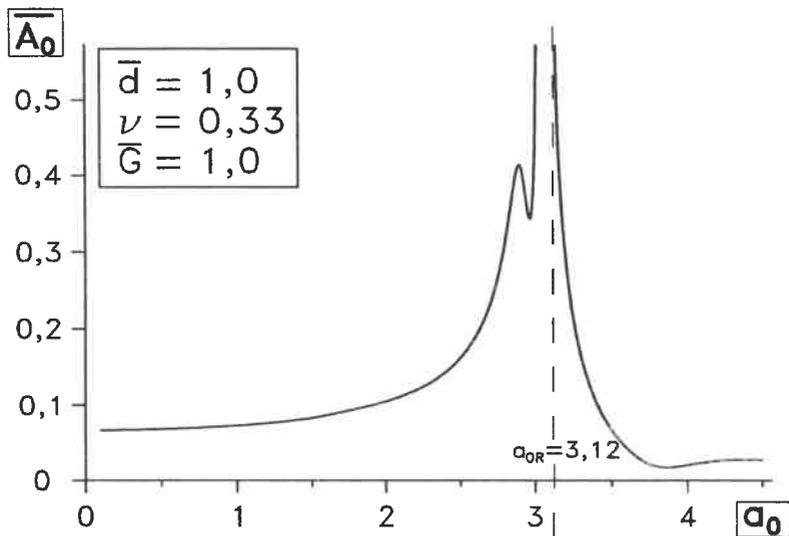


Bild 21.34

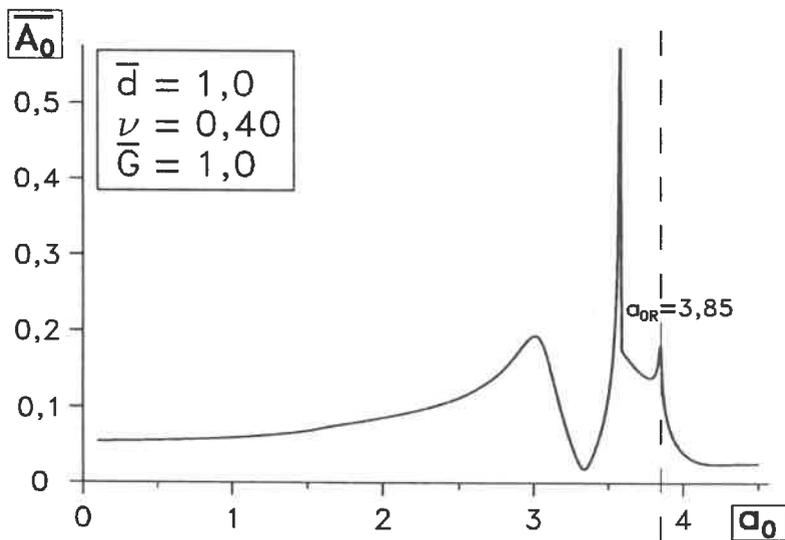


Bild 21.35

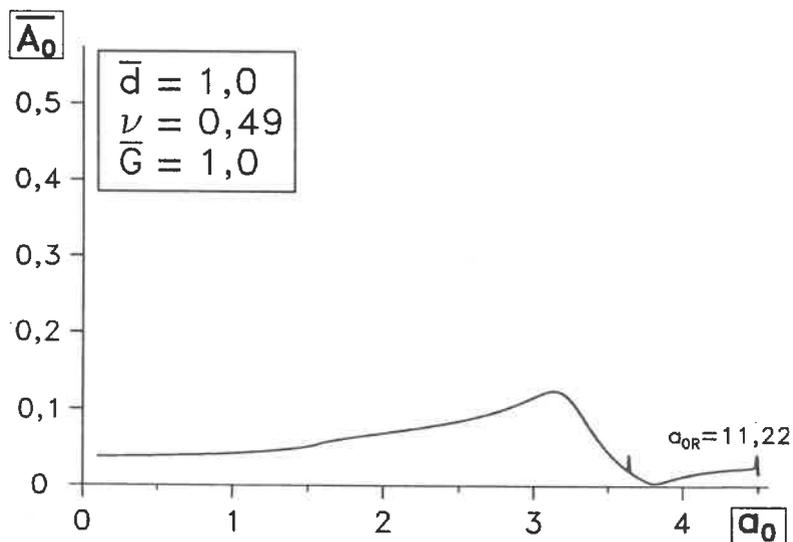


Bild 21.36

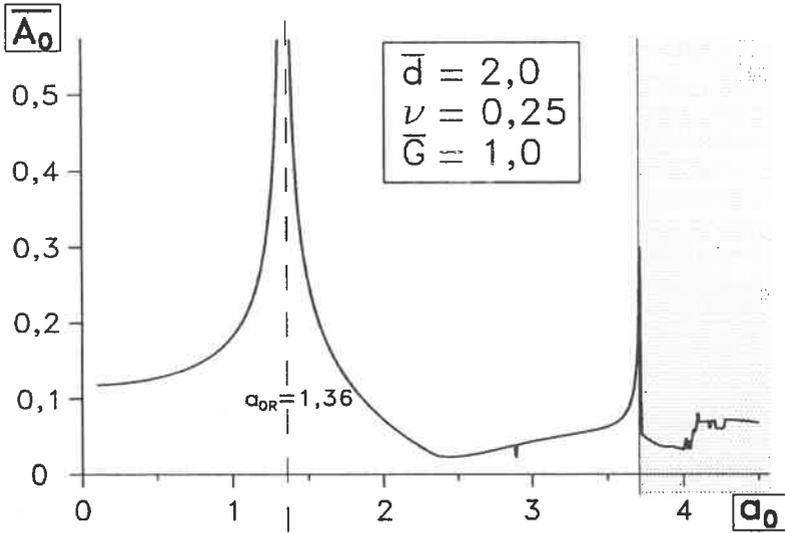


Bild 21.37

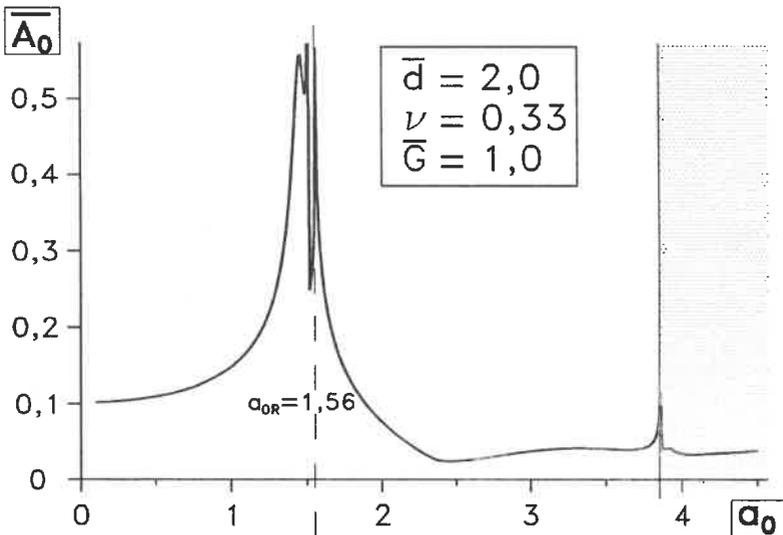


Bild 21.38

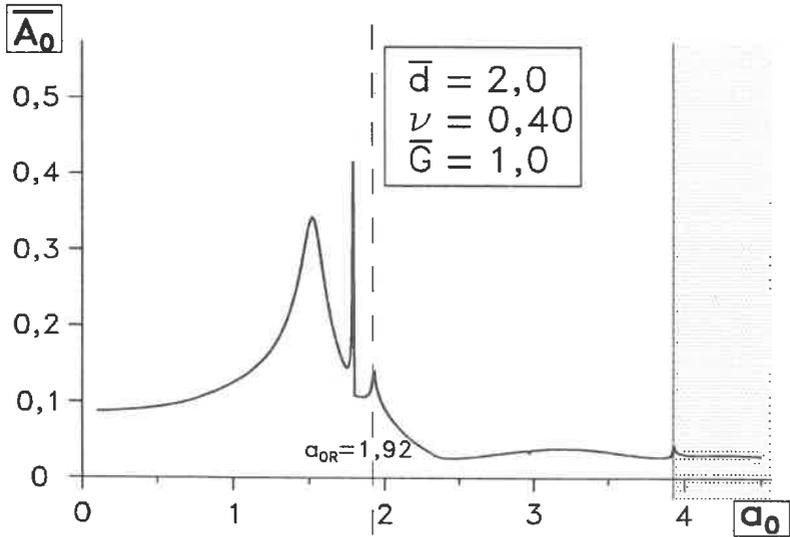


Bild 21.39

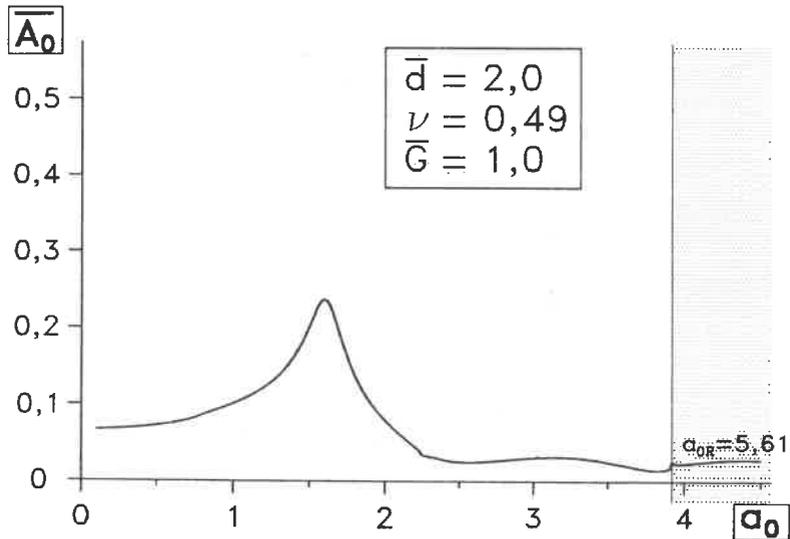


Bild 21.40

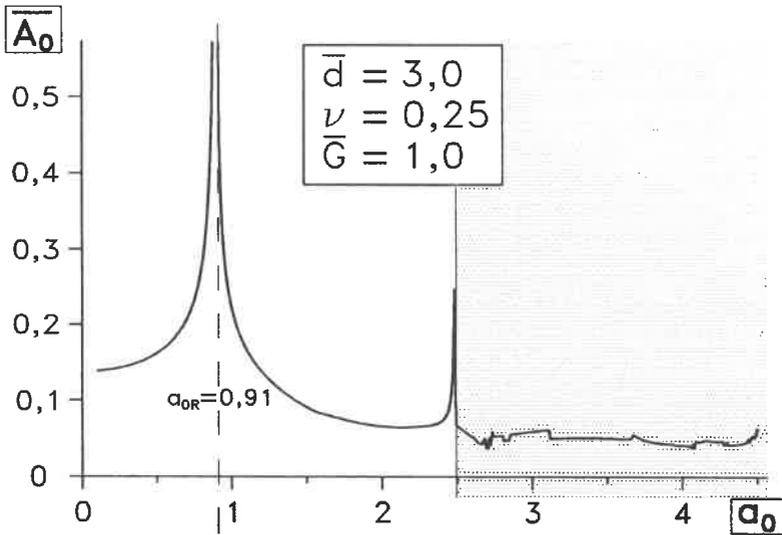


Bild 21.41

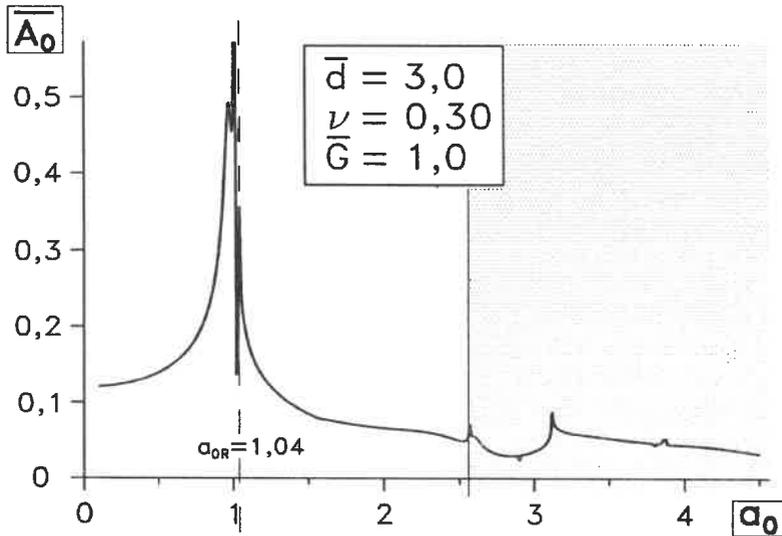


Bild 21.42

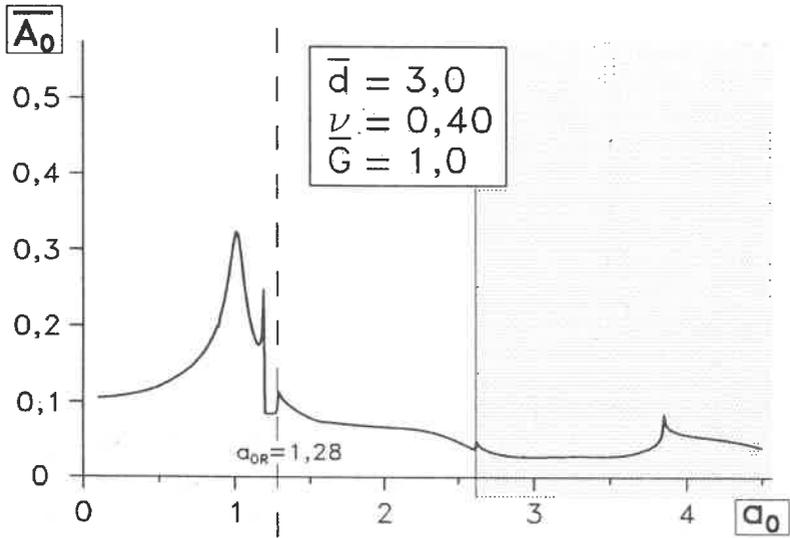


Bild 21.43

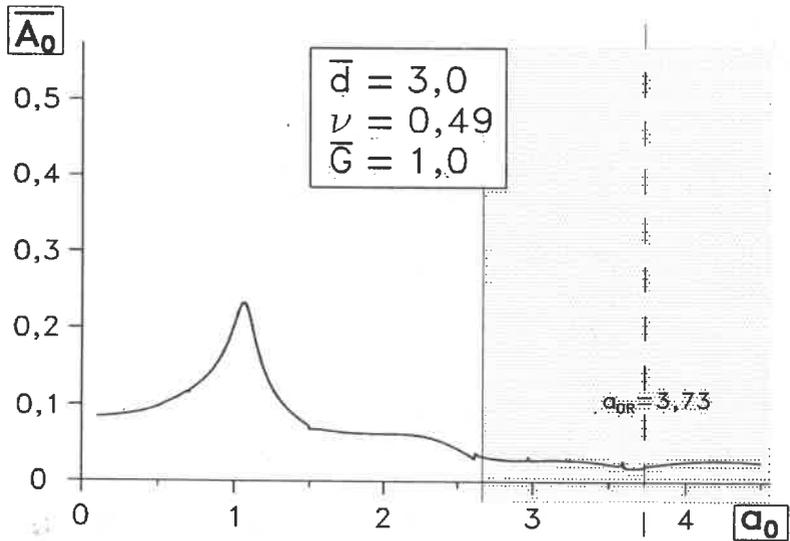


Bild 21.44

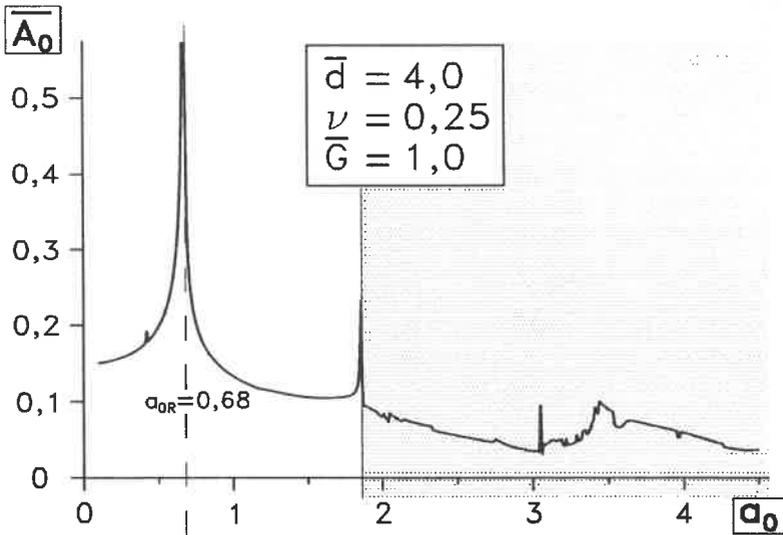


Bild 21.45

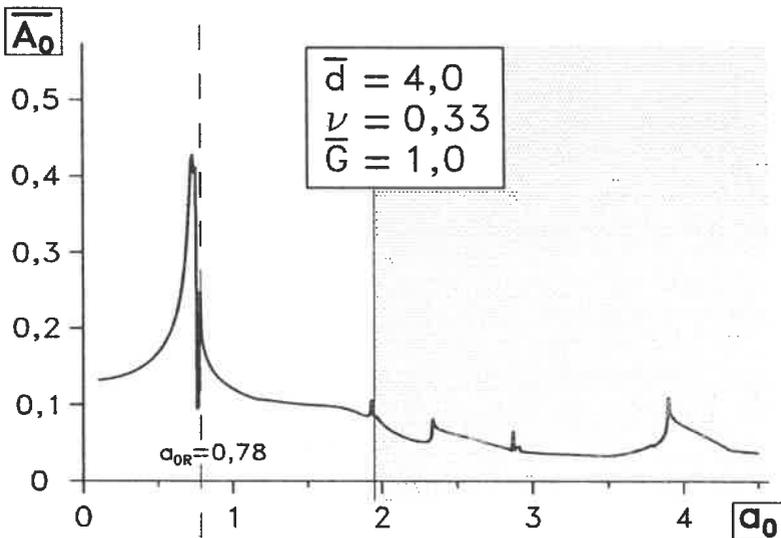


Bild 21.46

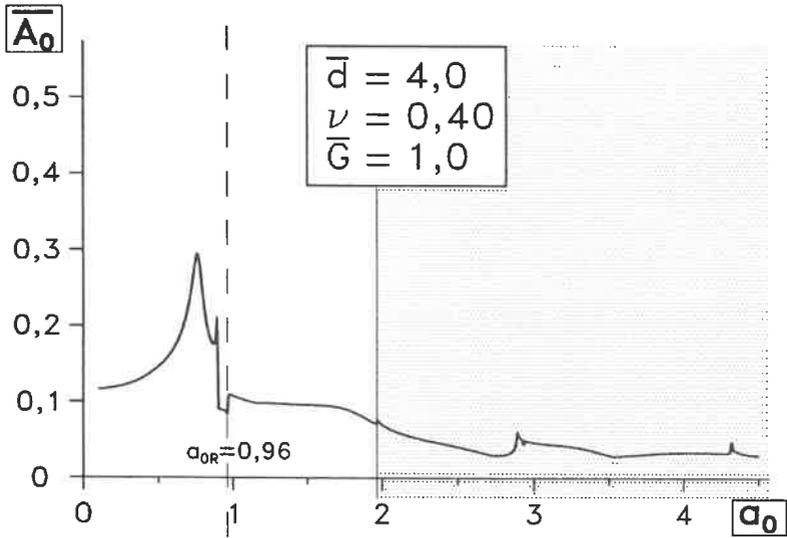


Bild 21.47

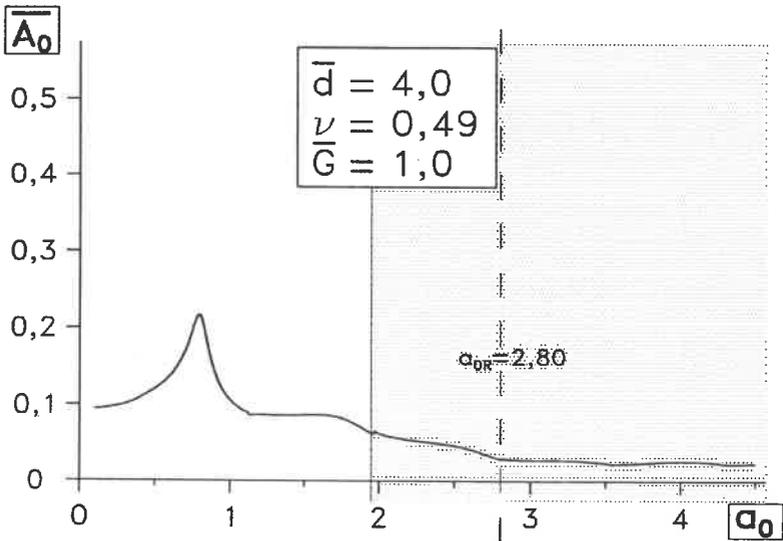
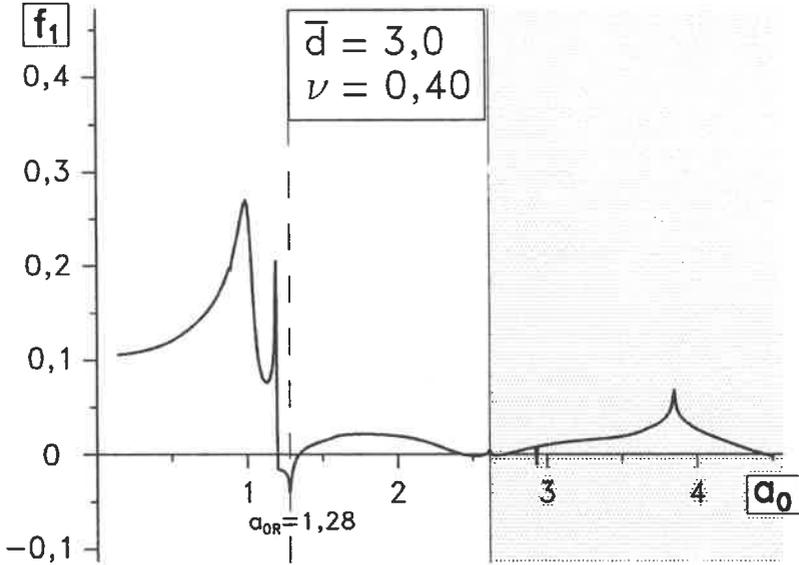
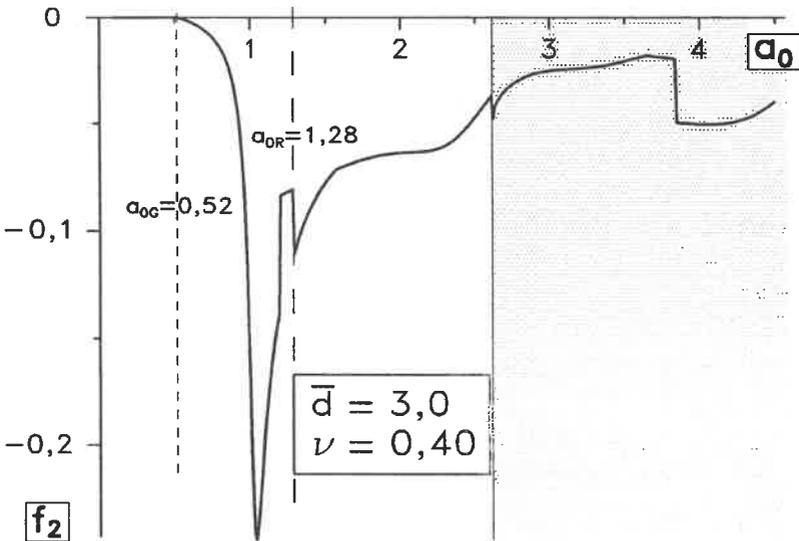


Bild 21.48

Bilder 22 bis 28
Kurven für verschiedene Vergleiche

Bild 22.1: f_1 – Realteil der komplexen NachgiebigkeitBild 22.2: f_2 – Imaginärteil der komplexen Nachgiebigkeit

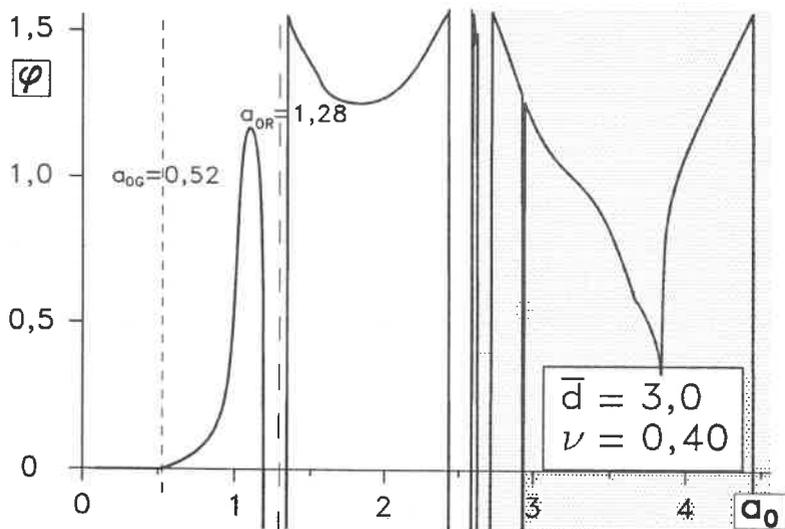


Bild 22.3: φ - Phasenverschiebung

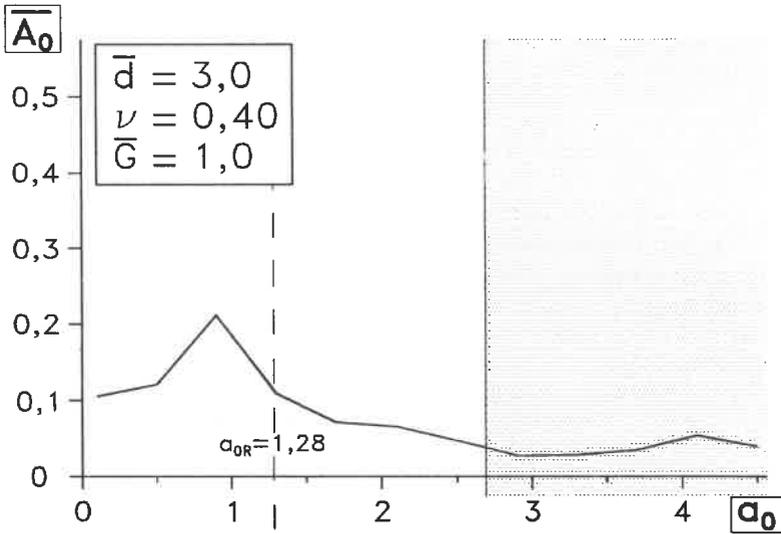


Bild 23: Geglättete Amplitudenkurve \bar{A}_0 zum Vergleich mit 21.43

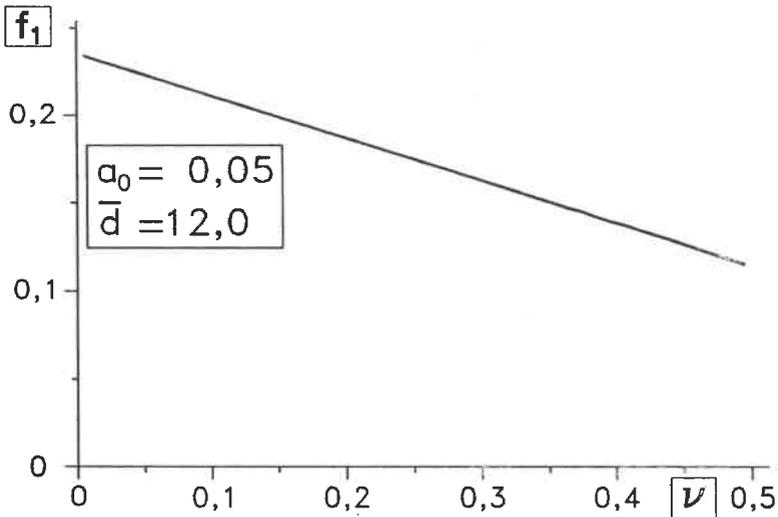


Bild 24: Quasistatische Nachgiebigkeit $f_1(\nu)$ bei sehr großer Schichtdicke

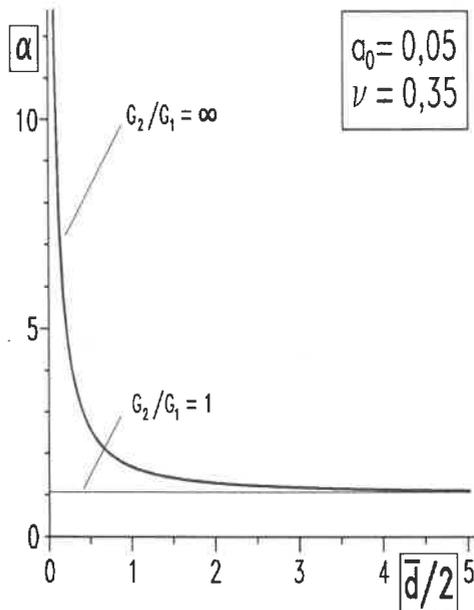


Bild 25.1: Quasistatische Steifigkeit $k_z(\bar{d})$

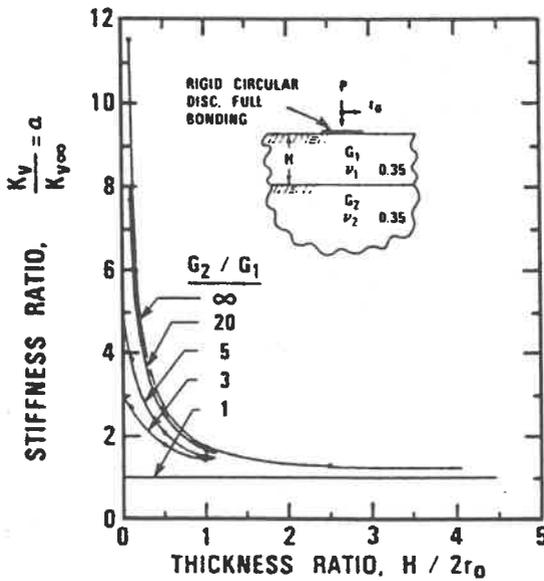


Bild 25.2: Statische Steifigkeit $k_z(\bar{d})$ nach [44]

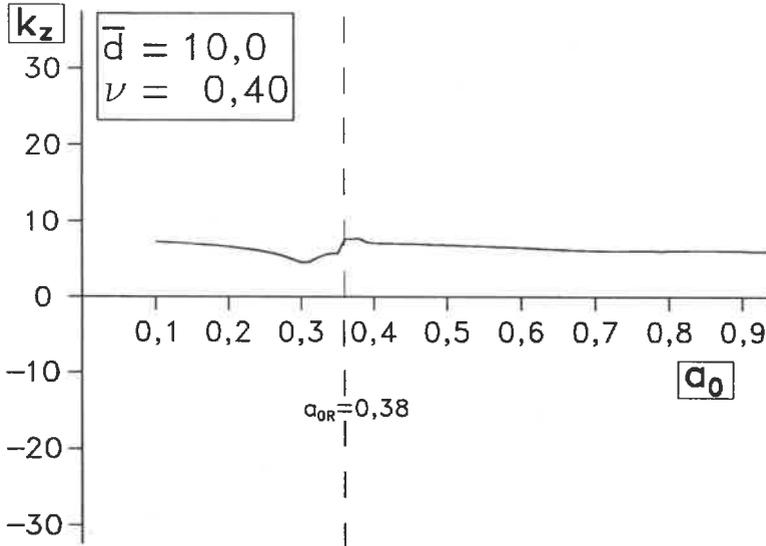


Bild 26.1: Steifigkeit $k_z(\bar{d} = 10)$ zum Vergleich mit Halbraumlösungen

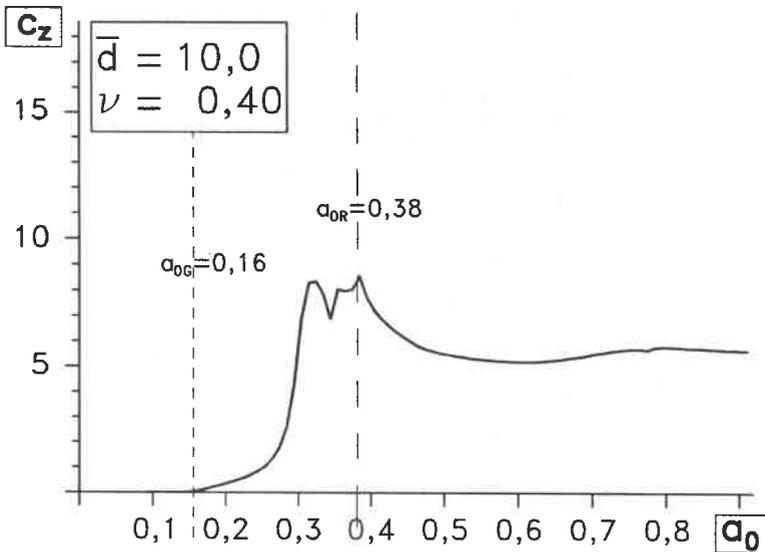


Bild 26.2: Dämpfung $c_z(\bar{d} = 10)$ zum Vergleich mit Halbraumlösungen

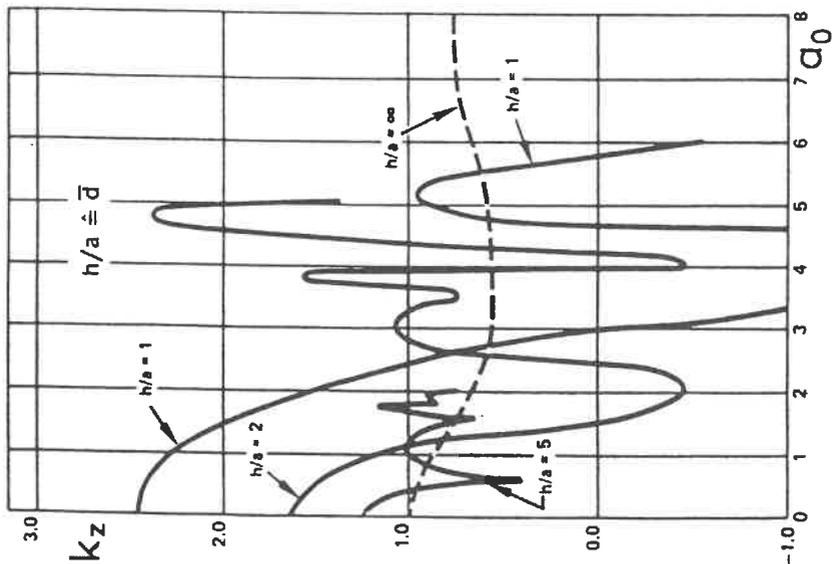


Bild 27.1: Steifigkeit k_z nach [56] zum Vergleich mit 21.2/6/10/14

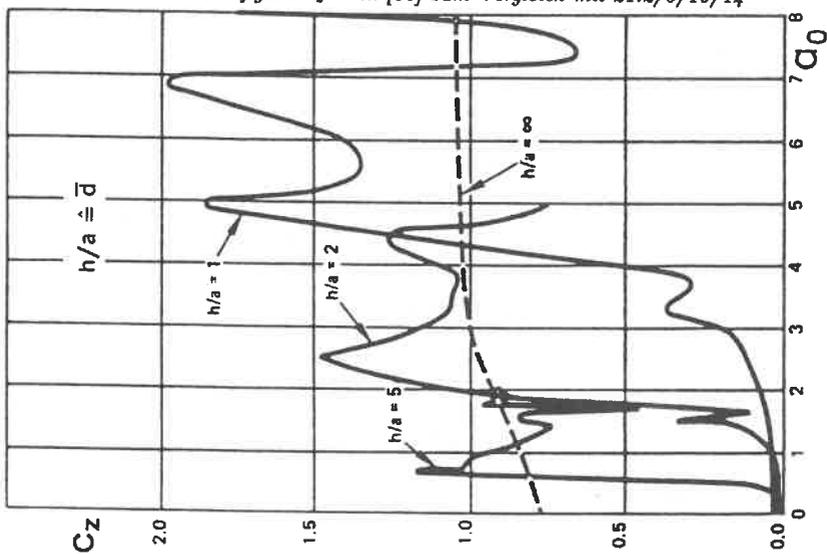


Bild 27.2: Dämpfung c_z nach [56] zum Vergleich mit 21.18/22/26/30

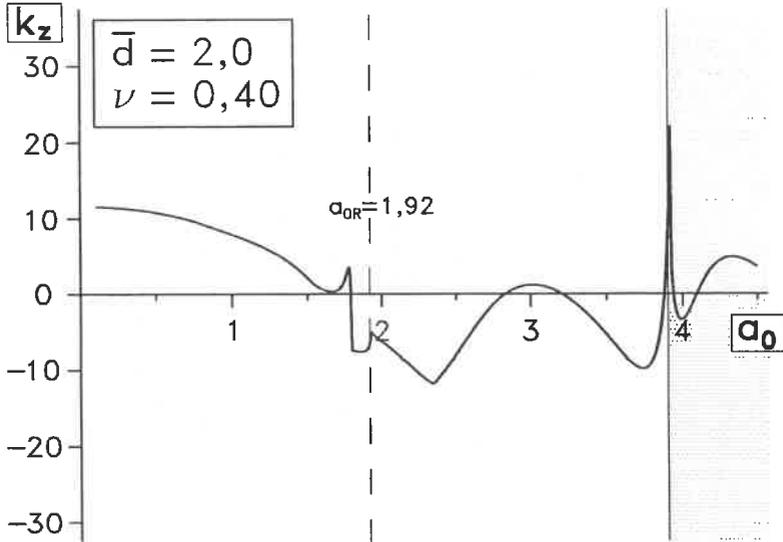


Bild 28.1: Steifigkeit k_z bei konstanter Spannungsverteilung zum Vergleich mit 21.7

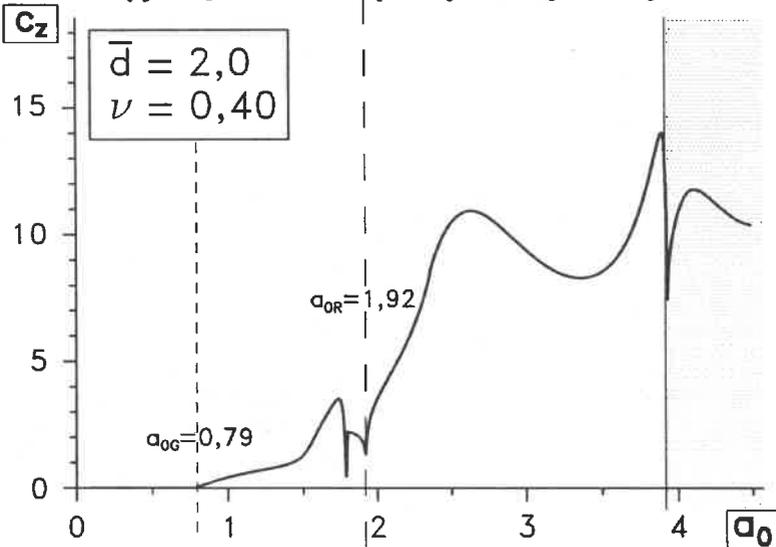


Bild 28.2: Dämpfung c_z bei konstanter Spannungsverteilung zum Vergleich mit 21.23

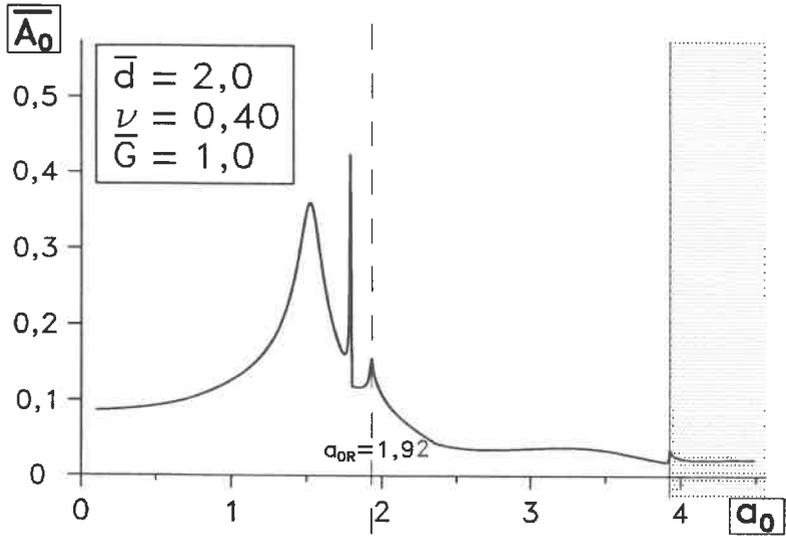


Bild 28.3: Amplitude \bar{A}_0 bei konstanter Spannungsverteilung zum Vergleich mit 21.39

Bilder 29 und 30
Zur Berechnung benötigte Funktionen und
Zeitverläufe der Vertikalverschiebungen
bei "statischer" und konstanter Spannungsverteilung

Beispiel: $\bar{d} = 2,0$; $\nu = 0,40$; $\bar{G} = 1,0$; $a_0 = 2,0$

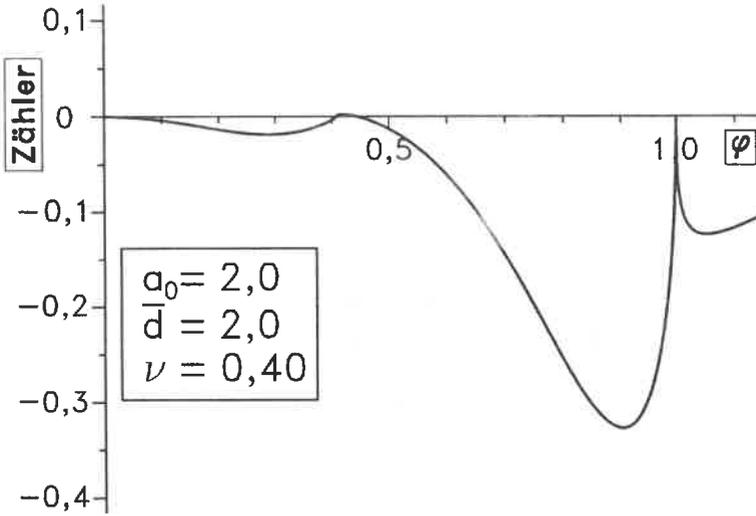


Bild 29.1: Zähler bei "statischer" Spannungsverteilung

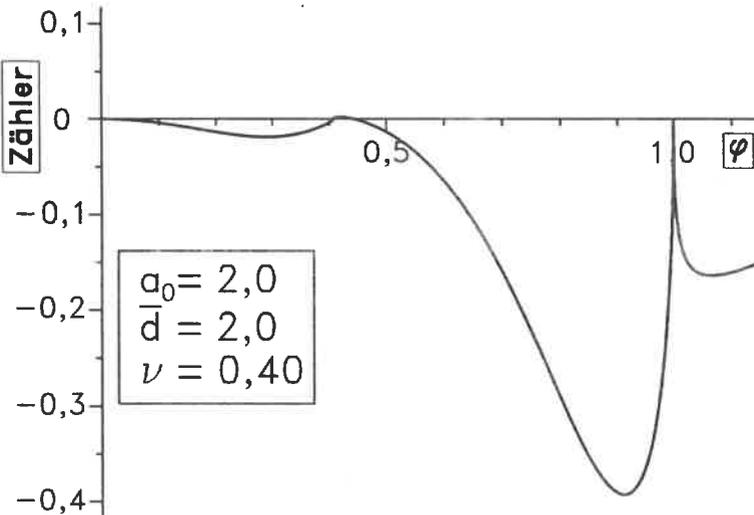


Bild 29.2: Zähler bei konstanter Spannungsverteilung

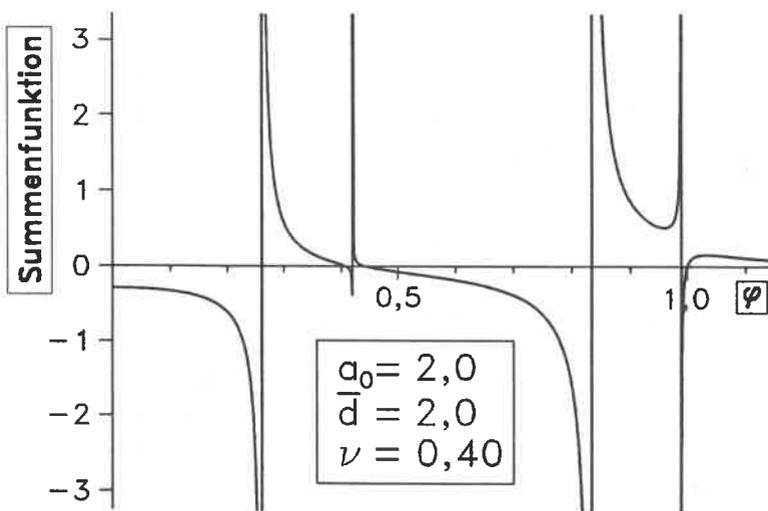


Bild 29.3: Summenfunktion bei "statischer" Spannungsverteilung

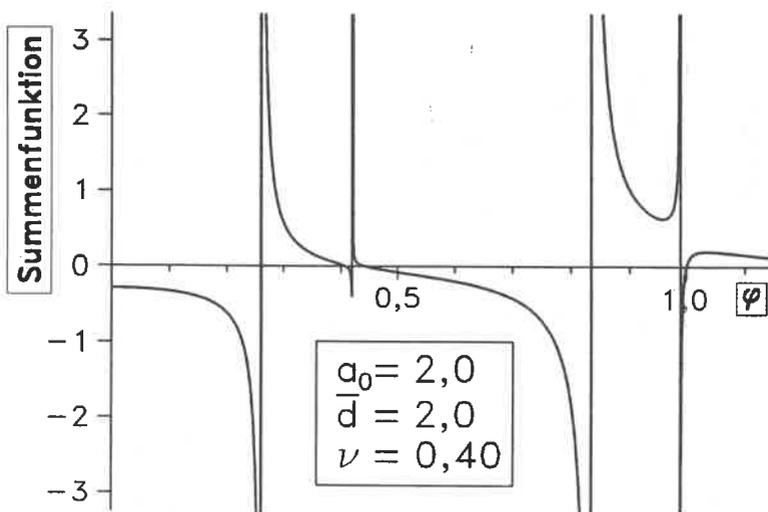


Bild 29.4: Summenfunktion bei konstanter Spannungsverteilung

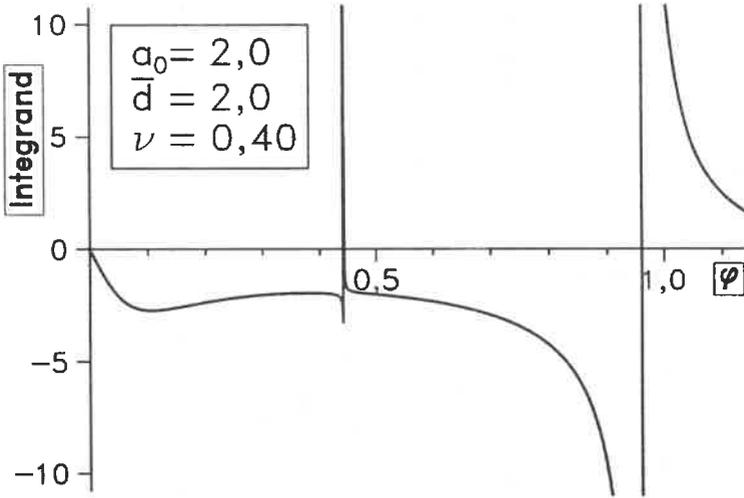


Bild 29.5: Integrand bei "statischer" Spannungsverteilung

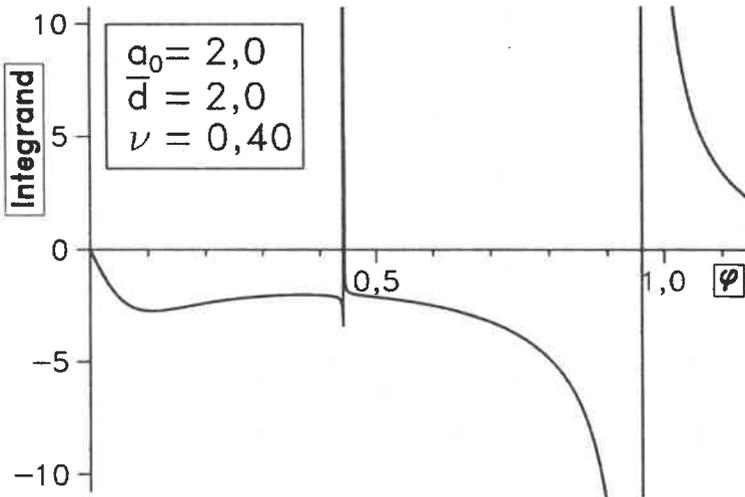


Bild 29.6: Integrand bei konstanter Spannungsverteilung

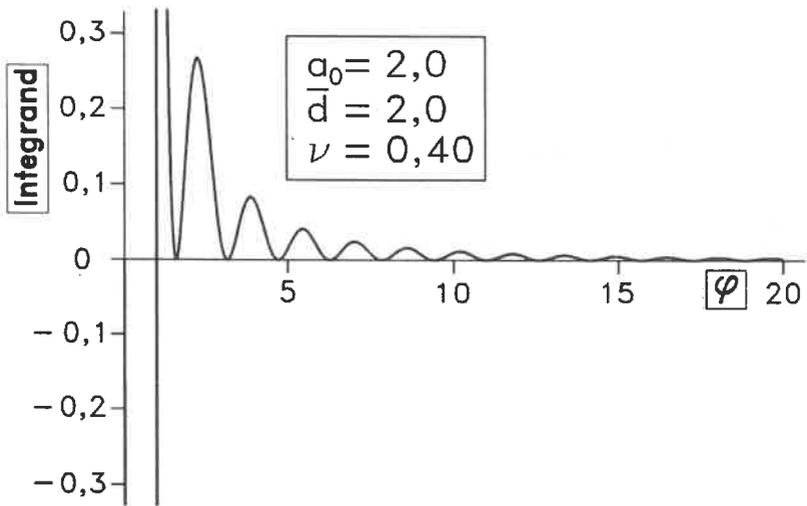


Bild 29.7: Integrand für $\varphi > 1$ bei "statischer" Spannungsverteilung

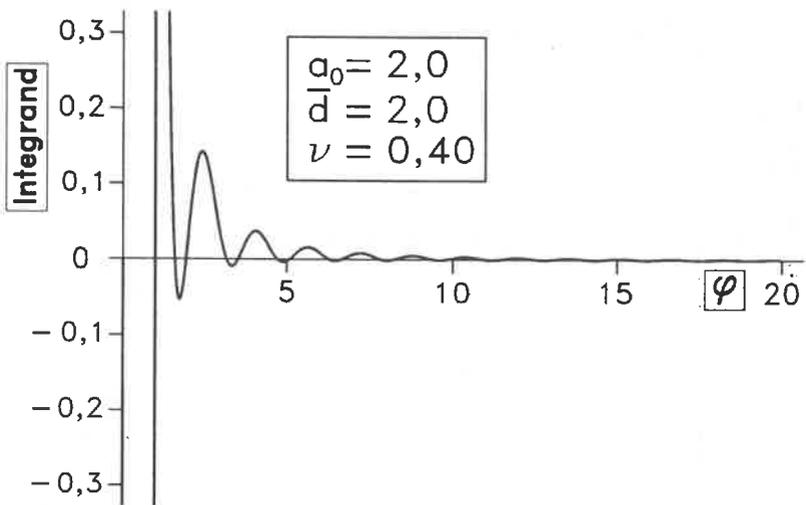


Bild 29.8: Integrand für $\varphi > 1$ bei konstanter Spannungsverteilung

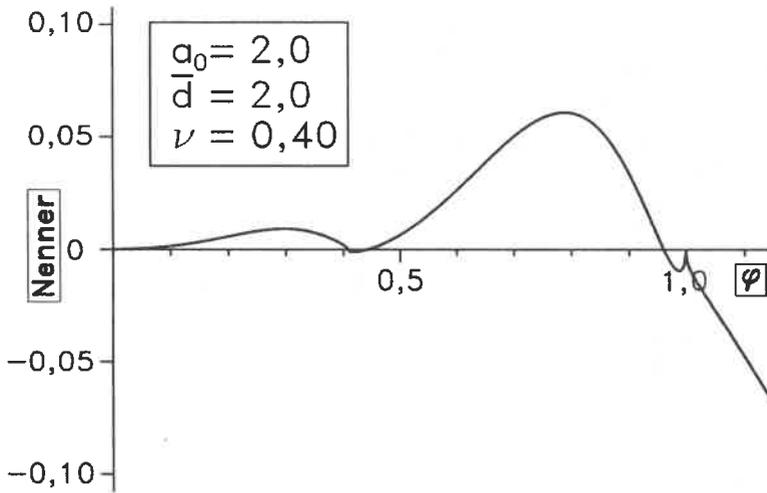


Bild 29.9: Nenner

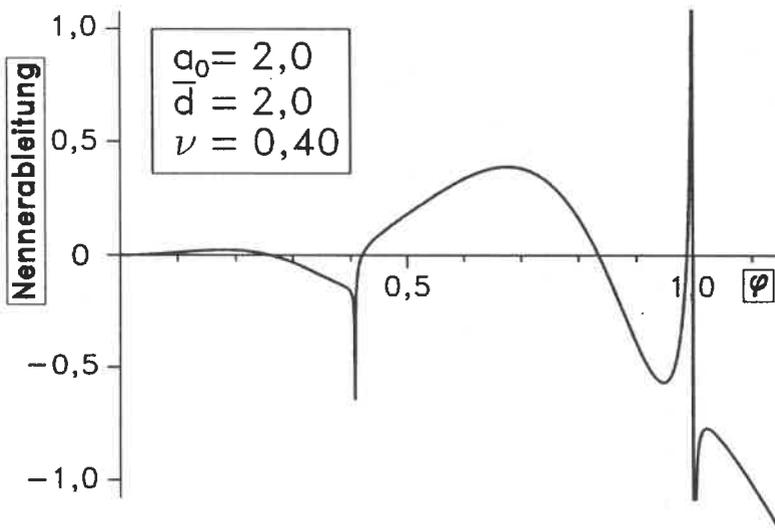
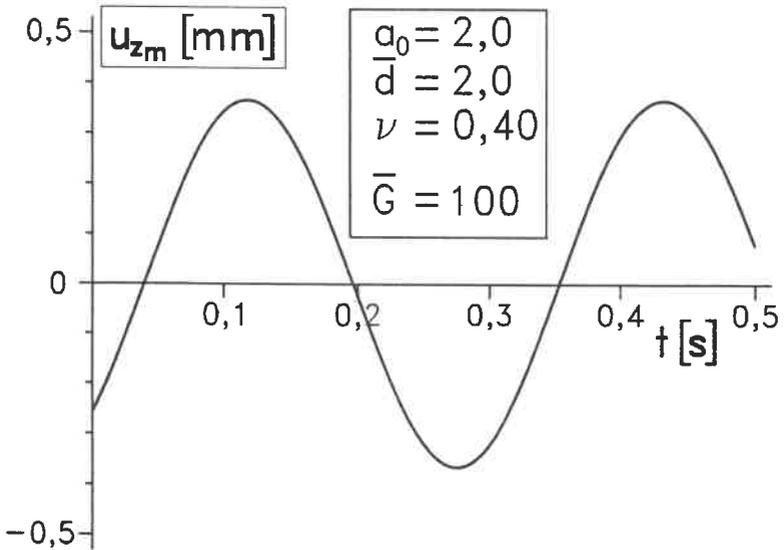
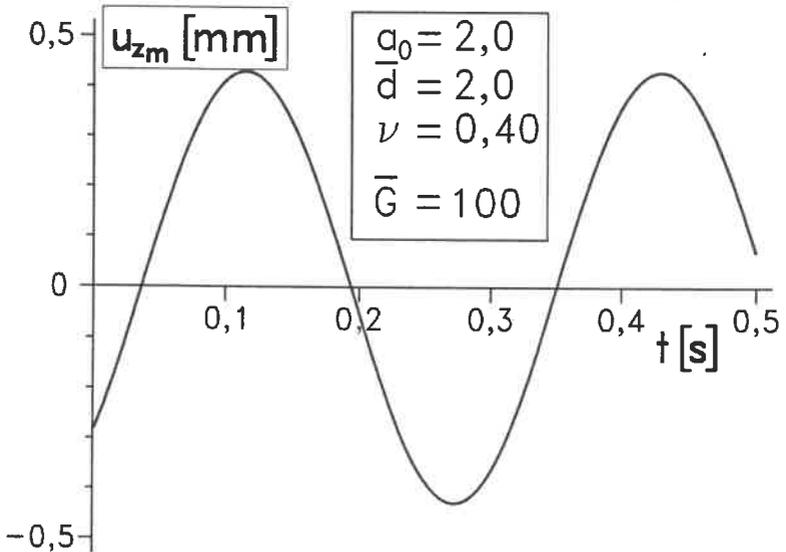


Bild 29.10: Nennerableitung

Bild 30.1: $u_{zm}(t)$ – Vertikalverschiebungen bei "statischer" SpannungsverteilungBild 30.2: $u_{zm}(t)$ – Vertikalverschiebungen bei konstanter Spannungsverteilung

6.3 Viskoelastische Schicht

Für die viskoelastische Schicht wird nur noch die "statische" Spannungsverteilung unter der Platte angenommen, die Unterschiede zu der konstanten Verteilung waren bei der elastischen Schicht gering.

Exemplarisch wird nur ein Lauf des Programms mit der Berechnung weniger Werte vorgenommen, da die Rechenzeiten zu schnell ansteigen: Je Parameterkombination benötigte die COMPAREX mehr als eine Minute reine Rechenzeit.

Aus Testläufen ergab sich, daß im viskoelastischen Fall nicht die gesamten Wertebereiche der Parameter (\bar{G} , a_0 , \bar{d} , B_z und ν nach der Tabelle in Kapitel 3.3.5.1, $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ nach Kapitel 3.4.8) ausgenützt werden können.

Ich wähle daher im Hinblick auf den geplanten Versuchsritter:

$$a = 0,4m; \quad m_0 r_0 = 1,5kg; \quad m = 250kg; \quad \Omega = 100 - 300 \frac{1}{s}.$$

Wählt man als Beispiel die Werte für einen bestimmten Sand, nämlich

$$\rho = 1600 \frac{kg}{m^3}; \quad G = 40 \frac{MN}{m^2}; \quad \nu = 0,33,$$

dann kann man daraus die Parameter bestimmen zu

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,25 - 0,75 \\ \bar{G} &= 47 - 427 \quad (\text{gewählt: } \bar{G} = 100) \\ B_z &= 0,4 \\ \bar{\eta} &= 0,0036 - 0,0107 \quad (\text{gewählt: } \bar{\eta} = 0,01). \end{aligned}$$

Nimmt man noch

$$\begin{aligned} \bar{d} &= 3 \quad (\text{was einer Schichtdicke von 1,20 m entspricht}) \text{ und} \\ \bar{\zeta} &= 0,0001 \end{aligned}$$

hinzu, dann hat man einen vollständigen Parametersatz für einen Vergleich zwischen viskoelastischer und elastischer Schicht.

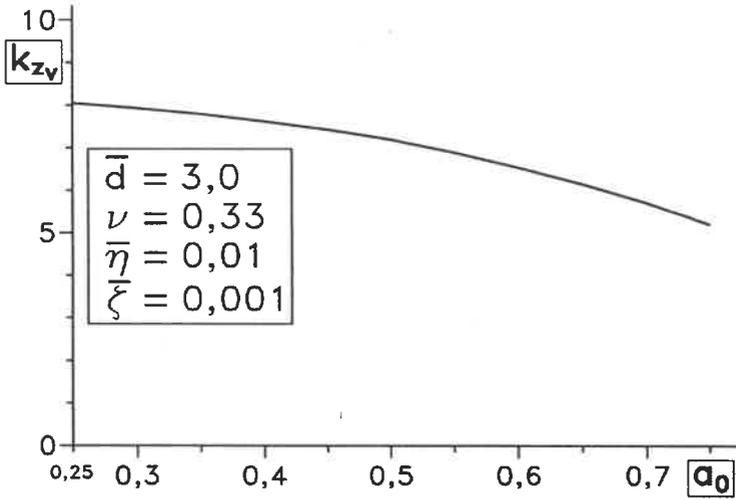
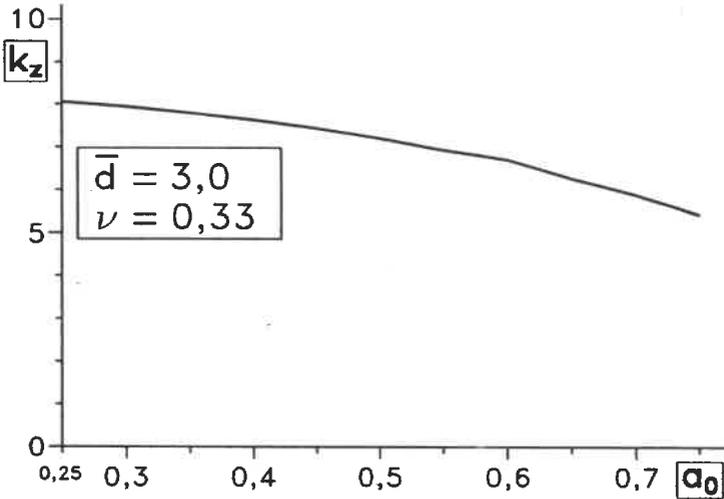
Die Steifigkeiten und die Phase sind in den *Bildern 31.1 - 31.3* dargestellt und können mit den Ergebnissen der elastischen Schicht bei denselben Parametern (*Bilder 32.1 - 32.3*) verglichen werden.

Die Ergebnisse sind in derselben Größenordnung, was sozusagen eine gegenseitige Kontrolle der beiden Programmzweige darstellt.

Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen sind zwar gering, lassen aber das viskoelastische Stoffgesetz durchaus als geeigneten Ansatz für Böden in der Baugruddynamik erscheinen. Weitergehende Aussagen lassen sich allerdings aus diesen Ergebnissen nicht ableiten.

Bilder 31 und 32
Vergleich zwischen viskoelastischer (Bild 31)
und elastischer Schicht (Bild 32)

Anteile der komplexen Steifigkeit und Phasenverschiebung
Beispiel: $\bar{d} = 3,0$; $\nu = 0,33$; $\bar{\eta} = 0,01$; $\bar{\zeta} = 0,0001$

Bild 31.1: Steifigkeit k_{zv} , viskoelastische SchichtBild 32.1: Steifigkeit k_z , elastische Schicht

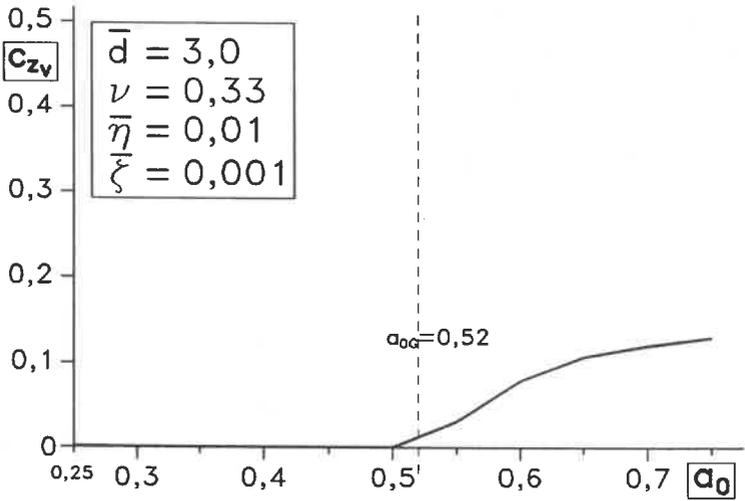


Bild 31.2: Dämpfung c_{zv} , viskoelastische Schicht

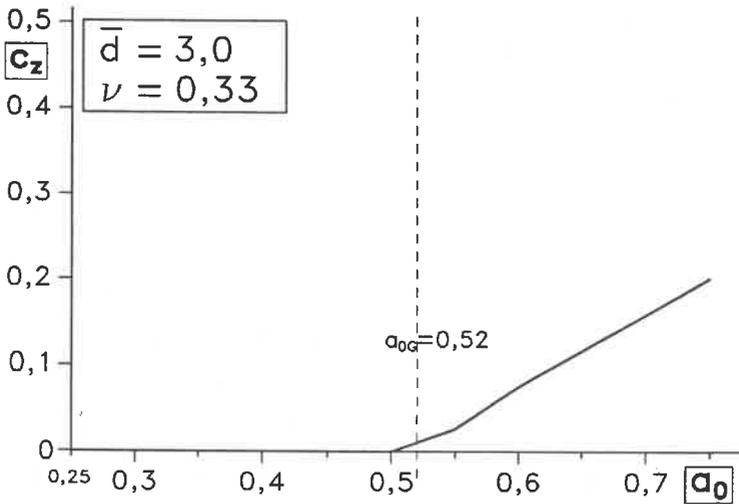
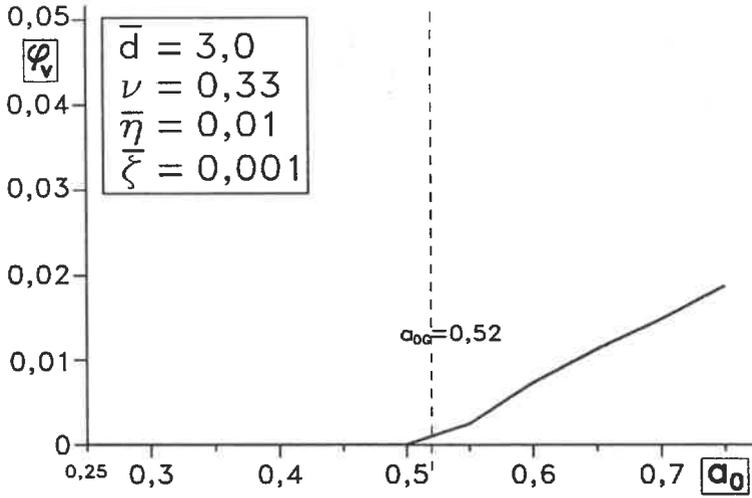
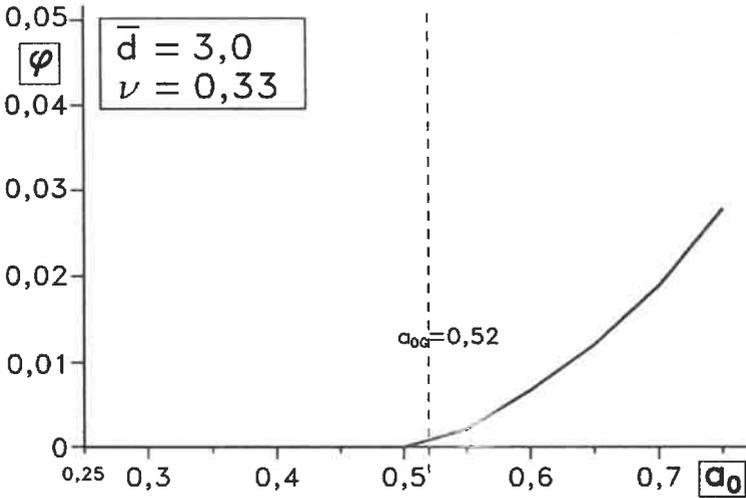


Bild 32.2: Dämpfung c_z , elastische Schicht

Bild 31.9: Phasenverschiebung φ_v , viskoelastische SchichtBild 32.3: Phasenverschiebung φ , elastische Schicht

Kapitel 7

Zuordnung Versuche – Berechnungen

Erregt man während des Versuchs mit verschiedenen Frequenzen Ω und mißt jeweils die (maximale) Amplitude, so läßt sich ein $\Omega - A_m$ -Diagramm erstellen.

Mit der Wahl des Versuchsrüttlers stehen folgende Daten fest:

$$m_0, r_0, a \text{ und } m.$$

Aus anderen Versuchen ermittelt man ρ (und eventuell ν).

Gemessen werden $u(\Omega)$ und $A(\Omega)$ oder $A(\Omega)$ und $\varphi(\Omega)$, wobei Ω in diskreten Schritten zu 2,5 Hz von z.B. 5 bis 70 Hz gesteigert und – wegen der Kontrolle der Reproduzierbarkeit – wieder gesenkt wird.

Durch Vergleich mit den Kurven in Kapitel 6 bzw. ergänzenden Kurven können die baugrunddynamischen Kennwerte G_d und ν , die Schichtdicke d sowie eventuell die Viskositäten η und ζ ermittelt werden.

Eventuell läßt sich auch das inverse Problem geschlossen lösen oder einer der im Komplexen arbeitenden Inversionsalgorithmen verwenden. Man könnte dann über Anpassungsroutinen die gesuchten Kennwerte direkt ausgeben lassen. Selbstverständlich lassen sich die daraus errechenbaren Werte ebenfalls angeben:

- Wellengeschwindigkeiten c_p und c_s ,
- komplexe Moduli \hat{G}

- und andere der im Text erwähnten Werte.

Falls zusätzliche Größen gemessen werden, z.B. die Wellengeschwindigkeiten, lassen sich zur Ermittlung der anderen Werte auch schnellere Wege beschreiten.

Die vorgeschlagene Untersuchungsmethode kann also den jeweiligen Erfordernissen angepaßt werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung (2): Ergebnisse und Ausblick

Für die elastische Schicht lassen sich für alle praktisch relevanten Parameterkombinationen alle erforderlichen Kurven erstellen, sowohl die Steifigkeiten als auch die Nachgiebigkeiten bzw. Amplitude und Phase. Einige davon sind in Kapitel 6.2 dargestellt.

Für die viskoelastische Schicht konnten nur sehr wenig Werte berechnet werden, da die Rechenzeiten und damit die Kosten enorm ansteigen. Falls die Entwicklung der Rechner in dem Tempo wie bisher weitergeht, werden die Rechenkosten in ca. 10 Jahren wohl von untergeordneter Bedeutung sein. Eine Auswertung selbst der wesentlich umfangreicheren Ausdrücke für die Leistungsberechnung (Kapitel 5), die jetzt noch ziemlich utopisch erscheint, wird dann vermutlich auf den Nachfolgern der heutigen Workstations möglich sein.

Neuere Untersuchungen in einem etwas anderen Zusammenhang [84] bestätigen die Richtigkeit meiner Annahme eines viskoelastischen Stoffgesetzes für den Boden. Zur Erfassung der Viskoelastizität ist eventuell $\bar{\zeta} = 0$ ausreichend. Die Tendenzen sind in den entsprechenden Bildern in Kapitel 6.3 zu erkennen.

Mit dieser Arbeit ist das Thema nicht abschließend behandelt. Es bleiben noch genügend offene Fragen und Probleme übrig:

- die Zuordnung gemessener Werte zu den gerechneten Kurven ist zu automatisieren,
- das Testexemplar eines Versuchsrüttlerns ist herzustellen, und damit sind

- Kalibrierungsversuche zu machen,

bevor die *Ermittlung dynamischer Bodenkennwerte* (oder wie es nach dem Arbeitskreis 9 der DGEK künftig heißen soll: “bodendynamischer Kennwerte”) *in situ aus der Systemantwort des Erregers* erfolgen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. (ed.). *Handbook of Mathematical Functions*. 9. Auflage, Dover Publications, Inc., New York 1970
- [2] ACHENBACH, J.D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland Publishing Company Amsterdam/London 1973
- [3] ANTES, H.; OTTENSTREUER, M.; SCHMID, G. *Randelemente (Seminar für Konstruktiven Ingenieurbau und Mechanik im Wintersemester 1981/82 Ruhr-Universität Bochum)*. Techn.-Wissensch. Mitt. Inst. Konstr. Ingenieurbau 82-2
- [4] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press New York/London 1966
- [5] ARNOLD, R.N.; BYCROFT, G.N.; WARBURTON, G.B. *Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid*. J. Appl. Mech. 22 (1955) 391 - 400
- [6] AUERSCH, L. *Wellenausbreitung durch eine Bodenschicht*. Die Bautechnik 7 (1981) 229 - 236
- [7] AWOJOBI, A.O. *Torsional Vibration of a Rigid Circular Body on an Infinite Elastic Stratum*. Int. J. Solids Struct. 5 (1969) 369 - 378
- [8] AWOJOBI, A.O. *Torsional Vibration of a Rigid Circular Body on a Non-Homogeneous Elastic Stratum*. Quart. J. Mech. Appl. Math. XXVI (1973) 235 - 247
- [9] AWOJOBI, A.O.; GIBSON, R.E. *Plane Strain and Axially Symmetric Problems of a Linearly Nonhomogeneous Elastic Half-Space*. Quart. J. Mech. Appl. Math. XXVI (1973) 285 - 302
- [10] AWOJOBI, A.O. *Vibration of Rigid Bodies on Non-Homogeneous Semi-Infinite Elastic Media*. Quart. J. Mech. Appl. Math. XXVI (1973) 483 - 498

- [11] BALLARD, R.F. *Method for Crosshole Seismic Testing*. J. Geot. Eng. Div. ASCE 102 (1975) 1261 – 1273
- [12] BATTENMANN; KÖHLER. *Elastomere Federung, elastische Lagerungen*. Verlag W. Ernst & Sohn Berlin/München/Düsseldorf 1982
- [13] BAULE, H.; MÜLLER, E. *Messung elastischer Eigenschaften von Gesteinen* in: FLÜGGE, S. (ed.). *Handbuch der Physik, Bd. XLVII*. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956
- [14] BEDNARCZYK, H. *Propagation of Light in Optically Active Materials*. Vortragsunterlagen CISM, Udine 1983
- [15] BEDNARCZYK, H. *Vorlesungen über Technische Mechanik Teile I – IV*. Manuskripte des Instituts für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I der Universität Stuttgart 1990, 1989, 1986
- [16] BLAND, D.R. *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Pergamon Press Oxford et al. 1960
- [17] BYCROFT, G.N. *Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum*. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 248 (1956) 327 – 368
- [18] CHOPRA, A.K.; PENZIEN, J. *Earthquake Response of Structures Including Structure-Soil Interaction*. Proc. 6th World Conf. Earthq. Eng., New Delhi 1977
- [19] CHRISTENSEN, R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. Academic Press New York/London 1971
- [20] CUNNY, R.W.; FRY, Z.B. *Vibratory In-Situ and Laboratory Soil Moduli Compared*. J. Soil Mech. Found. Div. ASCE 99 SM12(1973) 1055 – 1076
- [21] DOETSCH, G. *Handbuch der LAPLACE-Transformation, Bände I – III*. Birkhäuser Verlag Basel/(Stuttgart) 1950, 1955, 1956
- [22] DOETSCH, G. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der LAPLACE-Transformation*. Verlag R. Oldenbourg München 1956
- [23] DOETSCH, G. *Einführung in Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation*. Birkhäuser Verlag Basel/Stuttgart 1958

- [24] DOLLING, HOLZLÖHNER, HÜRTGEN, KLEIN. *Statusbericht Baugrunddynamik*. Statusbericht Nr. 1 Institut für Reaktorsicherheit der Technischen Überwachungsvereine e.V. Köln 1973
- [25] EHLERS, G. *Der Baugrund als Federung in schwingenden Systemen*. Beton und Eisen 41 (1942) 197 - 203
- [26] ERINGEN, A.C.; SUHUBI, E.S. *Elastodynamics Vol. II: Linear Theory*. Academic Press New York/San Francisco/London 1975
- [27] FAULHABER, R. *Zur Ausbreitung ebener Wellenfelder in einer Bodenschicht*. Diplomarbeit am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart 1985
- [28] FLÜGGE, W. (ed.). *Handbook of Engineering Mechanics*. Mc Graw-Hill, New York et al. 1962
- [29] FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*. Blaisdell Publishing Company Waltham/Toronto/London 1967
- [30] GAUL, L. *Dynamische Wechselwirkung eines Fundamentes mit dem viskoelastischen Halbraum*. Ingenieur-Archiv 46 (1977) 401 - 422
- [31] GAUL, L.; PLENGE, M. *Ein Baugrundmodell für geschichtete Baugründe mit viskoelastischem Stoffverhalten*. Z. Angew. Math. Mech. 63 (1983) T 50 - T 53
- [32] GAZETAS, G. *Dynamic Compliance Matrix of Rigid Strip Footing Bonded to a Viscoelastic Cross Anisotropic Halfspace*. Int. J. Mech. Sc. 23 (1981) 547 - 559
- [33] GLADWELL, G.M.L. *The Forced Torsional Vibration of an Elastic Stratum*. Int. J. Eng. Sc. 7 (1969) 1011 - 1024
- [34] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press New York/London 1965
- [35] HARDIN, B.O.; DRNEVICH, V.P. *Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects*. J. Soil Mech. Found. Div. 98 SM6 (1972) 603 - 624
- [36] HAUPT, W. *Ermittlung der dynamischen Bodenkennwerte für Maschinengründungen*. VDI-Berichte Nr. 320 (1978) 225 - 232

- [37] HAUPT, W. (ed.). *Bodendynamik. Grundlagen und Anwendungen*. F. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden 1986
- [38] HAYES, M. *Viscoelastic Plane Waves*
in: MAINARDI, F. (ed.). *Wave Propagation in Viscoelastic Media*. Pitman Advanced Publishing Program Boston et al. 1982
- [39] HEINRICH, G. *Der Energiestrom in elastischen Medien*. Österr. Ing.-Archiv 9 (1955) 148 – 156
- [40] HOPKINS, H.G. *Dynamic Expansion of Spherical Cavities in Metals*
in: SNEDDON, I.N.; HILL, R. (ed.). *Progress in Solid Mechanics Vol. I*. North-Holland Publishing Company Amsterdam 1964
- [41] HÜBNER, W. *Die Wechselwirkung zwischen Schwinger und Antrieb bei erzwungenen Schwingungen*. Ing.-Archiv 34 (1965) 411 – 422
- [42] HUH, Y.; WILLMS, G. *Ermittlung des Schwingungsverhaltens starrer Gründungskörper mit der Randelementmethode*. SFB 151 – Tragwerksdynamik Ruhr-Universität Bochum, Bericht Nr. 2 (1984)
- [43] JAHNKE, EMDE, LÖSCH. *Tafeln höherer Funktionen*. 7. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart 1966
- [44] KAGAWA, T.; KRAFT, L.M.JR. *Machine Foundations on Layered Soil Deposits*. Proc. X. ICSMFE Stockholm 1981, Vol. 3, 249 – 252
- [45] KANY, M.; HAUPT, W. et al. *Praktische Fragen der Bodendynamik*. Seminarunterlage zum Seminar der Technischen Akademie Wuppertal 1981
- [46] KLAPPERICH, H.; SAVIDIS, S.; MÜLLER-KIRCHENBAUER, H.; SARFELD, W. *Wechselwirkung zwischen Boden und eingebetteten Bauwerken infolge seismischer Belastung*. Bauingenieur 60 (1985) 411 – 417
- [47] KOLSKY, H. *Stress Waves in Solids*. Dover Publications, Inc., New York 1963
- [48] KOTSCHIN, N.J.; KIBEL, I.A.; ROSE, N.W. *Theoretische Hydromechanik Band I*. Akademie-Verlag Berlin 1954
- [49] KRAMER, H.. *Einwirkung von Bodenerschütterungen auf Bauwerke*. Bauingenieur 60 (1985) 281 – 285

- [50] LAMB, H.. *On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 203 (1904) 1 - 42.
- [51] LANDOLT, BÖRNSTEIN. *Zahlenwerte und Funktionen aus ...*
... *Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik, 6. Auflage, II. Band, Teil 5 a und IV. Band, Teil 1*
... *Naturwissenschaften und Technik, Neue Serie, Gruppe V, Band 1 b*. Springer-Verlag Berlin/..../(New York) 1969, 1955, 1982
- [52] LAZAN, B.J. *Energy Dissipation Mechanisms in Structures, with Particular Reference to Material Damping*
in: RUZICKA, J.E. (ed.). *Structural Damping*. Pergamon Press Oxford et al. 1960
- [53] LEITMANN, M.J. *The Linear Theory of Viscoelasticity*
in: FLÜGGE, S. (ed.). *Handbuch der Physik, Band VIa/3*. Springer-Verlag Berlin/.. 1973
- [54] LORENZ, H. *Grundbau-Dynamik*. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960
- [55] LORENZ, H.; KLEIN, G. *Bodendynamik und Erdbeben*
in: SMOLTZYK, U. (ed.). *Grundbau-Taschenbuch Teil 1*. 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn Berlin/München/Düsseldorf 1980
- [56] LUCO, J.E. *Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium*. Nuclear Engineering and Design 31 (1974) 204 - 217
- [57] LYSMER, J.; RICHART, F.E.JR. *Dynamic Response of Footings to Vertical Loading*. J. Soil Mech. Found. Div. ASCE 92 SM1 (1966) 65 - 91
- [58] LYSMER, J.; UDAKA, T.; TSAI, C.-F.; SEED, H.B. *FLUSH - A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems*. Rep. No. EERC 75-30, Univ. of California, Berkeley 1975
- [59] MEDINA, F.; TAYLOR, R.L. *Finite Element Techniques for Problems of Unbounded Domains*. Int. J. Num. Meth. Eng. 19 (1983) 1209 - 1226
- [60] MOLENKAMP, F.; SMITH, I.M. *Hysteretic and Viscous Material Damping*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geom. 4 (1980) 293 - 311

- [61] NEWMARK, N.M.; ROSENBLUETH, E. *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1971
- [62] OTTENSTREUER, M. *Ein Beitrag zur Darstellung der Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Baugrund unter Verwendung des Verfahrens der Randelemente*. Dissertation, Ruhr-Univ. Bochum 1981, Techn.-Wissensch. Mitt. Inst. Konstr. Ingenieurbau 81-6
- [63] OTTENSTREUER, M.; SCHMID, G. *Zum Schwingungsverhalten harmonisch erregter Fundamente*
in: DIEKKÄMPER, R. et al. *Strukturmechanik und numerische Verfahren*. Verlagsgesellschaft R. Müller Köln 1982
- [64] PEARSON, C.E. (ed.). *Handbook of Applied Mathematics*. Van Nostrand Reinhold Company New York et al. 1983
- [65] PIESSENS, R.; DE DONCKER-KAPENGA, E.; ÜBERHUBER, C.W.; KAHANER, D.K. *QUADPACK. A Subroutine Package for Automatic Integration*. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1983
- [66] PRESS, W.H.; FLANNERY, B.P.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.D. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press New York 1986
- [67] RAUSCH, E. *Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen*. 3. Auflage, VDI-Verlag Düsseldorf 1959
- [68] REISSNER, E. *Stationäre, azialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes*. Ingenieur-Archiv VII (1936) 381 - 396
- [69] RICHART, F.E.JR. *Field and Laboratory Measurements of Dynamic Soil Properties*
in: PRANGE, B. (ed.). *Dynamic Response and Wave Propagation in Soils Vol. 1*. A. A. Balkema Rotterdam 1978
- [70] ROËSSET, J.M.; WOLF, J.P. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Lecture Notes for the Course at ETH Zürich 1984
- [71] RÜCKER, W. *Tabellarische Übersicht analytischer Lösungen dynamisch beanspruchter Fundamente (mit Literaturliste)*. Unveröffentlichte Arbeitsunterlage des Arbeits-

- kreises 9 "Baugruddynamik" der Deutschen Gesellschaft für Erd- und Grundbau 1986
- [72] SCHIMMERL, J. *Beitrag zur näherungsweise Berechnung von Vertikal- und Torsionsschwingungen im schichtweise inhomogenen nichtlinearen, nichtelastischen Baugrund*. Ingenieur-Archiv XXXVII (1968) 81 - 91
- [73] SEZAWA, K. *Further Studies on RAYLEIGH-Waves Having Some Azimutal Distribution*. Bulletin Earthq. Res. Inst. Japan 6 (1929) 1 - 18
- [74] SHERIF, M.A.; ISHIBASHI, I. *Dynamic Shear Moduli for Dry Sands*. J. Geot. Eng. Div. ASCE 102 (1975) 1171 - 1184
- [75] SILVER, M.L.; SEED, H.B. *Deformation Characteristics of Sands under Cyclic Loading*. J. Soil Mech. Found. Div. ASCE 97 SM8 (1971) 1081 - 1098
- [76] SIMONS, H.; PAPAKYRIAKOPOULOS, P. *Stoffgesetze*
in: DFG - Zwischenbericht. *Böschungen, Erddämme, Geländesprünge unter dynamischen Belastungen*. Techn. Univ. Braunschweig 1982
- [77] SMOLT CZYK, U. *Studienunterlagen Bodenmechanik und Grundbau*. Inst. Grundbau u. Bodenmech. Univ. Stuttgart, Ausg. 1984
- [78] SMOLT CZYK, U. (ed.). *Grundbau-Taschenbuch Teil 1*. 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn Berlin/München/Düsseldorf 1990
- [79] v. SOOS, P. *Die Rolle des Baugrunds bei Anwendung der neuen Sicherheitstheorie im Grundbau*. Geotechnik 13 (1990) 82 - 91
- [80] STUDER, J.; ZIEGLER, A. *Bodendynamik*. Springer-Verlag Heidelberg/New York/Tokio 1986
- [81] TASSOULAS, J.L.; KAUSEL, E. *Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Strata*. Int. J. Num. Meth. Eng. 19 (1983) 1005 - 1032
- [82] TYCHONOFF, A.N.; SAMARSKI, A.A. *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1959
- [83] VELETSOS, A.S.; WEI, Y.T. *Lateral and Rocking Vibration of Footings*. J. Soil Mech. Found. Div. ASCE 97 SM9 (1971) 1227 - 1248
- [84] VIELSACK, P. *Pseudoviskosität bei trockener Reibung*. Geotechnik 14 (1991) 11 - 15

- [85] WAAS, G. *Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-Infinite Layered Media*. Dissertation, Univ. of California, Berkeley 1972
- [86] WARBURTON, G.B. *Forced Vibration of a Body on an Elastic Stratum*. J. Appl. Mech. 24 (1957) 55 - 58
- [87] WATSON, G.N. *A Treatise on the Theory of BESSEL Functions*. Cambridge Univ. Press 2. Auflage 1966
- [88] WHITHAM, G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons New York/Chichester etc. 1974
- [89] WHITMAN, R.V. *Analysis of Soil-Structure Interaction. A State-of-the-Art Review*. MIT Soils Publication No. 300 (1972)
- [90] WOODS, R.D. *Measurement of Dynamic Soil Properties. Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. Spec. Conf. Geot. Eng. Div. ASCE Pasadena 1978

Anhang A

Anhang zu Kapitel 3.3.2

Separation der Variablen nach D. BERNOULLI für die Verschiebungen direkt

Zunächst werden für (3.7, 3.8) harmonische Lösungen in der Zeit angesetzt

$$u_i(r, z, t) = e^{i\omega t} \bar{u}_i(r, z). \quad (\text{A.1})$$

Nun werden die Terme $u_{i,tt}$, $\Theta_{,i}$ und Δu_i gebildet und in (3.7, 3.8) eingesetzt

$$e^{i\omega t} \left[-\rho\omega^2 \bar{u}_i - G \left(\frac{1}{1-2\nu} \Theta_{,i} + \Delta \bar{u}_i - \delta_{(i)r} \frac{\bar{u}_i}{r^2} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.2})$$

Da $e^{i\omega t} \neq 0$, muß jeweils die Klammer verschwinden.

Multipliziert man die erste Gleichung mit r^2 nach (3.20) und führt die Abkürzungen (3.18, 3.19) ein, dann lassen sich die Klammersausdrücke schreiben als

$$\left(h^2 - \frac{1}{r^2} \right) \bar{u}_r + \frac{1}{r} \bar{u}_{r,r} + \bar{u}_{r,rr} + r^2 \bar{u}_{r,zz} + \frac{1}{2(1-\nu)} \bar{u}_{z,zz} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$k^2 \bar{u}_z + \frac{1}{r} \bar{u}_{z,r} + \bar{u}_{z,rr} + \frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,zz} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\bar{u}_{r,rz} + \frac{1}{r} \bar{u}_{r,z} \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Die Lösungen, wenn man die jeweils ersten drei Terme zu Null setzt, sind die BESSELFUNKTIONEN $J_1(hr)$ bzw. $J_0(kr)$. Da solche Zylinderfunktionen in der Ausbreitungsrichtung r als Lösungen zu erwarten sind, werden für die vollständige Lösung weiter

folgende Ansätze gemacht:

$$\bar{u}_r(r, z) = \bar{U}_r(\xi, z)[C_1 J_1(\xi r) + C_2 Y_1(\xi r)] \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{u}_z(r, z) = \bar{U}_z(\xi, z)[C_3 J_0(\xi r) + C_4 Y_0(\xi r)]. \quad (\text{A.6})$$

Die Wellenzahl ξ , die sich dabei zwingend als neue Variable ergab, verbindet die Abkürzungen h und k nach (3.21).

Es werden nur solche Lösungen gesucht, die beschränkt bleiben, daher entfallen die Anteile mit Y_1 und Y_0 aus der vollständigen Lösung, weil diese im Nullpunkt den Wert $-\infty$ annehmen.

Es bleiben

$$\bar{u}_r(r, z) = U_r(\xi, z) J_1(\xi r) \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{u}_z(r, z) = U_z(\xi, z) J_0(\xi r). \quad (\text{A.8})$$

Unter Benützung der Ableitungsregel für BESSELFunktionen (z.B. bei WATSON [87])

$$J_n'(x) = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x), \quad (\text{A.9})$$

also

$$J_1'(\xi r) = \frac{dJ_1(\xi r)}{dr} = -\frac{1}{r} J_1(\xi r) + \xi J_0(\xi r) \quad (\text{A.10})$$

$$J_0'(\xi r) = \frac{dJ_0(\xi r)}{dr} = -\xi J_1(\xi r) \quad (\text{A.11})$$

werden die Ausdrücke für (A.3, A.4) gebildet und eingesetzt

$$\left[(h^2 - \xi^2) U_r + r^2 U_r'' - \frac{\xi}{2(1-\nu)} U_z' \right] J_1(\xi r) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\left[(k^2 - \xi^2) U_z + \frac{1}{r^2} U_z'' - \frac{\xi}{1-2\nu} U_r' \right] J_0(\xi r) = 0 \quad (\text{A.13})$$

(Die Striche bedeuten Ableitungen nach z .)

Die Nullstellen von J_1 und J_0 sind bekannt; die Gleichungen müssen aber für beliebige Argumente ξr ebenfalls erfüllbar sein, daher muß gelten

$$-\alpha^2 U_r + r^2 U_r'' - \frac{\xi}{2(1-\nu)} U_z' = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$-\beta^2 U_z + \frac{1}{r^2} U_z'' - \frac{\xi}{1-2\nu} U_r' = 0 \quad (\text{A.15})$$

Für die Funktionen U_r und U_z werden bei der letzten Separation in Tiefenrichtung die beiden Wellentypen Kompressions- und Scherwelle, jeweils mit abnehmender und zunehmender Amplitude (für sich entfernende und für reflektierte Wellen), insgesamt also vier Anteile angesetzt:

$$U_r(\xi, z) = F_1(\xi)e^{-\alpha z} + F_2(\xi)e^{\alpha z} + F_3(\xi)e^{-\beta z} + F_4(\xi)e^{\beta z} \quad (\text{A.16})$$

$$U_z(\xi, z) = F_5(\xi)e^{-\alpha z} + F_6(\xi)e^{\alpha z} + F_7(\xi)e^{-\beta z} + F_8(\xi)e^{\beta z}. \quad (\text{A.17})$$

Durch Einsetzen in (A.14, A.15) läßt sich zeigen, daß die lediglich von ξ abhängigen "Konstanten" F_1 bis F_8 nicht unabhängig voneinander sind, sondern noch in bestimmten Beziehungen zueinander stehen, die α, β und ξ als Faktoren enthalten, so daß nur noch die vier unabhängigen "Konstanten" A_1, A_2, B_1 und B_2 bleiben:

$$U_r(\xi, z) = \frac{\xi}{h^2}A_1(\xi)e^{-\alpha z} + \frac{\xi}{h^2}A_2(\xi)e^{\alpha z} - \frac{\beta\xi}{k^2}B_1(\xi)e^{-\beta z} - \frac{\beta\xi}{k^2}B_2(\xi)e^{\beta z} \quad (\text{A.18})$$

$$U_z(\xi, z) = \frac{\alpha}{h^2}A_1(\xi)e^{-\alpha z} - \frac{\alpha}{h^2}A_2(\xi)e^{\alpha z} - \frac{\xi^2}{k^2}B_1(\xi)e^{-\beta z} + \frac{\xi^2}{k^2}B_2(\xi)e^{\beta z} \quad (\text{A.19})$$

Faßt man sämtliche Separationen zusammen, dann erhält man die gesuchten allgemeinen Lösungsausdrücke (3.16, 3.17) für das Differentialgleichungssystem (3.7, 3.8):

$$u_r(r, z, t, \xi) = e^{i\omega t} J_1(\xi r) \left\{ [A_1(\xi)e^{-\alpha z} + A_2(\xi)e^{\alpha z}] \frac{\xi}{h^2} - [B_1(\xi)e^{-\beta z} + B_2(\xi)e^{\beta z}] \frac{\beta\xi}{k^2} \right\} \quad (\text{A.20})$$

$$u_z(r, z, t, \xi) = e^{i\omega t} J_0(\xi r) \left\{ [A_1(\xi)e^{-\alpha z} - A_2(\xi)e^{\alpha z}] \frac{\alpha}{h^2} - [B_1(\xi)e^{-\beta z} - B_2(\xi)e^{\beta z}] \frac{\xi^2}{k^2} \right\}. \quad (\text{A.21})$$

Mitteilungen des Instituts für Geotechnik

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. U. Smolczyk

- | | | | | |
|-------|--|--------|--|-------------------|
| Nr. 1 | Thamm, B.R. | (1974) | Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wassergesättigten Tones | DM 10,-- |
| Nr. 2 | Gußmann, P. | (1975) | Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch | DM 5,-- |
| Nr. 3 | Feeser, V. | (1975) | Die Bedeutung des Kalziumkarbonats für die bodenphysikalischen Eigenschaften von Löß | DM 10,-- |
| Nr. 4 | Du Thinh, K. | (1976) | Standsicherheit von Böschungen: Programm-Dokumentation | vergriffen |
| Nr. 5 | Smolczyk, U./
Pertschi, O./
Hilmer, K. | (1976) | Messungen an Schleusen in der UdSSR. Schleusennorm der UdSSR (SN 303-65) | vergriffen |
| Nr. 6 | Hilmer, K. | (1976) | Erddruck auf Schleusenammerwände | DM 18,-- |
| Nr. 7 | Laumans, Q. | (1977) | Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens | DM 18,-- |
| Nr. 8 | Lächler, W. | (1977) | Beitrag zum Problem der Teilflächenpressung bei Beton am Beispiel der Pfahlkopfanschlüsse | DM 15,-- |

- | | | | | |
|--------|---------------------------------|--------|--|----------|
| Nr. 9 | Spotka, H. | (1977) | Einfluß der Bodenverdichtung mittels Oberflächen-Rüttelgeräten auf den Erddruck einer Stützwand bei Sand | DM 15,-- |
| Nr. 10 | Schad, H. | (1979) | Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben | DM 20,-- |
| Nr. 11 | Ulrich, G. | (1980) | Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden | |
| | Gußmann, P. | (1980) | Zum Modellgesetz der Konsolidation | DM 20,-- |
| Nr. 12 | Salden, D. | (1980) | Der Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten | DM 25,-- |
| Nr. 13 | Seeger, H. | (1980) | Beitrag zur Ermittlung des horizontalen Bettungsmoduls von Böden durch Seitendruckversuche im Bohrloch | DM 25,-- |
| Nr. 14 | Schmidt, H.H. | (1981) | Beitrag zur Ermittlung des Erddrucks auf Stützwände bei nachgiebigem Baugrund | DM 25,-- |
| Nr. 15 | Smoltczyk, U.
Schweikert, O. | (1981) | Vorstudie über bauliche Alternativen für Durchgangsstraßen in Siedlungen | DM 12,-- |
| Nr. 16 | Malcharek, K.
Smoltczyk, U. | (1981) | Vergleich nationaler Richtlinien für die Berechnung von Fundamenten | DM 15,-- |

Nr. 17	Gruhle, H.-D.	(1981)	Das Verhalten des Baugrundes unter Einwirkung vertikal gezogener Ankerplatten als räumliches Problem des Erdwiderstandes	DM 30,--
Nr. 18	Kobler, W.	(1982)	Untersuchungen über Böschungs- und Grundbruch bei begrenzten Lastflächen	DM 25,--
Nr. 19	Lutz, W.	(1983)	Tragfähigkeit des geschlitzten Baugrunds neben Linienlasten	DM 25,--
Nr. 20	Smolczyk, U.	(1983)	Studienunterlagen "Bodenmechanik und Grundbau"; überarbeitete Ausgabe (1990)	DM 40,--
Nr. 21	Schweikert, O.	(1984)	Der Einfluß des Böschungswinkels β auf die Berechnung des aktiven Erddrucks	DM 20,--
Nr. 22	Vogt, N.	(1984)	Erdwiderstandsermittlung bei monotonen und wiederholten Wandbewegungen in Sand	vergriffen
Nr. 23	Buchmaier, R.	(1985)	Zur Berechnung von Konsolidationsproblemen bei nichtlinearem Stoffverhalten	DM 25,--
Nr. 24	Schad, H.	(1985)	Möglichkeiten der Böschungssicherung bei kleinen Baugruben	
	Smolczyk, U./ Schad, H./ Zoller, P.		Sonderkonstruktionen der Böschungssicherung	DM 35,--
Nr. 25	Gußmann, P.	(1985)	Die Methode der Kinematischen Elemente	DM 20,--

- | | | | | |
|--------|---|--------|---|----------|
| Nr. 26 | Steinmann, B. | (1985) | Zum Verhalten bindiger Böden bei
monotoner einaxialer Beanspruchung | DM 25,-- |
| Nr. 27 | Lee, S.D. | (1987) | Untersuchungen zur Standsicherheit
von Schlitzten im Sand neben Einzel-
fundamenten | DM 25,-- |
| Nr. 28 | Kolb, H. | (1988) | Ermittlung der Sohlreibung von
Gründungskörpern unter horizon-
talem kinematischen Zwang | DM 25,-- |
| Nr. 29 | Ochmann, H. | (1988) | Ebene Grenzzustände von Erd-
böschungen im stochastischen
Sicherheitskonzept | DM 25,-- |
| Nr. 30 | Breinlinger, F. | (1989) | Bodenmechanische Stoffgleichungen
bei großen Deformationen sowie Be-
und Entlastungsvorgängen | DM 30,-- |
| Nr. 31 | Smolczyk, U./
Breinlinger, F./
Schad, H./
Wittlinger, M. | (1989) | Beitrag zur Bemessung von Tunneln
in offener Bauweise | DM 25,-- |
| Nr. 32 | Gußmann, P./
Schanz, T./
Smolczyk, U./
Willand, E. | (1990) | Beiträge zur Anwendung der KEM
(Erddruck, Grundbruch, Stand-
sicherheit von Böschungen) | DM 30,-- |
| Nr. 33 | Gruhle, H.-D. | (1990) | Der räumliche Erdwiderstand vor
überwiegend horizontal belasteten
Ankerplatten | DM 30,-- |
| Nr. 34 | Henne, J. | (1992) | Zur Bewehrung von verformten
Bodenschichten durch Einsatz
zugfester Geokunststoffe | |

in Vorbereitung

- | | | | |
|--------|----------------|--------|---|
| Nr. 35 | Wittlinger, M. | (1992) | Ebene Verformungsuntersuchungen
zur Weckung des Erdwiderstandes
bindiger Böden

in Vorbereitung |
| Nr. 36 | Schad, H. | (1992) | Zeit- und geschwindigkeitsabhängiges
Materialverhalten in der Geotechnik -
Experimentelle Erfassung und numerische
Analyse

DM 30,-- |
| Nr. 37 | Belz, I. | (1992) | Zur Ermittlung dynamischer Bodenkenn-
werte in situ aus der Systemantwort des
Erregers

DM 30,-- |

Weitere Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik und seiner Mitarbeiter

- [1] Smolczyk, U. (1971) Studienunterlagen "Bodenmechanik und Grundbau".
s.a. Mitteilungen des Instituts für Geotechnik Stuttgart (überarbeitete Ausgaben 1983, 1988)
- [2] Smolczyk, U. (1972) Über die kritische Höhe elastisch gebetteter Türme.
Der Bauingenieur 47, S. 59-60.
- [3] Smolczyk, U. (1972) Bodenmechanik zwischen Naturwissenschaft und Technik.
Der Bauingenieur 47, S. 73-80.
- [4] Smolczyk, U. (1972) Der Zugwiderstand von Pfählen.
Der Bauingenieur 47, S. 144-145.
- [5] Smolczyk, U. (1972) Keupermechanik.
Votr. Baugrundtagung, Stuttgart, S. 407-419.
- [6] Smolczyk, U./ Gußmann, P. (1972) Zum Stellenwert der theoretischen Bodenmechanik.
Votr. Baugrundtagung, Stuttgart, S. 551-579.
- [7] Gußmann, P. (1973) Ausgleichsvorgänge eindimensionaler Strömungen bei beliebiger Anfangsbedingung unter besonderer Berücksichtigung der Konsolidation einseitig drainierter Tonschichten.
Die Bautechnik 50, S. 20-25.
- [8] Thamm, B.R. (1973) Die "Cam-Clay"-Theorie und das "Critical-State"-Konzept.
Der Bauingenieur 48, S. 311-314.
- [9] Gußmann, P./ Spotka, H. (1973) Eindimensionale Konsolidation mehrschichtiger Tonböden.
Die Bautechnik 50, S. 265-272.
- [10] Thamm, B.R. (1973) Anwendung der Finite-Element-Methode zur Berechnung von Spannungen in wassergesättigten Böden.
Der Bauingenieur 48, S. 370-374.

- [11] Gußmann, P. (1974) Different methods of evaluating the influence of seepage forces on slope stability. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 61-73.
- [12] Gußmann, P./Schad, H. (1974) Practical considerations in the application of finite element techniques to soil problems. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 74-90.
- [13] Gußmann, P./Spotka, H. (1974) One-dimensional consolidation of multi-layered clays. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 91-102.
- [14] Gußmann, P./Thamm, B.R. (1974) Two-dimensional consolidation of triaxial test specimen. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 103-117.
- [15] Schad, H. et al. (1974) Stresses in concrete caisson bells. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 118-121.
- [16] Smolczyk, U. (1974) Improved technique for foundations on slopes. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 122-129.
- [17] Smolczyk, U./Diem, P./Spotka, H. (1974) Pressure cell for the measurement of normal and shear stress. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 130-136.
- [18] Smolczyk, U./Ljötterud, L. (1974) Stabilizing sand grains by overhead water pressure in bell bottoms of caisson piles. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 137-141.

Die Nummern 11 bis 18 enthält das o.g. Heft Geotechnik Nr. 2, das von der DEUTSCHEN GESELLSCHAFT FÜR ERD- UND GRUNDBAU E.V., Essen, zum Preis von DM 20.- verkauft wird.

- [19] Smolczyk, U. et al. (1975) Die Anwendung der Finiten Elemente in der Grundbaupraxis. CAD-Berichte Heft 1 der Gesellschaft für Kernforschung Karlsruhe.

- [20] Gußmann, P./ Thamm, B.R. (1974) Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer Versuchsproben. Der Bauingenieur 49, S. 293-298.
- [21] Gußmann, P. (1974) Über den Einfluß unterschiedlicher Wasserdruckansätze auf die Standsicherheit von durchströmten Böschungen. Der Bauingenieur 49, S. 298-301.
- [22] Smolczyk, U./ Gußmann, P./ Schulz, H. (1974) DIN 4084 Beiblatt, Erläuterungen und Berechnungsbeispiele. 20 S., Beuth-Verlag Berlin/Köln.
- [23] Laumans, Q. (1975) Die Anwendung der Methode finiter Elemente auf Flächengründungen. Technische Akademie Wuppertal, Heft 14.
- [24] Smolczyk, U. (1975) Graving Dock Foundation on Deep Fill. Proc. 1th Baltic Conf. SMFE, Gdansk, Vol. III, S. 213-222.
- [25] Smolczyk, U./ Du Think (1975) Zur Bebaubarkeit von vorbelasteten Verwitterungsböden. Fortschritts-Berichte VDI-Z., Reihe 4, Nr. 25, 70 S.
- [26] Smolczyk, U. (1975) Anmerkungen zum Gleitkreisverfahren. in: Festschrift Lorenz, TU Berlin, S. 203-218.
- [27] Smolczyk, U. (1975) Wie kann man Baugruben verbilligen? Der Architekt 2, S. 94-103.
- [28] Smolczyk, U. (1975) Schwierigkeiten beim Bauen im entfestigten Tonstein. Veröff. Inst. Felsmech. Bodenmech. Universität Karlsruhe 63, S. 21-50.
- [29] Smolczyk, U. (1976) Pfahlgründung eines Eisenbahndammes. Proc. 6th Europ. Conf. SMFE, Wien, Vol. 1.2, S. 561-566.
- [30] Smolczyk, U./ Hilmer, K. (1976) Erddruck auf Schleusenammerwände. Votr. Baugrundtagung, Nürnberg, S. 245-265.
- [31] Smolczyk, U. (1976) Bau eines Großdocks; Baugrundverbesserung in tiefem Wasser. Votr. Baugrundtagung, Nürnberg, S. 575-592.

- [32] Laumans, Q./
Schad, H. (1976) Calculation of Raft Foundations on Clayey Silts.
Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. in Geomechanics, Blacksburg, Vol. 1, S. 475-488.
- [33] Smolczyk, U./
Hilmer, K./
Franke, E./
Schuppener, B. (1977) Earth Pressure Variations Due to Temperature Change.
Proc. 9th ICSMFE, Tokyo, Vol. 2, S. 225-233.
- [34] Smolczyk, U./
Seeger, H. (1977) Lateral Deformation Testing in Keuper Marl Boreholes.
Int. Symp. The Geotechnics of Structurally Complex Formations, Capri, Vol. 1, S.443-447.
- [35] Smolczyk, U. (1978) Wagnis Baugrund.
Deutsche Architekten- u. Ingenieurzeitschrift 8/9, S. 12-16.
- [36] Schad, H. (1978) Die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben.
Vortr. Baugrundtagung, Berlin, S. 141-161.
- [37] Schulz, H./
Smolczyk, U. (1978) Zur Ermittlung der Scherparameter überkonsolidierter Böden für Erddruckberechnungen.
Vortr. Baugrundtagung, Berlin, S. 275-296.
- [38] Smolczyk, U. (1978) DFG-Schwerpunktprogramm Bodenmechanik.
Geotechnik 1, S. 29-42.
- [39] Gußmann, P. (1978) Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von äußeren Kräften.
Geotechnik 1, S. 68-74.
- [40] Hilmer, K./
Vogt, N. (1978) Der Einfluß der Temperatur auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden.
Geotechnik 1, S. 75-84.
- [41] Schmidt, H.H. (1978) Entwicklung einer Eignungsprüfung für Maßnahmen zum mittelfristigen Schutz des Erdplanums unter besonderer Berücksichtigung des von oben eindringenden Wassers.
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.033 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Geotechnik Stuttgart.

- [42] Schmidt, H.H. (1978) Erprobung von Versiegelungen fein- und gemischtkörniger Böden auf bituminöser Basis unter Verwendung von Handelsprodukten. Forschungsbericht F.A. Nr. 5.034 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr.
- [43] Gußmann, P. (1979) Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus unterschiedlich drainierten Zeitsetzungsversuchen. Geotechnik 2, S. 148-154.
- [44] Smolczyk, U. (1979) Bestimmung der Baugrundfestigkeit mit der Seitendrucksonde. Vortragsband zum Pfahlsymposium, München 1977, S. 77-80.
- [45] Schmidt, H.H. (1979) Erddruck auf Widerlager und Stützmauern in Abhängigkeit von Untergrundbewegungen durch Dammschüttungen. Forsch.ber. FA 5.042 G 77 H, B. f. Verkehr.
- [46] Smolczyk, U. (1979) Zur Berechnung von Bodenreaktionskräften. Berichte Bundesvereinigung Prüfüngenieur Baustatik, Arbeitstagung 4, S. 23-51.
- [47] Smolczyk, U./ Vogt, N./ Hilmer, K. (1979) Lateral Earth Pressure Due to Surcharge. Proc. 7th ECSMF, Brighton, Vol. 2, S. 131-140.
- [48] Smolczyk, U. (1979) Influence of foundation depth on raft analyses. Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, Vol. 4, S. 1503-1512.
- [49] Smolczyk, U. (1979) Dammschüttung in Baggerseen beim Bau der Schnellbahnstrecke Mannheim-Stuttgart. 2. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, Fellbach, S. 113-119.
- [50] Smolczyk, U./ Gartung, E. (1979) Geotechnical Properties of a Soft Keuper Sandstone. Proc. 4th Int. Congr. Rock Mechanics, Montreux, S. 639-644.
- [51] Smolczyk, U./ Schmidt, H.H. (1979) Forschungsergebnisse von Erddruckuntersuchungen an Modellwänden. Tagung der Arbeitsgruppe Untergrund der Forschungsges. f. d. Straßenwesen, Koblenz.

- [52] Smolczyk, U. (1980) Internationale Vereinbarungen; Klassifizierung des Fachschrifttums und Symbole. Baugrundgutachten. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.1, 1.2, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [53] Gußmann, P./ Schad, H. (1980) Numerische Verfahren in der Bodenmechanik. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.7, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [54] Smolczyk, U./ Gußmann, P. (1980) Berechnung von Zeitsetzungen. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.10, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [55] Smolczyk, U. (1980) Untersuchung von Gründungsschäden unter Hinzuziehung von mineralogischen Untersuchungen. VDI-Seminar "Erkenntnisse aus Schäden im Tiefbau".
- [56] Smolczyk, U. (1980) Erfahrungen mit der Stuttgarter Seitendrucksonde. III. Int. Symp. DDR-Komitee Bodenmechanik Grundbau Dresden, S. 22-28.
- [57] Smolczyk, U. (1980) Beitrag zu den Thesen zu Problemen der lastbedingten Baugrundverformungen. III. Int. Symp. DDR-Komitee Bodenmechanik Grundbau Dresden, S. 58-61.
- [58] Buchmaier, R./ Smolczyk, U./ Schad, H. (1980) Einfluß einer Mudde-Linse auf die Verschiebungen einer hinterfüllten Uferwand. Proc. 6th Donaueurop. CSMFE, Varna, Vol. 1a, S. 65-74.
- [59] Malcharek, K. (1981) Unterwasser-Sprengverdichtung - Polnische Praxis. Geotechnik 3, S. 190-192.
- [60] Smolczyk, U./ Malcharek, K. (1981) Lebendverbau von Steilböschungen. Tiefbau, Ingenieurbau, Straßenbau 23, S. 396-400.
- [61] Smolczyk, U. (1981) Saving cities and old buildings. State-of-the-art Report, 10th ICMSFE, Stockholm, Vol. 4, S. 441-465.

- [62] Gußmann, P./ Lutz, W. (1981) Schlitzstabilität bei anstehendem Grundwasser. Geotechnik 4, S. 70-81.
- [63] Kunz, B. (1981) Methodenbank im Grundbau (MIG). Schlußbericht S-SMO/103 des-Instituts für Geotechnik Stuttgart, CAD-Projekt Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- [64] Salden, D. (1981) Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten. Geotechnik 4, S. 137-144.
- [65] Melzer, K.-J./ Smolczyk, U. (1982) Dynamic penetration testing. State-of-the-art Report, Proc. 2nd ESOPT, Amsterdam, Vol. 1, S. 191-202.
- [66] Smolczyk, U./ Malcharek, K. (1982) Living Sheets on Steep Slopes. Proc. 2nd Int. Conf. Geotextiles, Las Vegas, Vol. 1, S. 253-257.
- [67] Steinmann, B. (1982) Consolidation testing of Opalinuston with different types of drainage. Proc. Int. Symp. Num. Models Geomechanics, Zürich, S. 280-285.
- [68] Smolczyk, U. (1982) Use of non-linear constitutive soil models in engineering practice. Some personal experiences. Proc. Int. Symp. Num. Models Geomechanics, Zürich, S. 535-548.
- [69] Vogt, N. (1982) Large scale model tests with partial mobilization of the passive earth pressure and cyclic movements of the wall. Proc. IUTAM Conf. Deformation Failure Granular Materials, Delft, S. 643-652.
- [70] Smolczyk, U. (1982) Verkantung von Brückenpfeilern infolge Baugrund-Elastizität. Proc. 10. Geotechn. Konferenz, Brünn, CSSR, S. 408-415.
- [71] Smolczyk, U./ Netzel, D. (1982) Flachgründungen. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.1, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.

- [72] Smolczyk, U. (1982) Unterfangungen und Unterfahrungen. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.3, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [73] Smolczyk, U./ Hilmer, K. (1982) Baugrundverbesserung. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.5, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [74] Schenck, W./ Smolczyk, U./ Lächler, W. (1982) Pfahlroste, Berechnung und Konstruktion. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.12, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [75] Schenck, W./ Smolczyk, U. (1982) Gründungen im offenen Wasser. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.17, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [76] Gußmann, P. (1982) Kinematical Elements for Soil and Rocks. Proc. 4th Conf. Num. Meth. Geomechanics, Edmonton, Canada, Vol. 1, S. 47-52.
- [77] Gußmann, P. (1982) Application of the Kinematical Element Method to Collapse Problems of Earth Structures. Proc. IUTAM Symp. Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, S. 545-550.
- [78] Smolczyk, U. (1983) Deep Compaction. General Report: 8th ECSMFE, Helsinki, Vol. 3, S. 1105-1116.
- [79] Smolczyk, U. (1983) Axiale Pfahl-Probebelastung: Empfehlungen für die Durchführung. Geotechnik 6, S. 174-195.
- [80] Gußmann, P. (1983) Stabilität von suspensionsgestützten Schlitzten unter statischen Lasten. Proc. 7th Donaueurop. CSMFE, Kishinev, UdSSR, Vol. III, S. 55-60.
- [81] Smolczyk, U./ Malcharek, K. (1984) Naturgerechte Sicherung von Steilböschungen. Geotechnik 7, S. 117-129.
- [82] Smolczyk, U. (1984) Wie sicher müssen Altbauten sein? Geotechnik 7, S. 174-181.
- [83] Smolczyk, U. (1984) Zur Berechnung der rückverhängten Erdwand. Geotechnik 7, S. 214.

- [84] Smolczyk, U. (1984) Neues Verfahren zur Sicherung von Steilböschungen mit Hilfe von Geotextilien. Proc. 23. Int. Chemiefasertagung, Dornbirn, S. 551-569.
- [85] Gußmann, P./ Ochmann, H. (1985) Probabilistic Theory and Kinematical Element Method. Proc. 11th ICSMFE, San Francisco, U.S.A., Vol. 2, S. 825-829.
- [86] Smolczyk, U./ Salden, D./ Majchrzyk, K. (1985) Determination of the Shear Strength of Partially Decomposed Mudstone. Proc. 11th ICSMFE, San Francisco, U.S.A., Vol. 2, S. 1055-1059.
- [87] Smolczyk, U./ Malcharek, K. (1985) Slope protection by membrane structures. Geotextiles and Geomembranes, Vol. 2, S. 323-336.
- [88] Smolczyk, U. (1985) Axial Pile Loading Test - Part 1: Static Loading. Geotechnical Testing Journal, Vol. 8, S. 79-90.
- [89] Schad, H. (1985) Computing Costs for FEM Analysis of Foundation Engineering Problems and Possible Ways of Increasing Efficiency. Int. Journ. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 9, S. 261-275.
- [90] Smolczyk, U. (1985) Neue Erfahrungen mit der Seitendrucksonde. Geotechnik 8, S. 109-114.
- [91] Smolczyk, U. (1985) Vor 100 Jahren: Reynolds beschreibt die Dilatanz. Geotechnik 8, S. 208-209.
- [92] Gußmann, P. (1986) Kinematical Element Method for 3D-Problems in Geomechanics. Proc. ECONMIG 86, Stuttgart, Vol. 2.
- [93] Smolczyk, U./ Schad, H. (1986) Steigerung der Arbeitssicherheit und Umweltfreundlichkeit bei der Böschungssicherung. Die Bautechnik 63, S. 289-294.
- [94] Smolczyk, U. (1986) Zur Bewehrung des Bodens mit Geotextilien und Drahtgeweben. Proc. 14. Geotechn. Konferenz, Brünn, CSSR, S. 118-125.

- [95] Baumann, J./ Ochmann, H. (1986) Erdstatische Sicherheitsbewertung von Erd-dämmen an Speicherbecken. Vortr. Baugrundtagung, Nürnberg, S. 261-273.
- [96] Breinlinger, F. (1987) The finite element method as design aid for tunnels built in open cuts. Review 1st Young Geotechn. Engrs. Conf. YGEC '87, Copenhagen, Denmark, S. 1-9.
- [97] Gußmann, P. (1987) Kinematical Element Method in Soil Mechanics. Proc. NUMEG 87, Vysoke Tatry, CSSR, Vol. 1, S. 116-128.
- [98] Gußmann, P. (1987) Böschungsgleichgewicht im Lockergestein. Grundbautaschenbuch, Teil 3, Abschn. 3.2, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [99] Smolczyk, U. (1987) Stützmauern. Grundbautaschenbuch, Teil 3, Abschn. 3.7, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [100] Smolczyk, U. (1987) Underpinning, Part 54 in: Ground Engineers Reference Book. Butterworths, London.
- [101] Smolczyk, U. (1987) Zum Einfluß der Einbindetiefe auf den rechnerischen Nachweis der Tragfähigkeit von Einzelfundamenten. Geotechnik 10, S. 153-155.
- [102] Schad, H./ Breinlinger, F. (1988) Experiences with the analysis of geotechnical problems solved by the FEM using different equation solvers on several computers. Proc. 6th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Vol. 1, S. 183-187.
- [103] Gußmann, P. (1988) KEM in Geomechanics. Proc. 6th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Vol. 2, S. 823-828.
- [104] Smolczyk, U. (1988) 10 Jahre 'Geotechnik'. Geotechnik 11, S. 124-132.
- [105] Smolczyk, U. (1988) Quo vadis, DIN 1054 ? Geotechnik 11, S. 215-221.

- [106] Gußmann, P. (1989) Praktische Berechnungen mit KEM. in: Berichte zum Schlußkolloquium des DFG-Schwerpunktprogramms "Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau". Springer-Verlag, S. 605-626.
- [107] Gußmann, P. (1989) Application of the KEM to different limit load problems. European Mechanics Colloquium/248: "Non Linear Soil-Structure Interaction". Grenoble, S. 86-89.
- [108] Henne, J. (1989) Versuchsgerät zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit von bindigen Böden. Geotechnik 12, S. 96-99.
- [109] Salden, D. (1989) Bestimmung der Scherfestigkeit künstlich verdichteter Schüttungen aus Ton- und Schluffsteinen. 7. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, Bensheim, S. 99-106.
- [110] Smolczyk, U./ Kolb, H. (1989) Analysis of ground friction mobilized by raft prestressing. Proc. 12th ICSMFE, Rio de Janeiro, Vol. 1, S. 723-726.
- [111] Gußmann, P./ Schanz, T. (1989) KEM-Nachweise im Grundbau. Geotechnik 12, S. 127-133, sowie Mitteilungen des IGS, Heft 32, Teil 2.
- [112] Smolczyk, U. (1989) Einfluß des Bauverfahrens auf den Erkundungsumfang bei Tiefgründungen. Proc. 17. Geotechn. Konferenz, Brünn, CSSR, S. 8-13.
- [113] Gußmann, P. (1989) Vergleich von Böschungsbruch und Grundbruch unter Einbeziehung der KEM. Vortrag Ohde-Kolloquium, TU Dresden, S. 41-64.
- [114] Smolczyk, U./ Schad, H. (1990) Zur Diskussion der Teilsicherheitsbeiwerte für den Grundbruchnachweis. Geotechnik 13, S. 41-43.
- [115] Smolczyk, U. (1990) European Geotechnics in the Nineties. ISSMFE News, Vol. 17, No. 2, March 1990.

- [116] Smolczyk, U. (1990) Internationale Vereinbarungen; Baugrundgutachten. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.1, 1.2, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [117] Gußmann, P. (1990) Berechnung von Zeitsetzungen. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.9, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [118] Gußmann, P./Schad, H. (1990) Numerische Verfahren. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.11, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [119] Smolczyk, U. (1990) Die DGEG in den neunziger Jahren. Geotechnik 13, S. 121-122.
- [120] Breinlinger, F./Schad, H. (1990) Extension of an elastoplastic double hardening model to viscoplasticity within the frame of finite strains. Proc. 2nd Europ. Spec. Conf. on Num. Meth. in Geotechnical Engineering, Santander, S. 71-82.
- [121] Gußmann, P./Lee, S.D. (1990) 3D - Bearing capacity of pad foundations next to slurry trenches. Proc. 2nd Europ. Spec. Conf. on Num. Meth. in Geotechnical Engineering, Santander, S. 599-609.
- [122] Smolczyk, U. (1990) Geotechnics - Research and Reality Proc. 9. Donaueurop. Konferenz, Budapest, S. 31-37.
- [123] Henne, J. (1990) Kriterien zur bodenmechanischen Bewertung der Basisabdichtung von Mülldeponien auf kompressiblem Untergrund. Proc. 9. Donaueurop. Konferenz, Budapest, S. 489-494.
- [124] Smolczyk, U./Henne, J. (1990) Versuchsgerät zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit und Grenzdehnung von bindigen Böden. 3. Intern. KfK/TNO Kongress über Altlasten, Karlsruhe, Band II, S. 1383-1384.
- [125] Schad, H./Breinlinger, F. (1991) Numerical analysis of visco-elastoplastic soil behaviour considering large deformations. Proc. 10th ECSMF, Florenz, Italien, Vol. 1, S. 255-260.

- [126] Smolczyk, U./ Henne, J. (1991) Criteria for evaluating geotextile-reinforced clay liners supporting wastes on compressible foundations - Summary of an ongoing study. Proc. 10th ECSMFE, Florenz, Italien, Vol. 2, S. 563-567.
- [127] Smolczyk, U./ Wittlinger, M. (1991) Passive earth pressure of cohesive soils (mobilisation): Summary of an ongoing study. Proc. 10th ECSMFE, Florenz, Italien, Vol. 2, S. 749-752.
- [128] Smolczyk, U./ Hilmer, K. (1991) Baugrundverbesserung. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.1, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [129] Smolczyk, U. (1991) Unterfangungen und Unterfahrungen. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.3, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [130] Smolczyk, U. (1991) Probleme der Harmonisierung der europäischen Baugrundnormen. Ohde-Kolloquium Berlin, Vorträge, S. 1-13.
- [131] Smolczyk, U./ Schad, H./ Willand, E. (1991) Borehole-Jack investigations in frozen ground of high strength. Proc. 7th Int. Congress on Rock Mechanics, Aachen, S. 615-618.
- [132] Smolczyk, U. (1991) Einsatzmöglichkeiten der FEM in der Grundbaupraxis. Finite Elemente, Anwendungen in der Baupraxis, S. 35-45, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [133] Smolczyk, U. (1992) Sicherung und Sicherheit von Hängen und Böschungen. Wechselwirkungen: Jahrbuch 1991 der Universität Stuttgart.
- [134] Smolczyk, U. (1992) Chances and Limits of FEM. Civil Engineering European Course, Computational Geotechnics, Delft.
- [135] Gußmann, P. (1992) Safety analysis and computation of safety factors. Civil Engineering European Course, Computational Geotechnics, Delft.
- [136] Gußmann, P./ Brinkgreve, R.B.J. (1992) Slope stability problems. Civil Engineering European Course, Computational Geotechnics, Delft.

- [137] Smolczyk, U./
Henne, J. (1992) Kriterien zur bodenmechanischen Bewertung der Basisabdichtung von Mülldeponien auf kompressiblem Untergrund. Abschlußbericht zu Projekt Wasser-Abfall-Boden, PD87.057, Kernforschungszentrum Karlsruhe, PWAB-Bericht 11, März 1992, 123 Seiten.
- [138] Stolle, D.F./
Schad, H. (1992) An update reference configuration formulation for large-deformation problems. Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 16, S. 295-306.
- [139] Smolczyk, U./
Netzel, D. (1992) Flachgründungen. Grundbautaschenbuch, Teil 3, Abschn. 1, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [140] Lächler, W./
Mangold, K./
Schad, H. (1992) Deformation and seepage analysis in a waste deposit by FEM. 2nd Czechoslovak Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Prag.
- [141] Schad, H. (1992) Numerical analysis of multi-storey buildings founded on Frankfurt-Clay. Invited lecture for 2nd Czechoslovak Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Prag.
- [142] Smolczyk, U./
Ma, J./
Thaier, M. (1992) Untersuchung von Böschungs-Stützscheiben durch Zentrifugen-Modellversuche. Vortr. Baugrundtagung, Dresden.