



**INSTITUT FÜR GEOTECHNIK  
STUTTGART**

**1992  
MITTEILUNG 36**

**Hermann Schad**

**Zeit- und geschwindigkeitsabhängiges  
Materialverhalten in der Geotechnik —  
Experimentelle Erfassung und  
numerische Analyse**





**INSTITUT FÜR GEOTECHNIK  
STUTT GART**

**1992  
MITTEILUNG 36**

**Hermann Schad**

**Zeit- und geschwindigkeitsabhängiges  
Materialverhalten in der Geotechnik —  
Experimentelle Erfassung und  
numerische Analyse**



# **Zeit- und geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten in der Geotechnik — Experimentelle Erfassung und numerische Analyse**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart genehmigte Habilitationsschrift  
für das Fachgebiet *Felsmechanik, Bodenmechanik und Grundbau*.

Vorgelegt von

Dr.-Ing. HERMANN SCHAD,

geboren in Tübingen.

Berichter: Prof. Dr. techn. H. BEDNARCZYK

Mitberichter: Prof. Dr.- Ing. U. SMOLT CZYK

Tag des wissenschaftlichen Vortrags und des Kolloquiums: 11. Juni 1992

---

Das Institut für Geotechnik ist eine Einrichtung der Universität Stuttgart

ISBN 3-921837-36-7

Gegen Vervielfältigung und Übersetzung bestehen keine Einwände, es wird lediglich um Quellenangabe gebeten.

Herausgegeben 1992 im Eigenverlag des Instituts für Geotechnik

## Vorwort des Herausgebers

Das Institut für Geotechnik befaßt sich seit seiner Gründung 1969 schwerpunktmäßig mit der Erforschung der Stoffgesetze bindiger und nichtbindiger Bodenarten. Herr Dr.-Ing. Schad war an dieser Entwicklung zweimal beteiligt: zuerst mit seiner 1979 als Heft 10 dieser Reihe veröffentlichten Dissertation „Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben“, die sich auf stationäre Zustände beschränkte und dabei vor allem Zuverlässigkeitsstudien enthielt, und — nach einer Pause, in der er in der Praxis tätig war — mit der nachstehenden Habilitationsschrift, die er mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft erarbeitete.

Die in der neueren Bodenmechanik eingesetzten Stoffbeziehungen, nun unter Einbeziehung zeitlich verzögerter Zustandsänderungen, werden kritisch bewertet und ergänzt durch eigene Versuchsbefunde. Dabei wurde zur Untersuchung von Tongesteinen bei großen Gleitungen in positiver und negativer Richtung, also für Wechselbeanspruchung, ein Simple-Shear-Gerät für 50 cm hohe Proben entwickelt.

Ein für die Baupraxis wichtiges Ergebnis ist die von Dr. Schad am Beispiel der Oberflächensetzung einer Mülldeponie gezeigte Anwendung der Beobachtungsmethode zur fortschreitenden Verbesserung der Zeitsetzungsprognose.

Durch die umfassende synoptische Behandlung des Theams ist es dem Autor gelungen, die vorausgegangenen Arbeiten unseres Instituts, die sich mit Stoffgesetzen befaßten, in einen gemeinsamen Rahmen zu stellen und das Thema zu einem vorläufigen Abschluß zu bringen. Die noch laufenden und geplanten Untersuchungen zu Anwendungen im Grundbau können dadurch auf eine wissenschaftlich gesicherte Grundlage gestellt werden.

Stuttgart, August 1992

Smolczyk

## Vorwort des Autors

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart von 1985 bis 1990. Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Smolczyk bin ich dankbar dafür, daß er mir nach einer ersten Assistentenzeit von 1972 bis 1978, in der ich die Möglichkeit zur Promotion nutzen konnte, nochmals die Gelegenheit gab, an seinem Institut zu arbeiten und eine Habilitationsschrift anzufertigen. Für den Impuls zu dieser Arbeit, die kritische Begleitung und Bewertung der Forschungen und die Übernahme des Mitberichts sei ihm an dieser Stelle herzlich gedankt.

Nachdem Herr Prof. Dr. techn. H. Bednarczyk bereits bei meiner Dissertation Mitberichter war und mit seinen Anregungen und Hinweisen zur sprachlich und mechanisch korrekten Darstellung viel zum Gelingen beider Arbeit beigetragen hat, bin ich ihm für die Übernahme des Berichts zur Habilitationsschrift zu besonderem Dank verpflichtet.

Sehr dankbar bin ich auch Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Gußmann und Herrn Akademischem Oberrat Dr.-Ing. D. Salden, mit denen ich die bereits 1972 begonnene kollegiale Zusammenarbeit in meiner zweiten Assistentenzeit vertiefen konnte, für die zahlreichen Gespräche und Diskussionen, so daß die Arbeit am Institut immer in einer wissenschaftlich anregenden, harmonischen und homorvollen Atmosphäre vonstatten ging. Dazu beigetragen haben auch all die Kolleginnen und Kollegen, die während meiner Assistentenzeit am Institut gearbeitet haben. Stellvertretend seien hier nur zwei genannt: Herr Dr.-Ing. F. Breinlinger, dessen Engagement und Talent stets hilfreich waren, und Herr Dipl.-Ing. J. Baumann, von dem ich wertvolles über Geologie und Baugrundgutachten erfuhr und noch viel hätte lernen können, wenn nicht der Tod allzu früh seinem Leben ein Ende gesetzt hätte.

Für ihre Ideen und ihre Tatkraft bei der Fertigung der Versuchsgeräte und der Durchführung der Versuche sei Herrn Dr.-Ing. R. Kayser vom Institut für Modellstatik und Herrn H. Sooss herzlich gedankt.

Herrn Dipl.-Ing. E. Willand gilt es zu danken für die Ausdauer und Findigkeit, mit denen er mir half, das Textsystem zu nutzen; Herrn Dr.-Ing. R. Buchmaier für das sorgfältige Studium des Manuskripts und sein fortwährendes Interesse an den Fragen der Stoffgleichungen und der Konsolidationstheorie.

Bei den Danksagungen sei die Deutsche Forschungsgemeinschaft nicht vergessen, da sie durch die finanzielle Unterstützung des Vorhabens *Konstitutive Beziehungen* die Entstehung der Arbeit entschieden gefördert hat.

Hermann Schad

## Kurzfassung

Ausgehend von der Methodik und Terminologie von HOHENEMSER/PRAGER (1932) wird für geotechnische Zwecke ein Stoffgesetz entwickelt, das als erweiterter PRANDTL-MAXWELL-Körper bezeichnet werden kann, da dem elastoplastischen Körper ein viskoelastisches Medium überlagert wird. Das Stoffgesetz wird für die FE-Methode aufbereitet und in ein FE-Programm implementiert, wobei eine Geschwindigkeitsformulierung unter Berücksichtigung endlicher Deformationen gewählt wird.

Im plastischen Teil des Stoffgesetzes, dessen Fließregel nichtassoziiert sein kann, werden die COULOMBSche Fließfläche und die Potentialfläche so modifiziert, daß die vorgeschlagene Formulierung die COULOMBSche Fläche und den DRUCKER Kegel als Sonderfälle enthält und den Übergangsbereich zwischen diesen beiden Formulierungen zutreffend beschreibt.

Die Möglichkeiten der Überlagerung von zwei rheologischen Körpern bei der FE-Analyse wird für zwei geotechnische Probleme genutzt: experimentelle und numerische Quantifizierung des Einflusses der geometrischen Nichtlinearität im Druckversuch und Prognose der zeitlichen Entwicklung der Verschiebungen einer Deponie.

Zur Berechnung vorschubgesteuerter Laborversuche mit wassergesättigten Böden auf der Basis der Konsolidationstheorie wird ein numerisches Verfahren entwickelt, mit dem man aus bekannten analytischen Lösungen für Spannungsrandbedingungen — unter den Voraussetzungen: lineare Stoffbeziehungen (ZENER-Körper) und infinitesimal kleine Deformationen — Lösungen für Verschiebungsrandbedingungen ermitteln kann.

Es wird ein Einachschergerät (Versuchskörper 60/60/50 cm) entwickelt und getestet, das auch für überkonsolidierten Ton und teilverwitterten Fels geeignet ist und mit dem das Materialverhalten bei nichtmonotoner Belastung, Belastungsumkehr und Drehung der Hauptspannungen untersucht werden kann.

## Summary

A constitutive model has been established on the basis of the HOHENEMSER/PRAGER (1932) method; this model can be described as a PRANDTL-body coupled in parallel with a viscoelastic MAXWELL body. It has been adapted for the FE-method and implemented in an FE-code using a velocity formulation for large deformations.

In the plastic part of the non-associated model both the yielding and potential surfaces are defined using a relationship which allows a smooth transition between COULOMB's pyramid and DRUCKER's cone.

The possibilities of the overlay-technique with two rheological bodies in FE-analysis are demonstrated for two geotechnical problems: experimental and numerical quantification of the influence of geometrical nonlinearity in uniaxial stress testing and the calculation of the time dependent displacements in a waste deposit.

For the analysis of strain controlled laboratory tests on saturated soils a numerical method based on the classical consolidation theory has been developed, which will make it possible to obtain solutions for displacement boundary conditions from analytical solutions for stress boundary conditions by assuming a linear constitutive model (ZENER-body) and infinitesimally small strains.

A large scale simple shear test apparatus for samples with as size of 60/60/50 cm has been developed and tested. This equipment is even suitable for overconsolidated clays and partly weathered rocks and will permit testing of the material behaviour at non-monotonic loading, load reversals and rotations of the principal stresses.

# Inhaltsverzeichnis

Literatur . . . . .	15
Bezeichnungen . . . . .	25
<b>1 Einführung</b>	<b>27</b>
<b>2 Stoffgleichungen</b>	<b>31</b>
2.1 Methodik der rheologischen Modelle . . . . .	34
2.1.1 „Flüssige“ Idealstoffe nach Hohenemser/Prager . . .	37
2.1.2 „Feste“ Idealstoffe nach Hohenemser/Prager . . . .	39
2.1.3 Modifiziertes Zener-Modell . . . . .	42
2.2 Elastizität und Plastizität . . . . .	45
2.2.1 Elastizität . . . . .	45
2.2.2 Plastizität . . . . .	55
2.2.3 Allgemeine nichtlineare Formulierungen . . . . .	68
2.3 Viskosität, Kriechen und Relaxation . . . . .	74
2.3.1 Schleichende Strömung . . . . .	74
2.3.2 Kriechen und Relaxation . . . . .	77
2.3.3 Kriechgleichungen und implizite Spannungs- integration . . . . .	80
<b>3 Visko-elastoplastisches Stoffgesetz</b>	<b>83</b>
3.1 Elastoplastischer Teil . . . . .	83
3.1.1 Parameter des modifizierten Coulomb-Kriteriums . .	85
3.1.2 Die geometrischen Elemente der Fließkurven . . . .	89
3.2 Viskosität . . . . .	91
3.2.1 Vergleich verschiedener Funktionen für primäres Kriechen . . . . .	91
3.2.2 Modifiziertes Voigt-Modell . . . . .	96
3.2.3 Modifiziertes Zener-Modell für dreidimensionale Spannungszustände . . . . .	100

<b>4</b>	<b>Versuche</b>	<b>103</b>
4.1	Stabilitätsprobleme in Druckversuchen . . . . .	104
4.2	Entwicklung und Anwendung eines Schergeräts . . . . .	111
4.2.1	Konstruktion eines Einachschergeräts . . . . .	112
4.2.2	Scherversuche mit Lößlehm . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Numerische Analysen</b>	<b>129</b>
5.1	Analyse der Langzeitsetzungen einer Deponie . . . . .	129
5.2	Verschiebungsgesteuerte Beanspruchung . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>139</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>141</b>
7.1	Parameter für Hookesches und Newtonsches Gesetz . . . . .	141
7.2	Die geometrischen Elemente der Fließkurven . . . . .	143
7.2.1	Fließkurve in der Deviatorebene . . . . .	143
7.2.2	Fließkurve in der hydrostatischen Ebene . . . . .	149
7.2.3	Ermittlung der Normalen auf die Fließfläche . . . . .	154
7.3	Hinweise zur Programmierung der Fließfläche . . . . .	156

# Bildverzeichnis

2.1	Systematik einfachster Idealstoffe (HOHENEMSER/ PRAGER 1932) . . . . .	36
2.2	Modifiziertes ZENER-Modell . . . . .	42
2.3	Reibung auf der schiefen Ebene . . . . .	52
2.4	Dilatanz und „Energiekorrektur“ . . . . .	54
2.5	Bereichsweise instabiles Materialverhalten . . . . .	56
2.6	DRUCKER/PRAGER- und COULOMB-Kriterium . . . . .	60
2.7	Modell von BREINLINGER (1989) in der hydrostatischen Ebene . . . . .	67
2.8	Vergleich von last- und spannungskonstantem Kriechversuch mit Kork . . . . .	77
2.9	Die drei Phasen des Kriechens; $\sigma = const$ . . . . .	79
3.1	Fließkurve des modifizierten COULOMB-Kriteriums in der Deviatorebene . . . . .	84
3.2	Einfluß des Parameters $c_t$ auf die Fließkurve . . . . .	85
3.3	Einfluß der Parameter $c_h$ und $c_p$ auf die Fließkurve in der Deviatorebene . . . . .	87
3.4	Hauptachsen der Ellipse und „Fülligkeit“ $c_p$ . . . . .	89
3.5	Bereiche und Bezeichnungen in der hydrostatischen Ebene . . . . .	90
3.6	Programmablauf zur Parameterbestimmung . . . . .	93
3.7	Potenzansatz — mit und ohne Absolutglied — zur Approximation des Kriechverlaufs . . . . .	94
3.8	Approximation eines Kriechversuchs durch $y = a \operatorname{arsinh}(bt) + c$ und $y = a \exp(bt) + c$ . . . . .	95
3.9	Kriechkurven eines dehnungsabhängigen, nichtlinearen, viskoelastischen Körpers für verschiedene Werte von $\sigma_c/(\bar{E} \varepsilon_{gr})$ . . . . .	97
3.10	Kriechkurven eines linear spannungsabhängigen, nichtlinearen, viskoelastischen Körpers für verschiedene Werte von $\sigma_c/\beta$ bei $\bar{E}/\beta = 20$ . . . . .	98

3.11	Kriechkurven bei einem quadratischen Spannungsansatz für den „HOOKEschen“ Teil eines nichtlinearen, viskoelastischen Körpers für verschiedene Werte von $\sigma_c/\beta$ bei $\bar{E}/\beta = 20$	99
3.12	Parallelschaltung von elastoplastischem und viskoelastischem Körper	100
4.1	Kriechversuche bei verschiedenen Laststufen	105
4.2	Entlastungsversuche	106
4.3	Ergebnisse von Knickversuchen und FE-Berechnung	107
4.4	Knickfigur in Versuch und FE-Berechnung	109
4.5	Entwicklung des Knickens in den verschiedenen Versuchen	110
4.6	Versuchsgerät für einfache Scherung (simple shear)	111
4.7	Kinematik des entwickelten Einzelschergeräts	113
4.8	Realisierung des Einzelschergeräts	115
4.9	Schergerät mit eingebauter Bodenprobe	116
4.10	Probenvorbereitung zum Einkleben	116
4.11	Sicherung der Proben für den Transport	116
4.12	Mögliche Verformungen unter einer Deponie	117
4.13	Vergleich zwischen in-situ und simple-shear Scherversuchen	119
4.14	Scherversuch 1 ( $\sigma_{22} = -149,5 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )	121
4.15	Scherversuch 1 ( $\sigma_{22} = -149,5 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung	122
4.16	Scherversuch 2 ( $\sigma_{22} = -299 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )	123
4.17	Scherversuch 2 ( $\sigma_{22} = -299 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung	124
4.18	Scherversuch 3 ( $\sigma_{22} = -562 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )	125
4.19	Scherversuch 3 ( $\sigma_{22} = -562 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung	126
4.20	Scherversuch 4 ( $\sigma_{22} = -547 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )	127
4.21	Scherversuch 4 ( $\sigma_{22} = -547 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung	128
5.1	FE-Netz des Deponiequerschnitts	130
5.2	Mittlere Setzung der Deponie; Meßwerte und FE-Analyse	132
5.3	Ergebnisse der geodätischen Verschiebungsmessungen von 1985 bis 1990	133

5.4	Verschiebungen an den Meßpunkten; zeitliche Interpolation auf den Jahresanfang . . . . .	133
5.5	Oberflächenverschiebungen aus der FE-Analyse . . . . .	134
5.6	Dehnungen der Deponieoberfläche; Messung und Rechnung	135
5.7	Treppenförmige Approximation einer stetigen Belastung .	137
7.1	Lage der Ellipsen in der Deviatorebene . . . . .	143
7.2	Kreis und Ellipse mit Tangente . . . . .	145
7.3	Bereiche und Bezeichnungen in der hydrostatischen Ebene	149
7.4	Normale auf die Fließfläche und Transformation . . . . .	154



# Tabellenverzeichnis

2.1	Plastische Belastungsbedingungen (Beladungsbedingungen) . . . . .	61
2.2	Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik . . . . .	75
2.3	Viskose Moduli (NEWTONSches Gesetz) . . . . .	76
4.1	Bodenmechanische Daten des Lößlehms . . . . .	117
7.1	Elastische Moduli (HOOKESches Gesetz) . . . . .	141
7.2	Umrechnung der Stoffkonstanten für HOOKESches und NEWTON- sches Gesetz . . . . .	142
7.3	Datenorganisation für das elastoplastische Stoffgesetz . . .	156



# Literatur

- BATHE, K.-J. (1986): Finite-Elemente-Methoden.  
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- BAZANT, Z. P. (1977): Endocronic and classical theories of plasticity in finite element analysis. Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Geilo (Norway), 151 – 165.  
Norwegian Institute of Technology, Trondheim.
- BEDNARCZYK, H. (1967): Hypoelastizität und freie Energie.  
Österreichische Akademie der Wissenschaften,  
Anzeiger der math.-naturw. Klasse, Nr. 2, 63 – 66.
- BEDNARCZYK, H. (1968): Eine einfache Herleitung der JAUMANNschen Spannungsgeschwindigkeit. Journal of Appl. Mathematics and Physics (ZAMP), 19, 140 – 141.
- BEDNARCZYK, H. (1986): Vorlesungen über Technische Mechanik, Teil III und IV. Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I der Universität Stuttgart.
- BEDNARCZYK, H. (1989): Vorlesungen über Technische Mechanik, Teil II. Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I der Universität Stuttgart.
- BESDO, J. (1981): Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat. Ingenieur-Archiv 51, 1 – 8.
- BETTEN, J. (1986): Elastizitäts- und Plastizitätslehre, 2. Auflage.  
Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden.
- BILLINGTON, E. W./TATE, A. (1981): The Physics of Deformation and Flow.  
McGraw-Hill, International Book Company New York.
- DE BOER, R./GOLLUB, W. (1988): Gleichungen für granulare Stoffe.  
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 68, 157 – 158.

- DE BOER, R. (1991): Theorie poröser Medien — Historische Entwicklung und gegenwärtiger Stand. Universität-Gesamthochschule-Essen, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 53.
- BOLTZMANN, L. (1876): Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. *Annalen der Physik und Chemie, Ergänzungsband VII*, 624 – 654.
- BREINLINGER, F. (1989): Bodenmechanische Stoffgleichungen bei großen Deformationen sowie Be- und Entlastungsvorgängen. Mitteilung 30, Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- BRONSTEIN, I. N./SEMENDJAJEW, K. A. (1987): Taschenbuch der Mathematik, 23. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt.
- BUCHMAIER, R. (1985): Zur Berechnung von Konsolidationsproblemen bei nichtlinearem Stoffverhalten. Mitteilung 23, Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- BUFLER, H. (1977): Einführung in die Elastizitätstheorie. Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.
- BUFLER, H./MERTENS, H. (1969): Berechnung einer viskoelastischen Klebeverbindung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 49, 427 – 440.
- CERVENKA, V./ELIGEHAUSEN, R./PUKL, R. (1990): SBETA Computer Program for Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, Mitteilungen 1990/1.
- DERSKI, W./IZBICKI, R./KISIEL, I./MROZ, Z. (1989): *Rock and Soil Mechanics. Developments in Geotechnical Engineering*, 48. Elsevier, Amsterdam Oxford New York Tokyo.
- DRUCKER, D. C. (1953): Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1, 217 – 226.
- DRUCKER, D. C. (1959): A definition of stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics* 26, 101 – 106.
- DRUCKER, D. C./PRAGER, W. (1952): Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly Applied Mathematics* 10, 157 – 165.
- DUNCAN, J. M./CHANG, C. (1970): Nonlinear analysis of stress and strain in soil. *Journal of the Soil Mech. and Found. Div. (ASCE, SM 5)*, Proc. of the Am. Society of Civil Engineers. 1629 – 1651.

- EINSTEIN, A. (1905): Eine neue Bestimmung der Moleküldimension. Dissertation, Zürich.
- FAIRHURST, C (1972): Fundamental considerations relating to the strength of rock. Heft 55, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, 1 – 56.
- FEESER, V. (1985): Bruchmechanismus steifer geklüfteter Tone bei einaxialer Kompression. In *Ingenieurgeologische Probleme im Grenzbereich zwischen Locker- und Festgesteinen* (Hrsg.: Heitfeld), 375 – 398. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- FEUERLEIN, P. (1965): Die Konsolidation planparalleler, unendlich ausgedehnter und wassergesättigter Tonschichten unter gleichmäßig verteilter Belastung mit Hilfe von vertikalen Drainwells. Heft 19, Otto Graf Institut, Universität Stuttgart.
- FLÜGGE, W. (1975): Viscoelasticity. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- FRANZ, G. (1970): Konstruktionslehre des Stahlbetons. 1. Band, 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- FREUDENTHAL, A. M./GEIRINGER, H. (1958): The mathematical theories of the inelastic continuum. In *Handbuch der Physik, Band VI, Elastizität und Plastizität* (Hrsg.: S. Flügge), 229 – 433. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg.
- FRITZ, P. (1981): Numerische Erfassung rheologischer Probleme in der Felsmechanik. Mitteilung 47, Institut für Strassen-, Eisenbahn- und Felsbau an der ETH Zürich.
- GALLAGHER, R. H./MANG, H. A. (1982): Finite Elemente Verfahren in der Bruchmechanik. In *Finite Elemente in der Bruchmechanik* (Hrsg.: Rossmanith), 87 – 114. Springer-Verlag, Wien New York.
- GARBSCH, T. (1973): Räumliche Konsolidation bei Zugrundelegung eines viskoelastischen Korngerüsts. Dissertation Stuttgart.
- GREEN, A. E./NAGHDI, P. M. (1965): A general theory of an elastic-plastic continuum. Arch. Rat. Mech. Anal., 18, 251 – 281.
- GOLLUB, W. (1989): Grenzen und Möglichkeiten der Mohr-Coulombschen Bruchbedingung. Fortschritt-Berichte Reihe 18, Nr. 68, VDI Verlag, Düsseldorf.
- GUDEHUS, G. (1973): Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenen Sand. Ingenieur Archiv 42, 151 – 169.

- GUDEHUS, G. (1980): Stoffgesetze der Bodenmechanik. In *Grundbau Taschenbuch* (Hrsg.: Smoltczyk), 3. Auflage, Teil 1, 117 – 144. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin München Düsseldorf.
- GUDEHUS, G. (1981): Bodenmechanik. Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart.
- GUMMERT, P./RECKLING, K.-A. (1987): Mechanik. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden.
- GUSSMANN, P. (1979a): Verschiebungsgesteuerte Konsolidationsprobleme. *Acta Mechanica* 34, 271 – 278.
- GUSSMANN, P. (1979b): Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus unterschiedlich drainierten Zeitsetzungs-Versuchen. *Geotechnik* 2, 148 – 154.
- GUSSMANN, P./THAMM, B. (1974): Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer Versuchsproben. *Der Bauingenieur* 49, 293 – 298.
- HAHN, H. G. (1976): Bruchmechanik — Einführung in die theoretischen Grundlagen. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart.
- HAUPT, P. (1977): Viskoelastizität und Plastizität — Thermomechanisch konsistente Materialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. (Ingenieurwissenschaftliche Bibliothek).
- HEUSERMANN, S. (1982): Kritische Gegenüberstellung und Bewertung von Stoffgesetzen zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Steinsalz auf der Grundlage von Laboruntersuchungen und in-situ-Messungen. Heft 6, Forschungsergebnisse aus dem Tunnel- und Kavernenbau, Universität Hannover.
- HOHENEMSER, K./PRAGER, W. (1932): Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 12, 216 – 226.
- ISMAR, H./MAHREHOLTZ, O. (1979): Technische Plastomechanik. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden.
- HUMPHESON, C./NAYLOR, D. J. (1975): The importance of the form of the failure criterion. *Proc. Int. Symp. Num. Methods in Rock- and Soil Mechanics*, Karlsruhe, 17 – 30.
- KLEIN, J. (1978): Nichtlineares Kriechen von künstlich gefrorenem Emschermergel. Schriftenreihe des Instituts für Grundbau, Wasserbau und Verkehrswesen der Ruhr-Universität Bochum, Heft 2, Serie G.

- KOLB, H. (1988): Ermittlung der Sohlreibung von Gründungskörpern unter horizontalem kinematischem Zwang.  
Mitteilung 28, Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- KOLYMBAS, D. (1988): Eine konstitutive Theorie für Böden und andere körnige Stoffe. Heft 109, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.
- KONDNER, Z. (1963): A hyperbolic stress strain formulation for sands.  
2. Pan. Am. ICOSFE Brazil, Vol. 1, 289 – 324.
- KRÖNER, E. (1978): Plastizität und Versetzungen. In SOMMERFELD, A.: *Mechanik der deformierbaren Medien*, Nachdruck der 6. Auflage, 310 – 376. Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt.
- LAMBE, T. W./WHITMAN, R. V. (1968): *Soil Mechanics*.  
John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane Toronto.
- LANGER, M. (1978): Grundzüge einer theoretischen Salzmechanik.  
3. Nationale Tagung über Felsmechanik Aachen und Bericht der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe zur Salzmechanik, Hannover.
- LAUFFER, H. (1958): Gebirgsklassifizierung für den Stollenbau.  
Geologie und Bauwesen 24, 46 – 51.
- LEHMANN, Th. (1962): Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung.  
Rheologica Acta 2, 247 – 254.
- LEHMANN, Th. (1972): Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen.  
Ingenieur Archiv 41, 297 – 310.
- LEINENKUGEL, H. J. (1976): Deformations- und Festigkeitsverhalten bindiger Erdstoffe — Experimentelle Ergebnisse und ihre physikalische Deutung. Heft 66, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.
- LUZ, E. (1970): Beitrag zur Kontinuumsmechanik endlicher Verzerrungen unter Berücksichtigung thermischer Vorgänge.  
Habilitationsschrift, Universität Stuttgart.
- MATTHEWS, M. C. (1988): The engineering application of direct and simple shear testing. *Ground Engineering* 21 (Journal of the British Geotechnical Society), 14 – 21.

- MUTH, G. (1989): Beitrag zur Beschreibung des Materialverhaltens bindiger Böden unter allgemeiner nichtmonotoner Belastung. Mitteilungshefte des Instituts für Grundbau, Boden- und Felsmechanik der TH Darmstadt, Heft 31.
- NATAU, O./MUTSCHLER, T./PIERSCHKE, K.-J./WINTER, K. (1984): Ermittlung von Festigkeitsparametern von bindigem, geschichtetem und tektonisch beanspruchtem Lockergestein mittels Großtriaxialversuchen mit Porenwasserdruckmessungen. Braunkohle 36, 19 – 24.
- OHDE, J. (1939): Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund. Bauingenieur 20, 451.
- ORTH, W. (1986): Gefrorener Sand als Werkstoff — Elementversuche und Materialmodell. Heft 100, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.
- OUCHTERLONY, F. (1984): Fracture toughness testing of rocks. In *Rock Fracture Mechanics* (Hrsg.: Rossmannith), CICSMS courses and lectures No. 275, 69 – 150. Springer-Verlag, Wien New York.
- PRAGER, W. (1961): Einführung in die Kontinuumsmechanik. Birkhäuser Verlag, Basel Stuttgart.
- PRANDTL, L. (1928): Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 8, 85 – 106.
- RABOTNOW, J. N./ILJUSCHIN, A. A. (1970): Methoden der Viskoelastizitätstheorie. Carl Hanser Verlag München.
- RAMM, E. (1976): Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente. Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.
- RAMM, E. (1988): Seminarunterlagen zum Thema: Grundlagen geometrisch und materiell nichtlinearer Berechnungen. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, unveröffentlicht.
- READ, H. E./HEGEMIER, G. A. (1984): Strain softening of rock, soil and concrete — a review article. *Mechanics of Materials* 3, 271 – 294.
- RECKLING, K.-A. (1967): Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. (Ingenieurwissenschaftliche Bibliothek).
- REINER, M. (1933): Gebrauch der Potenzfunktion zur Darstellung einer naturgesetzlichen Beziehung. *Die Naturwissenschaften* 16, 294 – 299.

- REINER, M. (1951): The rheological aspect of hydrodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics* 9, 341 – 349.
- REINER, M. (1958): Rheology. In *Handbuch der Physik, Band VI, Elastizität und Plastizität* (Hrsg.: S. Flügge), 434 – 550. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg.
- REINER, M. (1969): Rheologie in elementarer Darstellung. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag München.
- REINHARDT, H.-W. (1973): Ingenieurbaustoffe. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin München Düsseldorf.
- ROSCOE, K. H./BURLAND, J. B. (1968): On the generalized stress-strain behaviour of wet clay. In *Engineering Plasticity* (Eds.: Heyman/Leckie), Cambridge University Press, 535 – 609.
- SCHAD, H. (1979): Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben. Mitteilung 10, Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- SCHAEFER, C./PÄSLER, M. (1970): Einführung in die Theoretische Physik, Band I, 7. Auflage. Walter der Gruyter & Co, Berlin.
- SCHATT, W. (1987): Einführung in die Werkstoffwissenschaften, 6. Auflage. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg.
- SCHOFIELD, A./WROTH, P. (1968): Critical State Soil Mechanics. McGraw-Hill Book Company, London.
- SCHULTZE, E./HORN, A. (1966): Der Zugwiderstand von Hängebrücken-Widerlagern. Vorträge der Baugrundtagung 1966 in München, 125 – 186. Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e. V., Essen.
- SCHULZ, H./SMOLTZYK, U. (1978): Zur Ermittlung der Erddruckparameter überkonsolidierter Böden für Erddruckberechnungen. Vorträge der Baugrundtagung 1978 in Berlin, 275 – 296. Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e. V., Essen.
- SMITH, B. T./BOYLE, J. M./DONGARRA, J./GARROW, B. S./IKEBE, Y./KLEMA, V. C./MOLER, C. B. (1976): Matrix Eigensystem Routines — EISPACK Guide. *Lecture Notes in Computer Science* (Editors: Goos., G./Hartmanis., J.). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- SMOLTZYK, U. (1960): Ermittlung eingeschränkt plastischer Verformungen im Sand unter Flachfundamenten. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

- SMOLTTCZYK, U. (1967): Stress computation in soil media. *Journal of the Soil Mech. and Found. Div. (ASCE, SM 2)*, Proc. of the Am. Society of Civil Engineers. 101 – 124.
- SMOLTTCZYK, U. (1968): Zum bodenmechanischen Begriff der Kohäsion. Heft 35, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, 57 – 86.
- SMOLTTCZYK, U. (1985): Vor 100 Jahren: Reynolds beschreibt die Dilatanz. *Geotechnik* 8, 208 – 209.
- SMOLTTCZYK, U. (1987): Studienunterlagen *Bodenmechanik und Grundbau* des Instituts für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- SMOLTTCZYK, U./GUSSMANN, P (1980): Berechnung von Zeitsetzungen. In *Grundbau Taschenbuch* (Hrsg.: Smoltczyk), 3. Auflage, Teil 1, 215 – 228. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin München Düsseldorf.
- SMOLTTCZYK, U./WITTLINGER, M. (1991): Passive earth pressure of cohesive soils (mobilization): Summary of ongoing study. X ECSMFE, Florence, 749 – 752.
- SNEDDON, I. N./BERRY, D. S. (1958): The classical theory of elasticity. In *Handbuch der Physik, Band VI, Elastizität und Plastizität* (Hrsg.: S. Flügge), 1 – 126. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg.
- SOMMERFELD, A. (1978): *Mechanik der deformierbaren Medien*, Nachdruck der 6. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt.
- STEINMANN, B. (1985): Zum Verhalten bindiger Böden bei monotoner einaxialer Beanspruchung. Mitteilung 26, Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- SZABO, I. (1960): *Höhere Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg.
- SZABO, I. (1977): *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser Verlag, Basel Stuttgart.
- TAYLOR, D.W. (1948): *Fundamentals of Soil Mechanics*. John Wiley & Sons New York, Chapman & Hall London.
- TERZAGHI, K. (1925): *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. Franz Deuticke, Leipzig Wien.

- TRÜESDELL, C./NOLL, W. (1965): Die nichtlinearen Feldtheorien der Mechanik. In *Handbuch der Physik, Band III/3* (Hrsg.: S. Flügge). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- ULRICH, G. (1980): Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden.  
Mitteilung 11, Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- VYALOV, S. S. (1986): Rheological Fundamentals of Soil Mechanics. *Developments in Geotechnical Engineering* 36. Elsevier, Amsterdam Oxford New York Tokyo.
- WICHTER, L. (1980): Festigkeitsuntersuchungen an Großbohrkernen von Keupermergel und Anwendung auf eine Böschungsruftung. Heft 84, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.
- WILLAM, K. (1989): Stoffgesetze und numerische Ansätze für Versagensvorgänge in Beton. In *Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau* (Hrsg. E. Stein), 324 – 342. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- WILLAM, K./WARNKE, P. (1974): Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. Festschrift zum 60. Geburtstag von J. H. Argyris.
- WITTKÉ, W. (1984): Felsmechanik.  
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- ZENER, C. (1948): Elasticity and anelasticity of metals.  
The University of Chicago Press Chicago Illinois.
- ZIEGLER, H. (1967): Thermodynamic aspects of continuum mechanics.  
Centro Internazionale Matematico Estivo, Roma.
- ZIEGLER, H. (1976): Grundprobleme der Thermomechanik. ETH Zürich.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1977): The Finite Element Method (3rd edition). McGraw-Hill Book Company, London.



# Bezeichnungen

Symbol	Dimension <sup>1)</sup>	Begriff	Seite <sup>2)</sup>
$\underline{b}$	$l/t$	Beschleunigung ( <i>acceleration</i> )	75
$c_v$	1	Volumenkonzentration	32
$c'$	$F/l^2$	effektive Kohäsion i. A. wird für $c'$ nur $c$ geschrieben	59
$e$	1	Porenzahl ( $V_{Poren}/V_{Feststoffe}$ )	64
$w$	1	Wassergehalt ( $m_{Wasser}/m_{Feststoffe}$ )	32
$\varphi'$	°	effektiver Reibungswinkel i. A. wird für $\varphi'$ nur $\varphi$ geschrieben	59
$\underline{C}/\underline{C}_{-4}$		konstitutiver Tensor (Dimension und Art ergeben sich aus dem Zusammenhang)	46
$\underline{C}$		konstitutive Matrix	47
$\underline{\dot{\epsilon}}/\underline{D}$	$1/t$	Verzerrungsgeschwindigkeit, Verformungsgeschwindigkeit, Streckgeschwindigkeit, symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten	47
$\dot{\epsilon}$	$1/t$	Verzerrungsgeschwindigkeit in Form einer 1-spaltigen Matrix (Vektor)	47
$\epsilon_{vol}$	1	volumetrische Dehnung, Dilatation	77
$\dot{\epsilon}_{vol}$	$1/t$	Dilatationsgeschwindigkeit, Divergenz der Geschwindigkeit ( <i>rate of dilatation</i> )	49

<sup>1)</sup>  $l$ : Länge     $F$ : Kraft     $t$ : Zeit

<sup>2)</sup> Seite, auf der der Begriff beschrieben wird

$p$	$F/l^2$	hydrostatischer Druck	74
$\underline{\underline{R}}$	$1/t$	Drehtensor, Drehmatrix ( <i>local rotation tensor</i> )	70
$\underline{\underline{\sigma}}$	$F/l^2$	CAUCHYScher Spannungstensor	46
$\underline{\underline{\sigma}}$	$F/l^2$	Spannungstensor in Form einer 1-spaltigen Matrix (Vektor)	
$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$	$F/(tl^2)$	objektive Spannungsgeschwindigkeit (wenn nicht anders bezeichnet Spannungsgeschwindigkeit nach GREEN/NAGHDI)	70
$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$	$F/(tl^2)$	objektive Spannungsgeschwindigkeit in Form einer 1-spaltigen Matrix	47
$\underline{\underline{v}}$	$l/t$	Geschwindigkeit ( <i>velocity</i> )	75
$\underline{\underline{W}}$	$1/t$	schiefsymmetrischer Anteil des Geschwindig- keitsgradienten, Wirbeltensor ( <i>spin tensor, vorticity tensor</i> )	69

### Indizes

---

$dev$	deviatorisch
$el$	elastisch
$elpl$	elastoplastisch
$pl$	plastisch
$vis$	viskos
$visel$	viskoelastisch
$vol$	volumetrisch
$I, II, III$	Hauptkomponenten

# Kapitel 1

## Einführung

In der Geotechnik steht in vielen Fällen — wie im gesamten Bauwesen — die Frage nach den durch das System aufnehmbaren Belastungen im Vordergrund, wobei zeit- und geschwindigkeitsunabhängiges Materialverhalten vorausgesetzt wird. Bei verschiedenen geotechnischen Problemen treten jedoch Bewegungen über die Zeit auf, auch wenn sich die äußere Belastung nicht ändert. Diese zeitabhängigen Bewegungen werden in der Geotechnik im Falle senkrechter Fundamentbewegungen als Zeitsetzungen bezeichnet. „Die Zeitsetzung markiert den Übergang von einem Ausgangszustand zu einem durch eine Spannungsänderung notwendigen neuen Gleichgewichtszustand in einem mehrphasigen System“ (SMOLTCZYK/GUSSMANN 1980, S. 215). Dabei ist die Setzung nicht ausschließlich durch eine Änderung der äußeren Belastung bedingt. Bei der Zeitsetzung oder zeitabhängigen Bewegung wird allgemein unterschieden zwischen der Bewegung infolge abströmenden Porenwassers (*Primär- oder Konsolidationsetzung*) und der Bewegung infolge der Viskosität des Korngerüsts (*Sekundärsetzung oder säkulare Setzung*).

Wichtige Probleme, bei denen das zeitabhängige Verhalten des Korngerüsts dominiert — dessen Analyse vor allem der Gegenstand dieser Arbeit ist — sind das Hangkriechen und -fließen, das Zufließen untertägiger Hohlräume sowie Konstruktionen mit Spritzbeton oder Geotextilbewehrung. Bei den letztgenannten Bauwerken ergeben sich die Probleme vor allem dadurch, daß Alterung und Zähigkeit des Materials der Sicherungsmittel stark ausgeprägt sind. Neben den großen Verformungen, die an Hängen oder in Hohlräumen aus viskosen Erdstoffen auftreten und die möglichst genau prognostiziert werden sollen, sind die Fragen nach Langzeitstabilität und Standzeit von großem Interesse. Diese Fragestellung trat

in den letzten Jahren vor allem deshalb in den Vordergrund, da Hohlräume im Salzgebirge zur Endlagerung von Abfällen genutzt werden.

Wenn das zeitabhängige Verhalten des Korngerüsts in der praxisorientierten Literatur zur Felsmechanik ausführlicher dargestellt wird als in der Bodenmechanik, liegt das nicht daran, daß die Zeitabhängigkeit bei Festgesteinen stärker ausgeprägt ist als bei Lockergesteinen. Für die unterschiedliche Behandlung sind vor allem zwei Gründe maßgebend:

- Wegen der geringen Durchlässigkeit bindiger Böden sind Konsolidationsphänomene für die Tragfähigkeit häufig entscheidender als Zähigkeit und Alterung.
- Für die Berechnung der Böschungs- und Geländebruchsicherheit in der Baupraxis fordert DIN 4084 (Abschnitt 6) bei Lockergesteinen den Nachweis der Anfangs- und Endstandsicherheit; der Nachweis einer Standzeit wird nicht verlangt. Im Felshohlrraubau ist es dagegen allgemein üblich, die Standsicherheit eines Stollenabschnitts für eine bestimmte Zeit, die *Standzeit* oder *Stehzeit* auf der Basis empirischer Regeln (LAUFFER 1958) zu beurteilen.

Neben der Darstellung des zeitabhängigen Materialverhaltens und seiner Analyse im Rahmen numerischer Verfahren ist es das Ziel der Arbeit, die experimentelle Erfassung des Verhaltens von Erdstoffen zu verbessern, um die Diskrepanz zwischen dem was theoretisch formuliert und dem was experimentell belegt werden kann, zu verringern. Die Entwicklung eines neuen Schergerätes soll helfen, folgende Fragen zu beantworten:

- Ist eine in Triaxialversuchen beobachtete Entfestigung eine echte Materialeigenschaft oder eine Auswirkung der geometrischen Instabilität (Knicken, Beulen) ?
- Ist die in der technischen Anwendung der Plastizitätstheorie übliche Annahme der Koaxialität von Spannungstensor und Verzerrungsgeschwindigkeit für Erdstoffe eine brauchbare Hypothese ?

In der Geotechnik werden Spannungs- und Verformungsberechnungen meist auf der Basis der linearisierten Elastizitätstheorie, Traglastberechnungen auf der Grundlage der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie durchgeführt. In beiden Fällen werden kleine Bewegungen vorausgesetzt, so daß der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität vernachlässigt wird. Da sich bei viskosem Verhalten des Korngerüsts häufig große Bewegungen ergeben, die das Systemversagen entscheidend beeinflussen können, werden endliche Verschiebungen, Verdrehungen und Verzerrungen berücksichtigt. Dazu

wird das bei BREINLINGER (1989) beschriebene Konzept verwendet (Ausnahmen: Berechnungen zur Konsolidation).

Die Untersuchungen vernachlässigen Trägheitskräfte und thermische Effekte. Die Beschreibung des Stoffverhaltens bleibt im Rahmen des klassischen Kontinuums. Theorien zum nichtlokalen Stoffverhalten und aus dem Bereich der Mikrophysik werden nicht in die Betrachtungen einbezogen.



## Kapitel 2

### Stoffgleichungen

Zentrale Begriffe zur Kennzeichnung der Festigkeit geologischer Materialien sind *Kohäsion* und *Reibung*, die erstmals 1776<sup>1</sup> von COULOMB definiert wurden. Durch Anwendung des Extremalprinzips gelangte er zur Berechnung von Gleitbrüchen (SZABO 1977, S. 385). RANKINE (1856) und MOHR (1871) erweiterten die COULOMBSche Theorie für den allgemeinen Spannungszustand (nach DE BOER 1991), so daß häufig der Begriff MOHR-COULOMBSche Festigkeitshypothese benutzt wird. Aus den Erkenntnissen der Elastizitätstheorie, der Theorie der Zähnen Flüssigkeiten und der Festigkeitslehre entstand in den 20er Jahren dieses Jahrhunderts die Disziplin der *Rheologie*, die SCHAEFER/PÄSLER (1970), S. 374, als eine Mechanik definieren, die „zwischen der Mechanik der Starren Körper und der Mechanik der Zähnen Flüssigkeiten liegt“. Während bei verschiedenen Autoren (z. B. REINER 1958 und 1969) die Viskoelastizität als Teilgebiet der Rheologie behandelt wird und sie sich vor allem auf die Arbeiten von BINGHAM beziehen, sehen andere Autoren (DERSKI ET. AL. 1989, KRÖNER 1978, RABOTNOW/ILJUSCHIN 1970) den Ausgangspunkt der *Viskoelastizität*, und damit auch die zentrale Begründung der Rheologie, in der *Theorie der elastischen Nachwirkung* von BOLTZMANN (1876). Bereits in dieser Arbeit, S. 643, wird ein logarithmisches Kriechgesetz formuliert, das dieselbe Form hat wie das bei GUDEHUS (1980), S. 143, erwähnte BUISMAN-Gesetz für die Sekundärsetzungen bindiger Bodenschichten.

Etwa in der Zeit, in der die *Rheologie* zu einer eigenständigen Disziplin entwickelt wurde, entstand TERZAGHIs Hauptwerk *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage* (erschieden 1925), das häufig als Grundlage

<sup>1</sup> Die Arbeit wurde 1776 im Jahrgang 1773 der Zeitschrift „Mémoires de Mathématiques et des Physiques“ publiziert, weshalb die Arbeit auch häufig auf 1773 datiert wird (SZABO 1977).

der modernen Bodenmechanik angesehen wird. Eine ausführliche Darstellung der Arbeiten TERZAGHIS, insbesondere der Konsolidationstheorie, im historischen Zusammenhang mit der Entwicklung der Theorie poröser Medien ist bei DE BOER 1991 zu finden. Rheologie und Bodenmechanik gemeinsam ist die Erkenntnis, daß der entscheidende Parameter zur Kennzeichnung der Eigenschaften eines Gemisches das Mischungsverhältnis ist. In der Bodenmechanik ist das der Wassergehalt ( $w$ ), der in Verbindung mit der Dichte die Zusammensetzung des Dreiphasengemisches angibt, wenn man die Dichten von Kornsubstanz, Wasser und Luft als bekannt voraussetzt. In der Rheologie ist es die Volumenkonzentration der Partikel ( $c_v$ ) im Zweiphasengemisch. Der Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften und der Zusammensetzung des Gemisches — ein Hauptthema von Bodenmechanik und Rheologie — wurde bereits von EINSTEIN (1905) theoretisch begründet. Als „Nebenprodukt“ bei den Bemühungen zur Bestimmung der Moleküldimensionen erhält er für das Verhältnis der Zähigkeiten von Lösungsmittel und Gemisch die Gleichung

$$\frac{\mu_{\text{Gemisch}}}{\mu_{\text{Lösungsmittel}}} = 1 + c_v .$$

„Werden in einer Flüssigkeit sehr kleine starre Kugeln suspendiert, so wächst dadurch der Koeffizient der inneren Reibung um einen Bruchteil, der gleich ist dem Gesamtvolumen der in der Volumeneinheit suspendierten Kugeln, vorausgesetzt, dass dieses Gesamtvolumen sehr klein ist“ (EINSTEIN 1905, S. 17). 1911 korrigierte EINSTEIN die rechte Seite der Gleichung in  $1 + 2,5 \cdot c_v$ . Da der EINSTEINSchen Gleichung viele vereinfachende Annahmen zugrunde liegen, ist es natürlich, daß man bei empirischen Untersuchungen mit realen Gemischen zu anderen Gleichungen kommt; doch die Tendenz der EINSTEINSchen Formel wird immer wieder bestätigt (z. B. SMOLTZYK 1968, S. 64). Obwohl die Methoden von Rheologie und Bodenmechanik sehr ähnlich sind, haben sie sich unabhängig zu eigenständigen Disziplinen entwickelt. Belege für die unabhängige Entwicklung sind:

- Wassergehalt und Volumenkonzentration (REINER 1958, S. 524) sind unterschiedlich definiert:

$$\begin{array}{l} \text{Bodenmechanik: } w = \frac{\text{Masse des Wassers in einem Gebiet}}{\text{Masse der Feststoffe in diesem Gebiet}} , \\ \text{Rheologie: } c_v = \frac{\text{Volumen der Partikel in einem Gebiet}}{\text{Volumen des Gebiets}} . \end{array}$$

- In dem Standardwerk der Rheologie von REINER (1969) finden sich

keine Hinweise auf die Bodenmechanik oder die Konsolidationstheorie. Während in der Bodenmechanik die Wechselwirkung zwischen der flüssigen und der festen Phase in Theorie und Praxis eine große Rolle spielt, werden in der Rheologie die Stoffe vor allem als einphasiges Medium betrachtet.

- Während die meisten Arbeiten aus Rheologie und Viskoelastizitätstheorie eine mathematische Behandlung von Anfangs- und Randwertproblemen bei einem Materialverhalten, das vom HOOKESchen Gesetz abweicht, intendieren, schreibt TERZAGHI (1925), S. 5: „.... Nun weichen aber, wie in dieser Schrift gezeigt wird, die Festigkeitseigenschaften der Böden so sehr vom Hookeschen Gesetz ab, daß an eine strenge mathematische Behandlung der Probleme nicht gedacht werden kann und die Erdbaumechanik muß notgedrungen den Charakter einer beschreibenden Wissenschaft annehmen.“

Die quantitative Bestimmung von Festigkeit, Zähigkeit, Steifigkeit etc. eines Stoffes ist nur möglich im Rahmen einer bestimmten Struktur der Materialgleichungen (eines Stoffgesetzes), also z. B. im Rahmen von Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie oder der Theorie der zähen Flüssigkeit. Diese „klassischen Konzepte“ sind jedoch nicht die allein denkbaren Methoden, denn die allgemeinste Form des Stoffgesetzes (rheologisches Modell, konstitutive Beziehung) ist ein zeitliches Funktional, das Spannungs-, Verzerrungs- und thermische Größen enthält und die Bedingungen von Objektivitätsprinzip und Invarianzbedingung erfüllt (LUZ 1970, S. 81). Obwohl Objektivitätsprinzip und Invarianzforderung essentiell für die Formulierung von Stoffgleichungen sind, werden sie hier nicht weiter erörtert, sondern es wird auf BEDNARCZYK (1968), BREINLINGER (1989), GUDEHUS (1973) und LUZ (1970) verwiesen.

Die folgende Beschreibung der in der Geotechnik verwendeten Stoffgesetze orientiert sich an den „klassischen Konzepten“, da sie in der technischen Anwendung dominieren. In Abschnitt 2.2.3 werden dann die Arbeiten erwähnt, die von anderen Schemata zur Gliederung der Stoffgesetze ausgehen.

## 2.1 Methodik der rheologischen Modelle

Durch Kombination der *Idealen Körper* (HOOKE — ideal elastisch, NEWTON — ideale zähe Flüssigkeit, ST.VENANT — ideal plastisch) kann man viele hypothetische Medien konstruieren, mit denen sich häufig, zumindest qualitativ, das Verhalten realer Stoffe beschreiben läßt. Es ist jedoch eine Überbewertung der rheologischen Modelle, wenn verschiedentlich der Eindruck erweckt wird, die einzige Möglichkeit, Stoffgleichungen zu formulieren, seien Kombinationen *Idealer Körper*, und die Beschreibung der Eigenschaften eines Stoffes sei dann gelöst, wenn ein adäquates Modell durch Kombination idealer Medien gefunden sei. Die rheologischen Modelle sind vor allem ein didaktisches Hilfsmittel, da mechanische Modelle häufig anschaulicher das Materialverhalten beschreiben als mathematische Gleichungen. Auch wenn ein Modell aus einfachen mechanischen Elementen die Realität nur qualitativ beschreiben kann, ist seine Verwendung in vielen Bereichen der Physik ein nützliches Hilfsmittel. Dies wird z. B. durch das Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper (PRANDTL 1928, Bild 9), oder das Modell zur Abnahme der mechanischen Festigkeit eines Korngefüges mit wachsender Verschiebung (SMOLTZYK 1968, Bild 11) belegt. Man muß sich allerdings darüber im klaren sein, daß es nicht möglich ist, die Eigenschaften der mechanischen Elemente des Modells bestimmten Komponenten eines Erdstoffes zuzuordnen. Im Bewußtsein dieser Tatsache sollen die rheologischen Modelle in dieser Arbeit genutzt werden. Die Bezeichnungen der rheologischen Körper werden auch auf nichtlineares Verhalten bezogen: z. B. der Begriff der *nicht-NEWTONSchen Flüssigkeit* sei identisch mit dem der *verallgemeinerten NEWTONSchen Flüssigkeit* (REINER 1958, S. 488).

In Anbetracht der zahlreichen Bücher über Rheologie und Viskoelastizität ist es nicht notwendig, eine umfassende Darstellung zu geben. Zur Klärung der Begriffe erfolgt lediglich eine knappe Erläuterung der für die Bodenmechanik relevanten Modelle, die sich an der Systematik von HOHENEMSER/PRAGER (1932) orientiert.

Im eindimensionalen Fall ergeben sich danach die wichtigsten Idealstoffe als Sonderfälle der Beziehung

$$\sigma + c_1 \dot{\sigma} + c_2 \varepsilon + c_3 \dot{\varepsilon} + c_4 = 0 . \quad (2.1)$$

Für  $c_4 = 0$  definiert Gleichung (2.1) den ZENER-Körper, wie er z. B. von BUFLER/MERTENS (1969) zur Beschreibung des Deviatorverhaltens eines Klebers verwendet wird. GARBSCH (1973), ULRICH (1980) und STEINMANN

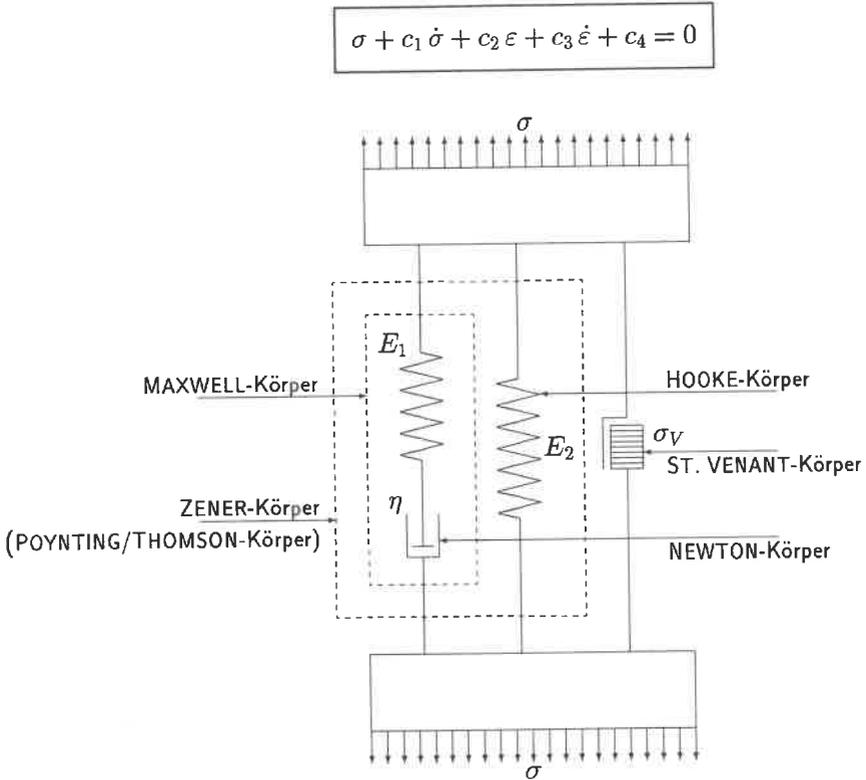
(1985) verwenden dieses Modell zur Beschreibung des zeitabhängigen Verhaltens des Korngerüsts bei Konsolidationsproblemen. Bei ULRICH und REINER (1958) wird das ZENER-Modell als POYNTING/THOMSON<sup>2</sup>-Körper bezeichnet, da POYNTING/THOMSON dieses Modell bereits 1902 zur Interpretation des Verhaltens von Glasfasern benutzten, worauf auch ZENER (1948), S. 42, hinweist. Für den durch Gleichung (2.1) mit  $c_4 = 0$  definierten Stoff wird von ZENER (1948), S. 43, der Begriff *standard linear solid* eingeführt. Er ist ein Sonderfall des allgemeinen Viskoelastizitätsgesetzes, in dem auch Nichtlinearität und höhere Ableitungen von Spannung und Verzerrung zugelassen sind (KRÖNER 1968, S. 311). Von ZENER (1948) wird der Begriff der Anelastizität eingeführt. Er will damit deutlich machen, daß nichtelastisches oder anelastisches Verhalten nicht zwangsläufig mit irreversiblen Verformungen verbunden sein muß. Von anderen Autoren, z. B. FREUDENTHAL/GEIRINGER (1958), S. 229 f, werden spezielle viskoelastische Phänomene als anelastisches Verhalten bezeichnet. KRÖNER (1978), S. 314, stellt ganz allgemein fest: „Die Anelastizität ist also eine spezielle Erscheinungsform innerhalb des allgemeineren Phänomens der Viskoelastizität“

Bild 2.1 soll anschaulich die physikalische Bedeutung von Gleichung (2.1) darstellen und eine Brücke bilden zu den bei Anwendungen benutzten einfacheren Modellen.

Eine anschauliche Herleitung des durch Gleichung (2.1) beschriebenen Körpers ergibt sich, wenn man von den einfacheren Idealstoffen ausgeht. Die Herleitung wird übersichtlich, wenn man zunächst die Differentialgleichung des ZENER-Körpers herleitet, also  $\sigma_V = 0$ , d. h. der ST-VENANT-Körper wird vernachlässigt, und danach zwischen den Fällen  $|\sigma| \geq |\sigma_V|$  und  $|\sigma| < |\sigma_V|$  ( $\text{sign } \sigma = \text{sign } \sigma_V$ ) unterscheidet.

---

<sup>2</sup> J. J. Thomson, nicht Sir William Thomson (Lord Kelvin)



**Bild 2.1:** Systematik einfachster Idealstoffe (HOHENEMSER/PRAGER 1932)

$$\text{Maxwell-Körper:} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_1} \dot{\sigma}^{Maxw} + \frac{1}{\eta} \sigma^{Maxw} . \quad (2.2)$$

$$\text{Hooke-Körper:} \quad \sigma^{Hooke} = E_2 \varepsilon \quad \text{oder} \quad \dot{\sigma}^{Hooke} = E_2 \dot{\varepsilon} . \quad (2.3)$$

Wegen der Parallelschaltung von MAXWELL-, HOOKE-, und ST.-VENANT-Körper treten nur Bewegungen ein, wenn  $|\sigma| \geq |\sigma_V|$ , wobei  $\text{sign}\sigma = \text{sign}\sigma_V$ . Es gilt dann:

$$\sigma - \sigma_V = \sigma^{Maxw} + \sigma^{Hooke} \quad \text{oder} \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{Maxw} + \dot{\sigma}^{Hooke} , \quad (2.4)$$

$$\dot{\sigma}^{Maxw} = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^{Hooke} , \quad (2.5)$$

$$\dot{\sigma}^{Maxw} = \dot{\sigma} - E_2 \dot{\varepsilon} . \quad (2.6)$$

Aus Gleichung (2.2) folgt:

$$\dot{\sigma}^{Maxw} = E_1 \dot{\varepsilon} - \frac{E_1}{\eta} \underbrace{(\sigma - E_2 \varepsilon)}_{\sigma^{Maxw} = \sigma - \sigma^{Hooke}} \quad (2.7)$$

Aus den Gleichungen (2.6) und (2.7) ergibt sich die Gleichung des ZENER-Körpers mit den Bezeichnungen von Bild 2.1:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} - E_2 \varepsilon - \frac{\eta}{E_1} (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} = 0 \quad (2.8)$$

Für den allgemeinen Fall  $\eta \neq 0$ ;  $E_1 \neq 0$ ,  $E_2 \neq 0$  ergibt sich zwischen den Koeffizienten der Gleichung (2.1) und den Bezeichnungen von Bild 2.1 der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\eta}{E_1}; & c_2 &= -E_2; \\ c_3 &= -\frac{\eta}{E_1}(E_1 + E_2); & c_4 &= -\sigma_V \end{aligned} \quad (2.9)$$

Der charakteristische Unterschied zwischen Feststoffen und Flüssigkeiten wird allgemein in der Tatsache gesehen, daß der Feststoff im Ruhezustand deviatorische Spannungen übertragen kann, die Flüssigkeit nicht. (Eine ausführlichere Differenzierung der Merkmale von Gasen, Flüssigkeiten und Feststoffen wird von LUZ (1970), S. 82/83, gegeben). Durch Gleichung (2.1) wird nun eine Klasse von Idealstoffen beschrieben, die nicht eindeutig als Feststoffe oder Flüssigkeiten klassifiziert werden können. Je nach den Eigenschaften, die überwiegen, werden die Stoffe (rheologische Körper), der Ordnung von HOHENEMSER/PRAGER (1932), S. 221 ff, folgend, nach „flüssigen“ und „festen“ Idealstoffen geordnet.

### 2.1.1 „Flüssige“ Idealstoffe nach Hohenemser/Prager

Für  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_4 = 0$  oder  $E_1 \rightarrow \infty$ ,  $E_2 = 0$ ,  $\sigma_V = 0$  beschreiben Gl. (2.1) bzw. Bild 2.1 die NEWTONSche Flüssigkeit. Ist dagegen  $c_2 \neq 0$ , d. h. dem „Dämpfer“ ist eine „Feder“ vorgeschaltet,  $0 < E_1 < \infty$ , erhält man die MAXWELLSche Flüssigkeit.

**MAXWELLSche Flüssigkeit:**

$$\sigma + c_1 \dot{\sigma} + c_3 \dot{\varepsilon} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.10)$$

Dieser Stoff, der von MAXWELL (1890) vorgeschlagen wurde (zitiert nach HOHENEMSER/PRAGER 1932, S. 221), unterscheidet sich von der zähen Flüssigkeit dadurch, daß bei einer plötzlichen Steigerung der Dehnungsgeschwindigkeit (Trägheitskräfte werden vernachlässigt) die Spannung nur allmählich anwächst. Geht man von einem belasteten Zustand aus und reduziert  $\dot{\epsilon}$  auf 0, verschwindet die Spannung mit der Zeit, der Stoff relaxiert. Für den Fall plötzliches „Anfahren“ auf eine konstante Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_c$ , läßt sich die Dgl. einfach integrieren:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta} \sigma = \dot{\epsilon}_c E_1 \quad \rightarrow \quad \sigma = a_1 \frac{\eta}{E_1} \exp\left(-\frac{E_1}{\eta} t\right) + \eta \dot{\epsilon}_c .$$

Mit der Anfangsbedingung  $\sigma = 0$  bei  $t = 0$  ergibt sich für die Integrationskonstante  $a_1 = -\dot{\epsilon}_c E_1$  und somit

$$\sigma = \dot{\epsilon}_c \eta \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_1}{\eta} t\right) \right] . \quad (2.11)$$

Reduziert man bei einem stationären Zustand mit der Spannung  $\sigma_c$ , also  $\dot{\epsilon} = \sigma_c/\eta$ , die Dehnungsgeschwindigkeit plötzlich auf 0, führt also einen Relaxationsversuch durch, ergibt sich

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta} \sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma = a_1 \frac{\eta}{E_1} \exp\left(-\frac{E_1}{\eta} t\right) .$$

Wegen der Anfangsbedingung  $\sigma = \sigma_c$  bei  $t = 0$  lautet die Gleichung für die Spannungsrelaxation

$$\sigma = \sigma_c \exp\left(-\frac{E_1}{\eta} t\right) . \quad (2.12)$$

Man nennt den Quotienten  $\eta/E_1$  auch *Relaxationszeit*. Es ist die Zeit, in der nach dem Abfall der Dehnungsgeschwindigkeit die Spannung auf den  $e$ -ten Teil abgesunken ist.

### BINGHAM-Körper:

$$\sigma + c_3 \dot{\epsilon} + c_4 = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} (\sigma - \sigma_V) ; \quad (2.13)$$

$$\left( c_3 < 0 ; \text{sign } c_4 = -\text{sign } \sigma ; \right. \quad \left. \left( \text{sign } \sigma = \text{sign } \sigma_V ; \right. \right. \\ \left. \left. |\sigma| > |c_4| \right) \quad \left. \left. |\sigma| > |\sigma_V| \right) \right.$$

Dieser Idealstoff wurde von BINGHAM (1916) und HENCKY (1925) vorgeschlagen (zitiert nach HOHENEMSER/PRAGER 1932, S. 222). In dieser Form ist der BINGHAM-Körper auch bei GUDEHUS (1980), S. 141, oder PRAGER (1961), S. 125, beschrieben, während bei REINER (1958), S. 458, und VYALOW (1986), S. 236, noch ein HOOKEscher Körper vorgeschaltet ist. Der BINGHAM-Körper verhält sich unterhalb einer bestimmten Beanspruchung, definiert durch  $\sigma_V$ , wie ein starrer Körper, für  $|\sigma| > |\sigma_V|$  wie eine zähe Flüssigkeit, die durch  $\sigma - \sigma_V$  beansprucht wird. Deshalb ist auch die Bezeichnung *plastische Flüssigkeit* üblich. Dementsprechend erhält man für

$$\sigma + c_1 \dot{\sigma} + c_3 \dot{\varepsilon} + c_4 = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma - \sigma_V = \eta \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}$$

mit der Nebenbedingung  $|\sigma| > |\sigma_V|$

einen BINGHAM-Körper mit Relaxation. Die Grenzspannung  $\sigma_V$  wird auch als *Anlaufwiderstand* bezeichnet. Das BINGHAM-Modell ist im Grundbau von Bedeutung bei der Beurteilung von Bentonitsuspensionen (GUDEHUS 1980, S. 141), bei der Injektionstechnik (KAISER 1968), bei der Berechnung des Seitendrucks auf Pfähle (SMOLTZYK 1987, S. 180) und beim Hangfließen. Dabei ist bei weichen Tonböden die undränierte Scherfestigkeit  $c_u$  ein Maß für den Anlaufwiderstand.

### 2.1.2 „Feste“ Idealstoffe nach Hohenemser/Prager

Durch Parallelschaltung von HOOKEschem- und NEWTONschem-Körper ergibt sich der von VOIGT (1889) (HOHENEMSER/PRAGER 1932, S. 222) vorgeschlagene Idealstoff, der als VOIGT- oder KELVIN-Körper bezeichnet wird. In Physikbüchern ist allgemein die Bezeichnung VOIGT-Körper, in der bodenmechanischen Literatur KELVIN-Körper üblich. Gleichung (2.1) beschreibt den VOIGT-Körper, wenn  $c_1 = 0$  und  $c_4 = 0$ . Bild 2.1 stellt diesen Körper dar, wenn  $E_1 \rightarrow \infty$ ,  $E_2 \neq 0$ ,  $\sigma_V = 0$ .

#### VOIGT-Körper:

$$\sigma + c_2 \varepsilon + c_3 \dot{\varepsilon} = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma = \eta \dot{\varepsilon} + E_2 \varepsilon . \quad (2.14)$$

Wenn man  $\varepsilon$  und  $\sigma$  vertauscht, entspricht diese Gleichung der für die MAXWELLSche Flüssigkeit. Belastet man den VOIGT-Körper mit einer konstanten Spannung  $\sigma = \sigma_c$ , erhält man eine zeitabhängige Dehnung (Kriech-

funktion):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \right] . \quad (2.15)$$

Analog zur Spannungsrelaxation erhält man die *Retardation* — Rückverformung aus einem belasteten Ruhezustand infolge Entlastung — nach der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_2} \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) . \quad (2.16)$$

Entsprechend wird beim VOIGT-Körper der Quotient  $\eta/E_2$  als *Retardationszeit* definiert. Es ist die Zeit, in der beim Entlastungsversuch die Dehnung  $\varepsilon_c = \sigma_c/E_2$  auf den  $e$ -ten Teil abgesunken ist.

Eine interessante Anwendung des VOIGT-Modells bei der analytischen Lösung der eindimensionalen Konsolidation findet man bei GUSSMANN (1979b). Von SMOLTZYK/GUSSMAN (1980), S. 227, wird darauf hingewiesen, daß das VOIGT-Modell bei der Analyse der Sekundärsetzungen hilfreich sein kann. Der Vorteil gegenüber dem ZENER-Modell wird in der einfacheren Bestimmung der Materialparameter gesehen. Auch die bei FRANZ (1970), S. 38, erwähnte Gleichung für Beton entspricht der Kriechgleichung des VOIGT-Modells. Bei FRANZ wird der Ansatz allerdings als „von Dischinger herrührend“ zitiert.

### ZENER-Körper:

$$\sigma + c_1 \dot{\sigma} + c_2 \varepsilon + c_3 \dot{\varepsilon} = 0 \quad (2.17)$$

oder

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} - E_2 \varepsilon - \frac{\eta}{E_1} (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} = 0 .$$

Aus dem ZENER-Modell (Herleitung auf Seite 37) ergibt sich für den Kriechversuch ( $\sigma = \sigma_c$ ,  $\dot{\sigma} = 0$ ) in der Terminologie von Bild 2.1:

$$\eta \left( \frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) \dot{\varepsilon} + E_2 \varepsilon = \sigma_c ,$$

mit der Lösung

$$\varepsilon = \alpha \exp(\beta t) + \gamma , \quad (2.18)$$

wobei:

$$\beta = -\frac{E_1 E_2}{\eta (E_1 + E_2)} ,$$

$$\gamma = \frac{\sigma_c}{E_2} .$$

Mit der Anfangsbedingung ( $t = 0$ )  $\varepsilon_0 = \sigma_c / (E_1 + E_2)$  ergibt sich für  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\sigma_c}{E_1 + E_2} - \frac{\sigma_c}{E_2} = \frac{\sigma_c}{E_2} \frac{-E_1}{E_1 + E_2}. \quad (2.19)$$

Somit lautet die Kriechgleichung für den Sonderfall konstanter Spannung  $\sigma_c$ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_2} \left[ \left( \frac{-E_1}{E_1 + E_2} \right) \exp \left( -\frac{E_1 E_2}{\eta (E_1 + E_2)} t \right) + 1 \right]. \quad (2.20)$$

Bei Entlastung, d. h. aus einem stationären Zustand ( $\sigma = \sigma_c; \varepsilon = \sigma_c / E_2$ ) heraus wird  $\sigma$  plötzlich auf 0 reduziert, ergibt sich bei  $t = 0$ :

$$\varepsilon_0 = \alpha = \frac{\sigma_c}{E_2} - \frac{\sigma_c}{(E_1 + E_2)},$$

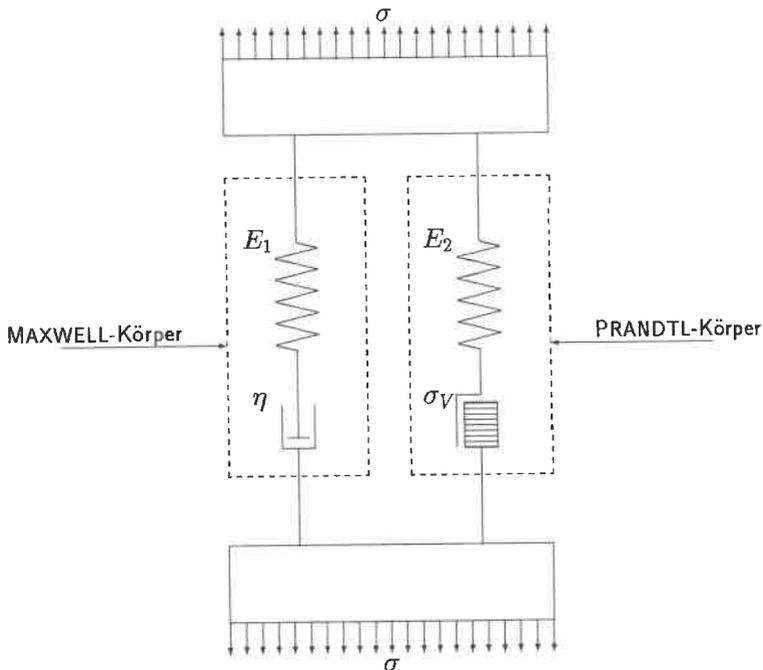
und der Körper retardiert nach der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_2} \frac{E_1}{E_1 + E_2} \exp \left( -\frac{E_1 E_2}{\eta (E_1 + E_2)} t \right). \quad (2.21)$$

Von der Dgl. (2.1) ausgehend kann man für den Sonderfall  $c_4 = 0$  das Drei-Elemente-Modell auch als Hintereinanderschaltung eines HOOKESCHEN- und eines VOIGTSCHEN Körpers darstellen. Diese Darstellung wählen VYALOV (1986), S. 223, der dieses Modell als *generalized visco-elastic body* bezeichnet, und RABOTNOW/ILJUSCHIN (1970), S. 14, die dieses Modell KELVIN-Körper nennen. Eine ausführliche Darstellung der Viskoelastizität für die Ingenieur Anwendung findet man bei FLÜGGE, W. (1975). Außer den beschriebenen Modellen lassen sich viele andere Modelle mit noch mehr rheologischen Körpern konstruieren (LANGER 1978, REINER 1958, VYALOV 1986). Da der didaktische Nutzen der komplexen Modelle wegen ihrer Kompliziertheit fragwürdig ist, wird auf ihre Darstellung verzichtet. Es wird jedoch noch ein modifiziertes ZENER-Modell vorgestellt, wie es in erweiterter Form Grundlage der numerischen Analyse ist (Abschnitt 3.2.3).

### 2.1.3 Modifiziertes Zener-Modell

In der Verallgemeinerung auf beliebige Spannungszustände und große Deformationen ist das in Bild 2.2 dargestellte Modell Grundlage der numerischen Analyse. Es besteht aus der Parallelschaltung eines PRANDTL-Körpers und einer MAXWELLSchen Flüssigkeit. Bei DERSKI ET. AL. (1989), S. 33, wird dieser Körper als  $M|V$ -Modell<sup>3</sup>, also als Parallelschaltung von MAXWELL-Flüssigkeit und ST.-VENANT-Körper bezeichnet, da DERSKI ET. AL., wie auch REINHARDT (1973), S. 10, für den elastoplastischen Körper die Bezeichnung ST.-VENANT-Körper wählen. REINER (1958) dagegen nennt den plastischen Körper nach ST.-VENANT und den elastoplastischen nach PRANDTL. In dieser Arbeit werden die plastischen Körper entsprechend der Konvention von REINER bezeichnet.



**Bild 2.2:** Modifiziertes ZENER-Modell

<sup>3</sup> Der vertikale Strich zwischen  $M$  und  $V$  steht als Symbol für Parallelschaltung

Das in Bild 2.2 dargestellte Modell verhält sich je nach Zeit und Belastung wie ein ZENER-Körper, oder wie ein BINGHAM-Körper mit Relaxation. Es nimmt also eine Zwitterstellung ein zwischen den in den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 behandelten Körpern und rechtfertigt daher die Behandlung in einem gesonderten Abschnitt.

Wenn  $|\sigma| \leq |\sigma_V|$ , wobei  $\text{sign } \sigma = \text{sign } \sigma_V$ , gelten immer die Gleichungen des ZENER-Körpers. Für  $|\sigma| > |\sigma_V|$  sind zwei Bereiche zu unterscheiden:

1. Die Belastung ist so hoch, daß im ST. VENANT Teil des PRANDTL-Körpers sofort die Festigkeit  $\sigma_V$  überschritten wird (im Kriechversuch bei  $\sigma > \sigma_V(E_1 + E_2)/E_1$ ).
2. Es ist zwar  $|\sigma| > |\sigma_V|$ , jedoch vor einem Zeitpunkt  $t_{crit}$  ist die Spannung im PRANDTL-Körper kleiner als  $\sigma_V$ . Für  $t \leq t_{crit}$  entspricht dann das Verhalten dem ZENER-Körper, für  $t > t_{crit}$  dem der plastischen Flüssigkeit.

$$\sigma + c_1 \dot{\sigma} + c_3 \dot{\epsilon} = \begin{cases} -c_2 \epsilon & \text{für } t \leq t_{crit} \\ -c_4 & \text{für } t > t_{crit} \end{cases} \quad (2.22)$$

oder

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1} \left( \dot{\sigma} - \frac{E_1 + E_2}{E_1} \dot{\epsilon} \right) = \begin{cases} E_2 \epsilon & \text{für } t \leq t_{crit} \\ \sigma_V & \text{für } t > t_{crit} \end{cases} \quad (2.23)$$

Aus Gleichung (2.20) kann man für den Kriechversuch ( $\sigma = \sigma_c = \text{const}$ ) die kritische Zeit  $t_{crit}$  bestimmen. Im PRANDTL-Körper von Bild 2.2 entwickelt sich entsprechend der Kriechgleichung des ZENER-Körpers in Abhängigkeit von der Zeit die Spannung:

$$\sigma^{Prandtl} = \sigma_c \left[ \frac{-E_1}{E_1 + E_2} \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t\right) + 1 \right]. \quad (2.24)$$

Damit erhält man für die kritische Zeit, die man auch als *Standzeit* bezeichnen kann, die Gleichung:

$$t_{crit} = -\frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \ln\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \frac{\sigma_c - \sigma_V}{\sigma_c}\right). \quad (2.25)$$

Die Dauerstandfestigkeit (REINHARDT 1973, S. 38) oder Langzeitfestigkeit (KLEIN 1978, S. 58) ist dann die max. Spannung, die das Material bei

einer Standzeit  $t \rightarrow \infty$  aufnehmen kann. Der Körper hat keine Standzeit, d. h. bereits bei  $t = 0$  verhält er sich wie eine MAXWELLSche Flüssigkeit, die durch  $\sigma_c - \sigma_V$  belastet wird, also  $\dot{\epsilon} = (\sigma_c - \sigma_V)/\eta$ , wenn

$$\sigma_c \geq \sigma_V \frac{E_1 + E_2}{E_2}. \quad (2.26)$$

## 2.2 Elastizität und Plastizität

### 2.2.1 Elastizität

In diesem Abschnitt werden die Konzepte behandelt, die mit dem Begriff elastisch verknüpft werden. In der Geotechnik wird dabei meist nicht differenziert zwischen *hypoelastisch*, *elastisch* und *hyperelastisch*, sondern von elastischen Berechnungen spricht man auch dann, wenn das „HOOKEsche Gesetz“ auf Spannungs- und Verzerrungssinkrement angewandt wird und man mit spannungsabhängigen Moduli rechnet. Also auch bei einem Stoff, der nach PRAGER (1961), S. 143, als isotrop hypoelastisch zu bezeichnen ist. Obwohl Plastizität und Elastoplastizität verschiedentlich als Spezialfälle der Hypoelastizität dargestellt werden, erfolgt hier die Gliederung nach *Elastizität*, *Plastizität* und *allgemeine nichtlineare Formulierungen*. Während im Abschnitt 2.1 zur qualitativen Beschreibung des Materialverhaltens die skalare Form für den eindimensionalen Fall gewählt wurde, erfolgt die Darstellung in den folgenden Abschnitten in Tensor- bzw. Matrizenschreibweise, da die zu entwickelnden konstitutiven Beziehungen im Rahmen eines allgemeinen numerischen Verfahrens genutzt werden sollen.

Zur Klärung der Begriffe werden die Definitionen wiedergegeben, wie man sie in der Literatur zu den verschiedenen Formen der Elastizität findet.

**Elastisch:** „Als elastisch bezeichnet man einen Stoff, dessen Spannung eine reine Funktion von Verzerrungsgrößen aus einem — spannungslosen oder vorgespannten — Ausgangszustand heraus ist. Werden die Verzerrungen rückgängig gemacht, gehen auch die Spannungen auf den Ausgangswert zurück“ (LUZ 1979, S. 83). Auf die Durchführung eines Versuches bezogen bedeutet das: „Zur eindeutigen Klärung, ob eine elastische oder nichtelastische Verformung des Prüfstabes vorliegt, muß man auf den Belastungsversuch einen Entlastungsversuch folgen lassen. Fallen Belastungs- und Entlastungslinie zusammen, liegt elastisches Verhalten vor; andernfalls nichtelastisches.....Eine Identität zwischen plastischem und nichtelastischem Werkstoffverhalten besteht jedoch nicht!“ (BEDNARCZYK 1989, S. 1.1-2).

**Hyperelastisch:** Während bei einem elastischen Stoff der Spannungszustand vom Verzerrungsweg abhängig sein kann, ist dies beim hyperelastischen Stoff nicht zulässig. So gibt BUFLER (1977), S. 39/40, folgende Definition: „Unter einem hyperelastischen Stoff versteht man ein Material, bei dem die spezifische innere Energie ( $u$ ) nur

vom Verzerrungszustand abhängt (wobei die Temperatur lediglich als Parameter auftritt):“

$$u = \pi^{(i)}(\underline{\underline{E}}) .$$

Dabei ist  $\underline{\underline{E}}$  der GREENSche Verzerrungstensor, der in Abhängigkeit vom Verschiebungsgradienten  $\underline{\underline{H}}$  durch die Gleichung

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T + \underline{\underline{H}}^T \cdot \underline{\underline{H}})$$

definiert wird. Bei einem hyperelastischen Material liefert die Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie  $\pi^{(i)}$  nach dem GREENSchen Verzerrungstensor  $\underline{\underline{E}}$  den KIRCHHOFFSchen Spannungstensor  $\underline{\underline{S}}$ :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial \pi^{(i)}(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}} .$$

Der GREENSche Verzerrungstensor und der KIRCHHOFF-PIOLA Spannungstensor (2. PK-Tensor) sind symmetrisch, was ihre Verwendung bei numerischen Analysen erleichtert. Zwischen dem 2. PK-Tensor  $\underline{\underline{S}}$ , dem Deformationsgradienten  $\underline{\underline{F}}$  und dem sonst in dieser Arbeit verwendeten CAUCHYSchen Spannungstensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  besteht der Zusammenhang:

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \det \underline{\underline{F}} .$$

Es gibt auch Autoren, die ein Material als *elastisch* bezeichnen, das nach dieser Definition als *hyperelastisch* zu bezeichnen ist (z. B. HAHN 1976, S. 178 und GUDEHUS 1980, S. 128).

**Hypoelastisch:** TRUESDELL prägte in den 50er Jahren den Begriff der *Hypoelastizität*. Die Spannungsgeschwindigkeit in Gleichung 2.27 wurde wohl bereits 1903 von ZAREMBA und offenbar unabhängig von diesem 1911 von JAUMANN vorgeschlagen (zitiert nach BEDNARCZYK 1967). Ausführlich und anschaulich wird bei PRAGER (1961), S. 142 ff, die Hypoelastizität beschrieben: „Damit ein Stoff in irgend einem Sinn als elastisch angesprochen werden kann, soll er der folgenden Mindestanforderung genügen: bei bekanntem Spannungszustand sei die Spannungsgeschwindigkeit eine homogene lineare Funktion der Verformungsgeschwindigkeit, das heißt es gelte eine Beziehung der Form

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} , \quad (2.27)$$

wo der Tensor  $\underline{C}$  im allgemeinen noch vom Spannungstensor abhängen soll.

Die Spannungsänderung  $d\underline{\sigma}$  hängt also nur von der betrachteten unendlich kleinen Drehung und Verformung ab, aber nicht von der Geschwindigkeit, mit welcher diese ausgeführt werden. Die hypoelastischen Stoffe sind daher zähigkeitslos. Unendlich kleine Verformungen eines hypoelastischen Stoffes sind daher reversibel. Diese Reversibilität und die oben festgestellte Zähigkeitslosigkeit rechtfertigen die Bezeichnung *elastisch*.“

Die Bezeichnung „hypo ( $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ )  $\Leftrightarrow$  darunter, unterhalb, unten“ bringt zum Ausdruck, daß der Stoff „weniger“ als elastisch ist, während durch die Bezeichnung „hyper ( $\acute{\upsilon}\pi\acute{\epsilon}\rho$ )  $\Leftrightarrow$  über, oberhalb“ deutlich gemacht wird, daß zusätzlich zur elastischen Eigenschaft ein Verzerrungspotential existiert.

U. a. wird von BUFLER (1977), S. 43, darauf hingewiesen, daß der Begriff *linear-elastisches Material* nur bei kleinen Formänderungen eindeutig ist. Bei großen Formänderungen kann man dann die Bezeichnung *linear-elastisches Material im weiteren Sinn* benutzen. Das bedeutet, daß zur vollständigen Definition noch angegeben werden muß, welche Spannungsdefinition verwendet wird. Bei Verwendung von 2. PK-Tensor und GREEN-schem Verzerrungstensor, also

$$\underline{S} = \underline{C} \cdot \underline{E}, \quad (2.28)$$

erhält man das KAPPUSSche Elastizitätsgesetz (BUFLER 1977, S. 43). Der durch Gleichung (2.28) definierte Stoff wird bei RAMM (1976), S. 45, als „klassischer linear elastischer“ Werkstoff bezeichnet.

Da die Erfassung großer Deformationen in dieser Arbeit auf einer Geschwindigkeitsformulierung basiert (BREINLINGER 1989), wird das „HOOKEsche Gesetz“ auf die mitgedrehte Spannungsgeschwindigkeit nach GREEN/NAGHDI (1965) und die Verzerrungsgeschwindigkeit bezogen.

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}, \quad (2.29)$$

oder in Matrixschreibweise für den isotropen Fall

$$\underline{\dot{\sigma}} = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ 2\dot{\epsilon}_{12} \\ 2\dot{\epsilon}_{23} \\ 2\dot{\epsilon}_{31} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

### Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens mit einem Tangentenmodul

In der Ingenieurpraxis ist es sehr verbreitet, das in Versuchen beobachtete nichtlineare Materialverhalten in differentieller Form durch die Steigung im Spannungs-Dehnungsdiagramm, den *Tangentenmodul*, zu beschreiben. Bereits 1888 formulierte BACH (zitiert nach REINER 1933, S. 294) aufgrund von Zugversuchen mit Metallen den Potenzansatz

$$\varepsilon = a \sigma^b \quad \text{oder} \quad \sigma = \left( \frac{\varepsilon}{a} \right)^{1/b}. \quad (2.31)$$

Die Koeffizienten der Approximation  $a$  und  $b$  werden als Materialparameter dieses Ansatzes verwendet. Durch Ableitung von  $\sigma$  nach  $\varepsilon$  ergibt sich aus Gleichung (2.31) die Steigung im Spannungsdehnungsdiagramm, die als „inkrementeller Elastizitätsmodul“ oder *Tangentenmodul* bezeichnet wird:

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\sigma^{1-b}}{a b}. \quad (2.32)$$

In Anlehnung an die RITTERsche Gleichung für den Tangentenmodul des Betons

$$E_T = 1000 (K_b + \sigma), \quad (2.33)$$

wobei  $K_b$  die Festigkeit und  $\sigma$  die Spannung bei einachsiger Beanspruchung sind, schlägt SMOLTZYK (1967), S. 102, die Gleichung

$$G_T = G_0 (1 - s) \quad (2.34)$$

für den tangentialen „Schubmodul“ bei Erstbelastung von Sand vor, der auf den bei SMOLTZYK (1960), S. 72, publizierten Versuchsergebnissen basiert. Dabei ist die Scherbeanspruchung  $s_{smol}$  für  $(\sigma_I + \sigma_{III}) < c / \tan \varphi$  durch die Gleichung:

$$s_{smol} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{\sin \varphi (-\sigma_I - \sigma_{III}) + 2 c \cos \varphi} \quad (2.35)$$

definiert. Der Zusammenhang zwischen Hauptspannungsdifferenz und axialer Dehnung  $\varepsilon_{III}$  im triaxialen Kompressionsversuch läßt sich gut mit der hyperbolischen Beziehung

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \frac{\varepsilon_{III}}{a + b \varepsilon_{III}} \quad (2.36)$$

von KONDNER (1963) beschreiben. Aus dieser Gleichung und der Formel von OHDE (1939) für den „Anfangsmodul“ im Triaxialversuch

$$E_{ini} = K_{ohde} p_1 (-\sigma_I/p_1)^n \quad (2.37)$$

leiteten DUNCAN/CHANG (1970) die Gleichung

$$E_T = (1 - R_f s_{DC})^2 E_{ini} \quad (2.38)$$

für den Tangentenmodul im triaxialen Kompressionsversuch ab. Mit zusätzlichen plausiblen, jedoch nicht theoretisch oder empirisch begründeten Annahmen, wurde dieser Ansatz und ähnliche in zahlreichen FEM-Analysen für baupraktische Probleme verwendet (SMOLTCZYK 1982).  $R_f$ ,  $n$  und  $K_{ohde}$  sind die Materialparameter in den Gleichungen (2.37) und (2.38),  $p_1$  eine Bezugsgröße für die Spannung und  $s_{DC}$  die Scherbeanspruchung, die jedoch etwas anders als in Gleichung (2.35) definiert ist:

$$s_{DC} = \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_I - \sigma_{III})}{2(c \cos \varphi - \sigma_I \sin \varphi)}, \quad \text{wenn } \sigma_I < c/\tan \varphi. \quad (2.39)$$

Diese Ansätze und andere hypoelastische Stoffgesetze (Zusammenstellung u. a. bei SCHAD 1979) lassen sich auf die Form bringen

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 2\bar{G}\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \bar{\lambda}\dot{\epsilon}_{vol}\underline{\underline{1}}, \quad (2.40)$$

wobei die „LAMÉ-Parameter“  $\bar{G}$  und  $\bar{\lambda}$  Funktionen der Invarianten des Spannungstensors bzw. der Hauptspannungen sind. Eine solche Stoffgleichung kann als *isotrop*, *hypoelastisch* bezeichnet werden. Da das Kriterium für Be- und Entlastung oft nicht in der nötigen Allgemeinheit angegeben wird, wählt GÜDEHUS (1980), S. 130, die Bezeichnung *pseudohypoelastisch*; häufig wird auch die Bezeichnung *pseudoelastisch* verwendet. Aufgrund der formalen Übereinstimmung von Gleichung (2.40) mit dem HOOKEschen Gesetz werden häufig die Bezeichnungen *inkrementelles Hookesches Gesetz*, oder, da — aus der Sicht des Anwenders — die „elastischen Moduli“ variiert werden, *variable moduli models* verwendet.

Die Stoffgesetze in der Form von Gleichung (2.40) haben für die Geotechnik den Nachteil, daß sich die Dilatationsgeschwindigkeit (1. Invariante der Verzerrungsgeschwindigkeit) direkt aus der 1. Invariante der Spannungsgeschwindigkeit ergibt,

$$\dot{\epsilon}_{vol} = \nabla \cdot \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \frac{1}{3\bar{\lambda} + 2\bar{G}} \frac{(I\dot{\sigma})}{3}, \quad (2.41)$$

und somit die Phänomene von Dilatanz und Kontraktanz (Volumenvergrößerung bzw. Volumenverkleinerung durch Scherung) bei Böden nicht zutreffend erfaßt werden. In Anlehnung an die Gleichung für den REYNOLDschen Körper von REINER (1969), S. 321, wird u. a. von BUCHMAIER (1985), S. 45 ff., die Einführung eines *Dilatanzmoduls* vorgeschlagen, so daß für die Dilationsgeschwindigkeit gilt:

$$\dot{\varepsilon}_{vol} = \frac{1}{3\lambda + 2G} \frac{(I\sigma)'}{3} + \frac{1}{M} \dot{\tau}_{oct} \quad (\tau_{oct} = \sqrt{-\frac{2}{3} II \sigma_{dev}}). \quad (2.42)$$

Dabei ist dann  $M$  ein Dilatanzmodul, der spannungsabhängig sein kann. Durch den Dilatanzmodul ergibt sich eine Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit des Spannungsdeviators und der Geschwindigkeit der volumetrischen Dehnung, jedoch nicht zwischen der hydrostatischen Spannungsgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Dehnungsdeviators (siehe auch S. 72). Die Stoffgesetze, die auf den Gleichungen (2.31) bis (2.42) basieren, sind ursprünglich nicht für endliche Deformationen formuliert.

Auch die Setzungsberechnung nach DIN 4019 kann hypoelastisch erfolgen. Im Beiblatt 1 (Erläuterungen zu Abschnitt 9.3) wird die Berechnung mit einem „mit dem Druck veränderlichen Steifemodul“ zugelassen. Dieser „inkrementelle Steifemodul“ ist der Quotient von  $d\sigma/d\varepsilon$  im Oedometerversuch (einachsiger Druckversuch mit verhinderter Seitendehnung) bei der entsprechenden Spannung.

Da dem Phänomen der Dilatanz in der Bodenmechanik eine große Bedeutung beigemessen wird und die begriffliche Abgrenzung zu der sogenannten „Energiekorrektur“ nicht bei allen Autoren gleich ist, werden diese Begriffe und ihre Entwicklung ausführlich dargestellt. Daß körnige Materialien bei reiner Scherbeanspruchung Volumenänderungen zeigen, wurde bereits von G. H. DARWIN (1883) und REYNOLDS (1885) erkannt (zitiert nach SMOLTZYK 1985). Auch wenn REYNOLDS nicht als erster dieses Phänomen, für das er den Begriff der Dilatanz einführte, entdeckte, so war es seine Arbeit *On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles*, die als Meilenstein der bodenmechanischen Forschung anzusehen ist. Meist wird der Begriff Dilatanz generell für Volumenänderungen infolge Scherbeanspruchung — also Vergrößerung und Verkleinerung des Volumens — verwendet. Teilweise wird nur die Volumenvergrößerung als Dilatanz bezeichnet und die Volumenverkleinerung als Kontraktanz. In dieser Arbeit wird auf die Verwendung des Begriffes der Kontraktanz verzichtet, und es wird zwischen positiver Dilatanz (Volumenzunahme) und negativer Dilatanz (Volumenabnahme) unterschieden.

Zur Quantifizierung des Dilatanzverhaltens von Erdstoffen wird im Rahmen der Plastizitätstheorie meist ein Dilatanzwinkel verwendet (Winkel  $\psi$  in Bild 2.7 dieser Arbeit und SMOLTCZYK 1987, S. 69), der so festgelegt wird, daß volumenkonstantes Fließen bei Scherbeanspruchung durch einen Dilatanzwinkel von 0 gekennzeichnet ist und bei assoziiertem Fließen Dilatanz- und Reibungswinkel gleich sind. Aber auch durch Einführung eines Dilatanzmoduls in hypoelastische Modelle, z. B. BUCHMAIER (1985), Seite 45, kann dilatantem Materialverhalten Rechnung getragen werden.

Wenn bei Versuchen zur Sohlreibung von Fundamenten, z. B. SCHULTZE/HORN (1966), S. 149, und KOLB (1988), S. 42 und 160, Bewegungen des Fundaments quer zur Richtung der angreifenden Kraft beobachtet werden, wird häufig mit der „Energiekorrektur“ operiert, und es bleibt zuweilen unklar, ob und inwieweit „Energiekorrektur“ und Dilatanz dasselbe Phänomen beschreiben. Daher wird die Begründung und Anwendung der „Energiekorrektur“ im folgenden ausführlich dargestellt. Nach LAMBE/WHITMAN (1968), S. 143, hat TAYLOR (1948) die „Energiekorrektur“ (energy correction) eingeführt. Bei TAYLOR (1948), Seite 346, findet man jedoch nicht den Begriff der „Energiekorrektur“, sondern eine Betrachtung zur Dehnungsenergie („interlocking<sup>4</sup> can best be explained by considerations of strain energy“), nach der möglicherweise von ihm selbst in späteren Arbeiten, oder aber von seinen Schülern, der Begriff „Energiekorrektur“ kreiert wurde. Obwohl dieser Begriff „ziemlich unglücklich“ (LAMBE/WHITMAN 1968, S. 143) und die TAYLORSche Terminologie recht fragwürdig ist, war seine Verwendung zeitweise sehr beliebt.

Ist die  $x_1$ -Achse von Bild 2.3 horizontal, kann man die durch die Kraft  $X$  verrichtete Arbeit  $X \cdot s$  in Reibungsarbeit und Hubarbeit aufteilen. In Bild 2.3 sind die Kräfte für Bewegung nach rechts ( $\uparrow$ ) und die Kräfte für die Bewegung nach links ( $\downarrow$ ) dargestellt. Die folgende Ableitung beschränkt sich auf die Bewegung nach rechts und daher werden die Indizes  $\uparrow$  und  $\downarrow$  in den Formeln weggelassen. In Vektorschreibweise lautet die Arbeitsgleichung:

$$X \cdot s = \underbrace{R \cdot s}_{\text{Reibungsarbeit}} - \underbrace{Z \cdot s}_{\text{Hubarbeit}} \quad (2.43)$$

Nach Ermittlung der Skalarprodukte erhält man:

$$X s \cos \alpha = R s + Z s \sin \alpha, \quad (2.44)$$

<sup>4</sup> TAYLOR bezieht sich bei der Beschreibung der Dilatanz nicht auf REYNOLDS und verwendet nicht das Wort Dilatanz, sondern führt den Begriff der Verzahnung (interlocking) ein



$$|\mathbf{R}| = (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) \tan \varphi_m . \quad (2.50)$$

Wenn man Gleichung (2.50) in Gleichung (2.44) einsetzt, ergibt sich:

$$X s \cos \alpha = (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) \tan \varphi_m s + Z s \sin \alpha , \quad (2.51)$$

$$\frac{X}{Z} \cos \alpha = \frac{X}{Z} \sin \alpha \tan \varphi_m + \cos \alpha \tan \varphi_m + \sin \alpha . \quad (2.52)$$

Da definiert wurde  $\tan \varphi = X/Z$ , folgt aus Gleichung (2.52):

$$\tan \varphi \cos \alpha = \tan \varphi \sin \alpha \tan \varphi_m + \cos \alpha \tan \varphi_m + \sin \alpha , \quad (2.53)$$

$$\tan \varphi = \frac{\cos \alpha \tan \varphi_m + \sin \alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha \tan \varphi_m)} , \quad (2.54)$$

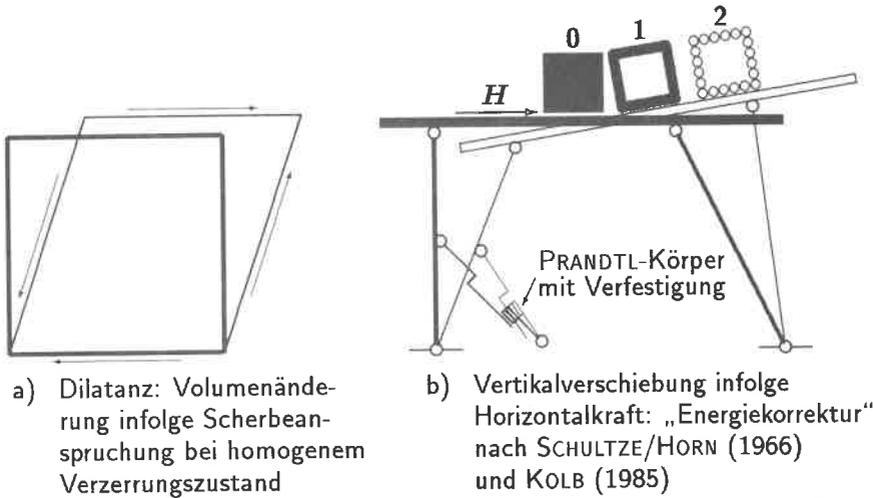
$$\tan \varphi = \frac{\frac{\cos \alpha \sin \varphi_m + \sin \alpha \cos \varphi_m}{\cos \varphi_m}}{\frac{\cos \alpha \cos \varphi_m - \sin \alpha \sin \varphi_m}{\cos \varphi_m}} , \quad (2.55)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin(\alpha + \varphi_m)}{\cos(\alpha + \varphi_m)} = \tan(\alpha + \varphi_m) , \quad (2.56)$$

$$\varphi = \alpha + \varphi_m . \quad (2.57)$$

Man kann Gleichung (2.57) auch wesentlich einfacher herleiten — z. B. ist die Herleitung bei GUMMERT/RECKLING (1987), S. 479, wesentlich kürzer und anschaulicher — doch wurde der umständliche Weg bewußt gewählt, um an die Herleitung des „energiekorrigierten Reibungswinkels“  $\delta'$  anzuknüpfen. Wenn man die Gleichungen (2.48) und (2.57) vergleicht, erkennt man, daß dem Winkel  $\delta'$  keine physikalische Bedeutung zugewiesen werden kann. Da  $\alpha$  in den von SCHULTZE/HORN und KOLB untersuchten Fällen etwa bei  $-10^\circ$  liegt, ist der zahlenmäßige Unterschied zwischen  $\varphi_m$  und  $\delta'$  unerheblich. D. h. sie hätten mit dem gleichen Erfolg den Reibungswinkel  $\varphi_m$  verwenden können. Damit wären sie im Rahmen der einfachen Betrachtung der Reibung auf der schiefen Ebene geblieben, die auch in anderen Bereichen der Technik (Schrauben, Gewinde, Keile) angewandt wird.

Mit Bild 2.4 soll dargestellt werden, worin der Unterschied zwischen Dilatanz und „Energiekorrektur“ im Sinne von SCHULTZE/HORN und KOLB besteht. Dilatanz kennzeichnet eine Materialeigenschaft. D. h. man mißt an einem Element mit homogenem Verzerrungszustand eine Volumenänderung infolge Scherbeanspruchung (Bild 2.4a). Dieses dilatante Materialverhalten beschreibt TAYLOR (1948) als Verzahnung und verbindet damit energetische Überlegungen.



**Bild 2.4:** Dilatanz und „Energiekorrektur“

SCHULTZE/HORN und KOLB beziehen sich zwar auf TAYLOR, bei ihrer „Energiekorrektur“ betrachten sie jedoch das System eines horizontal belasteten Fundamentes auf einem Untergrund aus Sand (die Verschiebungen infolge der Vertikalbelastung werden nicht bewertet). An Bild 2.4b wird deutlich, daß die Hebung oder Setzung bei Horizontalbeanspruchung nicht durch Dilatanz des Materials bedingt sein muß. Belastet man das System mit der Kraft  $H$ , bewegt sich der Körper zunächst von Position 0 nach Position 1; es findet eine Translation und eine Rotation statt. Im Zustand 1 sei an dem PRANDTL-Körper eine solche Verfestigung aufgetreten, daß sich der 2-Gelenk-Rahmen nicht weiter nach rechts verschiebt. Gleichzeitig wird der Reibungswiderstand zwischen Körper und Ebene überschritten, so daß die Verschiebung von 1 nach 2 und darüber hinaus auch eine Komponente nach oben, also quer zur Krafrichtung, hat, denn bei der Verschiebung von 0 nach 1 erfolgte die Schiefstellung der Bewegungsebene. Der Reibungswinkel  $\varphi_m$  ist also unter Berücksichtigung der Schiefstellung der Ebene um den Winkel  $\alpha$  zu ermitteln.

Ein ähnliches Phänomen wie die Dilatanz kann bei der Torsion von Metallstangen beobachtet werden. Durch die Torsion kommt es zu elastischen und plastischen Längenänderungen der Stäbe. Das Verdienst, diese Phänomene als erster im elastischen Bereich beobachtet zu haben, wird von BILLINGTON/TATE (1981), S. 281, J. H. POYNTING zugewiesen, der 1909 darüber publizierte. Nach BILLINGTON/TATE, S. 461, hat SWIFT im Jahre

1947 zuerst darüber berichtet, daß plastische Torsionsdeformationen von Metallstangen plastische Dehnungen in der Achsrichtung der Stange verursachen können. Daher spricht man vom POYNTING- bzw. SWIFT-Effekt oder ohne Differenzierung nach elastischen und plastischen Deformationen vom POYNTING/SWIFT-Effekt.

## 2.2.2 Plastizität

Wird ein Körper belastet und entlastet und bleiben nach der Entlastung Verformungen zurück, nennt man dieses Verhalten plastisch. Entsprechend definiert LEHMANN (1972), S. 297, die Aufgabe der Plastizitätstheorie, „irreversible Zustandsänderungen eines festen Körpers zu beschreiben“, wobei er folgende Definition für die plastischen Formänderungen gibt:

„Plastische Formänderungen sind inelastische Zustandsänderungen eines Kontinuums (Körpers), bei denen die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen (das Formänderungsgesetz) als unabhängig von der Geschwindigkeit des Formänderungsvorgangs angenommen werden“ (LEHMANN 1962, S. 247).

Die folgende Darstellung beschränkt sich auf isotherme Vorgänge und vernachlässigt Trägheitskräfte. Da die Deformationstheorie, bei der die plastischen Verzerrungen in Beziehung zu den Spannungen gesetzt werden, in der Geotechnik keine Bedeutung hat, reduziert sich die Plastizitätstheorie auf die Fließtheorie, also die Ermittlung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von den Spannungen und anderen Zustandsgrößen (häufig auch „Pseudozustandsgrößen“).

Die Elemente eines Stoffgesetzes für plastische Formänderungen sind *Fließbedingung*, *Belastungsbedingung*, *Verfestigungsgesetz*<sup>5</sup> und *Formänderungsgesetz*. Das Formänderungsgesetz wird auch als *Fließregel* bezeichnet. LEHMANN (1972), S. 297, faßt *Fließbedingung*, *Belastungsbedingung* und *Verfestigungsgesetz* zur *Plastizitätsbedingung* zusammen. KRÖNER (1978), S. 367, gliedert in die drei Postulate *Fließgrenze*, *Irreversibilität* und *innere Zustandsänderung*, die in ihrer Gesamtheit — nicht in den einzelnen Postulaten — Plastizitätsbedingung und Formänderungsgesetz entsprechen, wie sie sich aus dem DRUCKERSchen Postulat ergeben, das von grundlegender Bedeutung für die Formulierung von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen in der Plastizitätstheorie ist. Dieses Postulat, oder die Forderung nach *Werkstoffstabilität*, wurde von DRUCKER (1951) zum ersten Male in sinn-

<sup>5</sup> In dieser Arbeit wird der Begriff der Verfestigung als Oberbegriff für Ver- und Entfestigung verwendet

gemäß Abwandlung des energetischen Stabilitätskriteriums der klassischen Mechanik aufgestellt (RECKLING 1967, S. 56). Seine Herleitung erfolgte unter den Voraussetzungen kleiner Verzerrungen und isothermer Bedingungen und wird u. a. bei RECKLING (1967), S.56 ff, und BETTEN (1986), S. 96 ff, ausführlich dargelegt. In der Arbeit DRUCKER (1959) wird das Postulat auf viskoelastisches Verhalten erweitert. Die Forderungen des DRUCKERSchen Stabilitätskriteriums sind:

### Stabilität im Kleinen:

1. Nur ein *verfestigender Werkstoff* ist stabil:

$$d\underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\underline{\epsilon}} > 0 . \quad (2.58)$$

Ver- und Entfestigung bzw. stabiles und instabiles Materialverhalten sind in Bild ?? dargestellt.

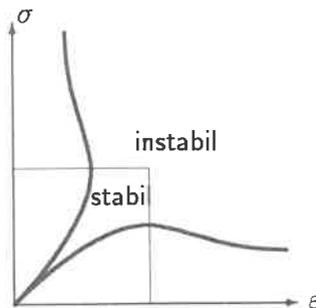


Bild 2.5: Bereichsweise instabiles Materialverhalten

2. *Normalität der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit bezüglich der Fließfläche* oder assoziierte Fließregel:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\dot{\lambda} > 0) . \quad (2.59)$$

Aus (2.59) folgt auch die Forderung nach Stetigkeit der Fließfläche.

### Stabilität im Großen:

3. Aus der Gleichung

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) \cdot d\underline{\underline{\epsilon}} > 0 \quad (2.60)$$

folgt die *Konvexität*<sup>6</sup> der Fließfläche bzw. des Fließkörpers. Dabei kennzeichnet  $\underline{\sigma}^0$  einen Ausgangsspannungszustand im Innern des Fließkörpers.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik fordert die zusätzliche Annahme: „Die Verschiebung der Fließfläche eines Werkstoffes bleibt beschränkt, und zwar derart, daß der Ursprung des Spannungsraumes immer im Fließkörper enthalten ist“ (BETTEN 1986, Seite 110). Ist diese Forderung und das DRUCKERSche Stabilitätskriterium erfüllt, spricht man auch von der *Theorie des plastischen Potentials*.

Nach LEHMANN (1972), S. 297, besteht das Dilemma der Plastizitätstheorie darin, daß es bisher nicht gelungen ist, vollständig anzugeben, welches die Zustandsgrößen im Sinne der Thermodynamik, wie Spannungen, Temperatur, innere Energie und Entropie, sind, die den Zustand eines sich plastisch deformierenden Körpers eindeutig festlegen, so daß man sich mit „Pseudozustandsgrößen“ wie plastischen Verzerrungen und plastischer Arbeit begnügen muß. Diese auf Metalle gemünzte Aussage gilt natürlich erst recht für Erdstoffe. In bezug auf diese „Pseudozustandsgrößen“ wird von KRÖNER (1978), S. 372, festgestellt: „Dieser Ansatz ist zwar für Rechnungen bequem, aber leider nur eine unkontrollierbare Näherung .... Der Gerechtigkeit halber sei bemerkt, daß die Ergebnisse der beiden Theorien (Dehnungs- und Arbeitsverfestigung) zuweilen in nicht zu schlechter Übereinstimmung mit dem Experiment stehen.“

In der geotechnischen Anwendung werden, mit Ausnahme der Normalitätsbedingung, die Vereinfachungen der „technischen Plastizitätstheorie“ (Isotropie und isotrope Verfestigung) getroffen. Die folgende Darstellung orientiert sich dagegen an dem umfassenderen Konzept, wie man es z. B. bei KRÖNER (1978), S. 366 ff, und LEHMANN (1972) findet, um zu zeigen, daß die Möglichkeiten der Plastizitätstheorie sehr weitreichend sind.

### Fließfläche

Wenn man von der Möglichkeit absieht, plastische Stoffgesetze im Dehnungsraum zu formulieren, wie das z. B. von BESDO (1981) vorgeschlagen wird, kann die Fließbedingung als fünfdimensionale Hyperfläche<sup>7</sup> im sechs-

<sup>6</sup> Ein Körper und damit auch seine Oberfläche sind dann konvex, wenn der Körper die Verbindungsgerade zwischen zwei Randpunkten ganz enthält

<sup>7</sup> Analog zur Fläche in einem dreidimensionalen Raum wird der Begriff der *Hyperfläche* in einem  $n$ -dimensionalen Raum verwendet

dimensionalen Spannungsraum dargestellt werden:

$$F(\underline{\sigma}, \mathbf{q}) = 0. \quad (2.61)$$

Dabei ist  $\mathbf{q}$  ein Vektor (Spaltenmatrix) mit  $\nu$  Zustandsgrößen. Im allgemeinen werden die Elemente von  $\mathbf{q}$  die Komponenten von irgendwelchen Tensoren sein (KRÖNER 1978, S. 367). (In der Anwendung sind es meist die plastischen Verzerrungen und die plastische Arbeit.) Die Fließfläche ist der geometrische Ort der Spannungspunkte  $\underline{\sigma}$ , bei denen bei einem erneuten Spannungszuwachs  $d\underline{\sigma}$  zum erstenmal plastische Verzerrungen auftreten, wenn alle möglichen linearen Spannungswege vom gleichen Zustand ausgehend durchfahren werden. Der Ausgangszustand ist gekennzeichnet durch  $\underline{\sigma} = 0$  und die innere Zustandsvariable  $\mathbf{q}$ , womit der innere Zustand der Probe beschrieben wird (KRÖNER 1978, S. 368).

Die größte Bedeutung in der Geotechnik hat die COULOMBSche Anstrengungshypothese, die im Rahmen dieser Arbeit als Fließhypothese interpretiert wird:

$$F = \sigma_I - \sigma_{III} + \sin \varphi (\sigma_I + \sigma_{III}) - 2c \cos \varphi = 0 \quad (\sigma_I \leq c \cot \varphi). \quad (2.62)$$

Für  $\varphi = 0$  entspricht Gleichung (2.62) der *Hauptschubspannungshypothese* oder TRESKA-Hypothese.

Ähnlich einfach, und für numerische Analysen bequemer, ist die Hypothese von DRUCKER

$$F = \alpha I_{\sigma} + \sqrt{-II_{\sigma^{dev}}} - k = 0 \quad (I_1 \leq \frac{k}{\alpha}), \quad (2.63)$$

die eine Erweiterung der *Hypothese von der unveränderlichen Gestaltsänderungsenergie* (HUBER-, VON MISES- oder HENCKY-Hypothese) darstellt. Mit  $\alpha = 0$  und  $k = \sigma_F \sqrt{1/3}$  ergibt sich die VON MISES-Fließbedingung, wenn  $\sigma_F$  die Fließgrenze im einachsigen Zugversuch ist.

In den letzten Jahrzehnten wurden etliche Formulierungen vorgeschlagen, die einen Kompromiß zwischen den beiden Hypothesen darstellen (Zusammenstellungen siehe GUDEHUS 1980 und SCHAD 1979). Es ist an sich trivial, daß die Fließbedingungen (2.63) und (2.62) nicht ineinander überführt werden können, scheint jedoch nicht immer selbstverständlich. Vermutlich die Bemerkung, „a yield function which is a proper generalization of the Mohr-Coulomb hypothesis is  $f = \alpha J_1 + J_2^{1/2} = k$ “<sup>8</sup> von DRUCKER/PRAGER (1952), S. 158, haben zu mißverständlichen Anmerkungen geführt wie „Der Ansatz (von Drucker/Prager) wird von den Autoren

<sup>8</sup> die Spannungsinvarianten sind bei Drucker anders bezeichnet als in dieser Arbeit

(gemeint sind DRUCKER und PRAGER) als Verallgemeinerung der sogenannten Mohr-Coulomb Hypothese vorgestellt“ (ISMAR/MAHRENHOLZ 1979, S. 27), oder zur unkommentierten Wiedergabe der Gleichungen zur Umrechnung zwischen  $\varphi$  und  $\alpha$  bzw.  $c$  und  $k$  (z. B. bei BATHE 1984, S. 429).

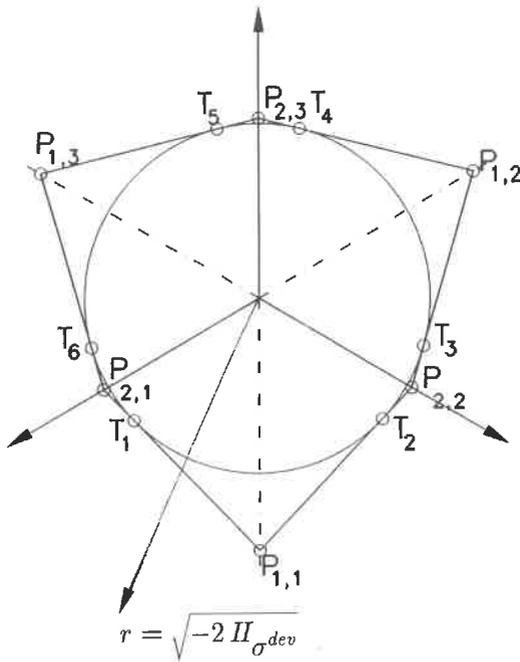
Gleichung (2.63) kann nur bei ebener Dehnung und assoziierter Fließregel als Ersatz für (2.62) verwendet werden, denn der DRUCKERSche Kegel berührt innen die COULOMBSche Pyramide (siehe Bild 2.6). HUMPHESON/NAYLOR (1975) haben gezeigt, daß es im rotationssymmetrischen Fall bei größeren Reibungswinkeln nicht möglich ist, mit dem DRUCKER-Kegel brauchbar die COULOMBSche Hypothese zu approximieren, auch wenn man keine hohen Anforderungen an die Genauigkeit stellt. Dies ist für praktische Berechnungen, bei denen nicht die Verhältnisse der ebenen Dehnung gegeben sind, von großer Bedeutung, da Versuchsergebnisse bei Boden und Fels viel näher beim COULOMBSchen Sechseck liegen als beim DRUCKERSchen Kreis. Andererseits ist die Neigung groß, die DRUCKER-Hypothese zu verwenden, da in FEM-Programmen, deren Hauptanwendungsbereich Stahlkonstruktionen sind, fast immer das MISES-Kriterium auf das DRUCKER-Kriterium erweitert wurde. Denn der Programmier- und Testaufwand ist hierfür wesentlich geringer als bei der Implementierung des COULOMB-Kriteriums.

In den Arbeiten DRUCKER/PRAGER (1952), S. 159, und DRUCKER (1953), S. 217, sind die folgenden Formeln hergeleitet:

$$3\alpha^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi}; \quad k^2 = \frac{3c^2 \cos^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi};$$

$$c = \frac{k}{\sqrt{1 - 12\alpha^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{3\alpha}{\sqrt{1 - 3\alpha^2}}; \quad \cos \varphi = \sqrt{\frac{1 - 12\alpha^2}{1 - 3\alpha^2}}.$$

Mit der Darstellung und den Formeln von Bild 2.6 kann die Diskrepanz zwischen DRUCKER- und COULOMB-Kriterium abgeschätzt werden und gegebenenfalls eine „Umrechnung“ der Parameter erfolgen.



$$\sqrt{-2 II_{\sigma^{dev}}} = \sqrt{2} \left( \sqrt{3} c \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} I_{\sigma} \right) \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} & \text{DRUCKER-Kegel} \\ & \text{(Punkte } T_i) \\ \frac{2}{2 - \sin \varphi} & \text{COULOMB-Pyramide} \\ & \text{(Punkte } P_{1,i}) \\ \frac{2}{3 + \sin \varphi} & \text{COULOMB-Pyramide} \\ & \text{(Punkte } P_{2,i}) \end{cases}$$

**Bild 2.6:** DRUCKER/PRAGER- und COULOMB-Kriterium

### Belastungsbedingung

In einem gegebenen Moment der Belastung, unmittelbar vor dem Aufbringen eines neuen Belastungsincrements  $d\underline{\sigma}$ , hat die Probe einen bestimmten Spannungszustand  $\underline{\sigma}$ . Mit dieser Spannung als Argument wird nun  $F \leq 0$ . Mit KRÖNER (1978), S. 368, kann man dann vier Fälle unterscheiden, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

1. $F < 0$	<b>elastisches Be- oder Entladen</b> der Stoff reagiert auf ein Inkrement $d\underline{\sigma}$ rein elastisch
2. $F = 0$ $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} < 0$	<b>plastisches Entladen</b> $d\underline{\sigma}$ endet im elastischen Bereich; die entsprechende Verformung ist rein elastisch
3. $F = 0$ $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} = 0$	<b>neutrale Belastung / neutrale plastische Beladung</b> $d\underline{\sigma}$ liegt in(an) der Fließfläche, führt also rein elastisch zu einem benachbarten Zustand an der Fließgrenze
4. $F = 0$ $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} > 0$	<b>plastisches Fließen</b> $d\underline{\varepsilon}^{pl} > 0$ $d\underline{\sigma}$ zeigt in den plastischen Bereich. Es setzt plastisches Fließen ein, so daß sich die Fließgrenze so weit verändert, bis die Fließbedingung $F = 0$ wiederhergestellt ist. Hierfür gilt die Konsistenzbedingung.

**Tabelle 2.1:** Plastische Belastungsbedingungen (Beladungsbedingungen)

Für die Formulierung der Fließbedingung entsprechend Gleichung (2.61) lautet die *Konsistenzbedingung*:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\sigma} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i = 0 . \quad (2.64)$$

Bei Mehrflächenmodellen, d. h. zwei oder mehr Fließbedingungen liegen im Spannungsraum ineinander, ist jeweils zu beachten, auf welche Fläche die Belastungsbedingung anzuwenden ist (ein Beispiel für diese Anwendung findet man bei BREINLINGER (1989), S. 70).

### Formänderungsgesetz

Im elastischen Bereich definiert ein hyperelastisches Stoffgesetz eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen. Wenn man nun ein Rechenverfahren auf einer Geschwindigkeitsformulierung aufbaut, z. B. BREINLINGER (1989), dessen Ansätze auch in dieser Arbeit genutzt werden, ist es einfacher, das „HOOKEsche Gesetz“, Gleichung

(2.27), in hypoelastischer Form zu verwenden. Dies steht nun im Widerspruch zur Definition des elastischen Bereichs. Zwar sind die elastischen Verzerrungen bei Böden größer als bei Metallen, aber im Vergleich zu den Gesamtverzerrungen sehr klein, so daß man nach LEHMANN (1972), S. 307, davon ausgehen kann, daß der dadurch entstehende Fehler im allgemeinen gering ist.

Bei Erfüllung der Forderungen des DRUCKERSchen Postulats ist das Formänderungsgesetz für die plastischen Verzerrungen durch Gleichung (2.59) über Fließbedingung und Verfestigungsgesetz festgelegt. Die Anwendung einer assoziierten Fließregel auf Erdstoffe führt wegen der meist starken Abhängigkeit der aufnehmbaren Scherbeanspruchung von der 1. Invarianten des Spannungstensors, wie sie DRUCKER- und COULOMB-Kriterium berücksichtigen, zu Volumenvergrößerungen, die wesentlich größer sind als die beobachteten. Bei bindigen Böden ist selbst bei relativ großem inneren Reibungswinkel volumenkonstantes Fließen oder eine geringe *Kontraktanz* zu beobachten. Deshalb wird häufig eine Potentialfläche ( $g$ ) eingeführt, die die Richtung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten bestimmt:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\dot{\lambda} > 0) . \quad (2.65)$$

Eine andere Form der Erweiterung wird von LEHMANN (1972), S. 308, vorgeschlagen:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} + \kappa_4 \cdot \underline{\sigma} . \quad (2.66)$$

Dabei ist der Tensor  $\kappa_4$ , der von der Formänderungsgeschichte und vom Spannungszustand abhängen kann, geeignet zu definieren. Unter der Voraussetzung, daß  $\kappa_4$  in Gleichung (2.66) ein Skalar ist und Isotropie gegeben ist, bleibt man mit (2.66) im Rahmen der coaxialen Fließregeln, wie sie in der Anwendung allgemein üblich sind. Die LEHMANNsche Formulierung hat gegenüber der Einführung einer Potentialfläche den Vorteil, daß die Bedeutung des assoziierten Fließens deutlich wird und Abweichungen durch einen „Korrekturparameter“ berücksichtigt werden. Da außer dem Widerspruch zwischen assoziierter Fließregel und den gemessenen Volumenänderungen bei Erdstoffen Abweichungen von der Normalenregel bisher nicht eindeutig quantifiziert wurden, ist es plausibel, in der Deviatorebene des Hauptspannungsraums die Normalenregel beizubehalten und nur in der hydrostatischen Ebene nichtassoziiertes Fließen anzunehmen (z. B. BREINLINGER 1989, SCHAD 1979). Eine brauchbare Näherung für bindige Böden ist der

Sonderfall volumenkonstanten Fließens, das durch

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \dot{\lambda} \underline{\sigma}^{dev} \quad (2.67)$$

beschrieben werden kann. Diese Fließregel wird auch als Proportionalitätsregel bezeichnet. Bei DE BOER/GOLLUB (1988) wird für granulare Medien zwischen Verfestigungsbereich und Grenzzustand differenziert: Im Verfestigungsbereich wird eine koaxiale, nicht assoziierte Fließregel verwendet; im Grenzzustand, wenn keine zusätzliche Scherbeanspruchung mehr aufgenommen werden kann, eine nicht koaxiale, nicht assoziierte Fließregel entsprechend Gleichung (2.66). Diese Fließregel wird dann bei GOLLUB (1989) durch Hinzufügen eines Terms für die Dilatanz modifiziert. Ob dieses Vorgehen für reale Erdstoffe brauchbar ist, scheint aus zwei Gründen fraglich: Zum einen wird für die Fließbedingung (COULOMBSches Kriterium) die vereinfachende Annahme der Isotropie getroffen, was im Widerspruch zu der komplizierten Fließregel steht, zum anderen entsprechen Erdstoffe nur in seltenen Fällen einem idealen, granularen Medium.

Die Probleme, die sich beim Abweichen vom DRUCKERSchen Postulat ergeben, können auch am Aufbau der konstitutiven Matrix aufgezeigt werden. Mit den Bezeichnungen von BREINLINGER (1989), S. 69, lautet die Gleichung für die elasto-plastische Matrix  $C^{elpl}$ :

$$C^{elpl} = C^{el} - \frac{C^{el} n^g (n^f)^T C^{el}}{h + (n^f)^T C^{el} n^g} \quad (2.68)$$

- $h$  Verfestigungsmodul,
- $n^f$  Einheitsnormalenvektor der Fließfläche,
- $n^g$  Einheitsnormalenvektor der plastischen Potentialfläche,
- $C^{el}$  „elastische“ Matrix entsprechend den Gleichungen (2.29) und (2.30).

Da das Produkt

$$\alpha = (n^f)^T C^{el} n^g$$

bei nichtassoziertem Fließen 0 oder negativ werden kann, besteht selbst bei positivem Verfestigungsmodul die Möglichkeit, daß sich der Effekt einer Entfestigung ergibt, d. h. auch verfestigende Werkstoffgesetze können singular werden. Von WILLAM (1989), S. 328, wird dieses Problem ausführlich dargestellt. Bei den Modellen, die auf dem Cam-Clay Konzept aufbauen, siehe Bild 2.7, wird  $\alpha$  jedoch immer positiv sein. Für den entsprechend definierten Dilatanzwinkel  $\psi$  ergeben sich Werte  $-\varphi \leq \psi \leq \varphi$ , wobei  $\varphi \leq \pi/4$ . Mit den Bezeichnungen von BREINLINGER (1989), S. 58, oder

SCHAD (1979), S. 67, ergibt sich für den maximalen Winkel  $\gamma$  zwischen  $n^g$  und  $n^f$  im Hauptspannungsraum, bei maximaler Dilatanz  $\psi = -\varphi$ :

$$\cos \gamma = \frac{1 - \frac{8 \sin^2 \varphi}{(3 - \sin \varphi)(3 + \sin \varphi)}}{\sqrt{1 + \frac{8 \sin^2 \varphi}{(3 + \sin \varphi)^2}} \sqrt{1 + \frac{8 \sin^2 \varphi}{(3 - \sin \varphi)^2}}}$$

Daraus ergibt sich für  $\varphi = 45^\circ$  ein  $\gamma$  von  $69,5^\circ$  und damit eine Abminderung gegenüber der assoziierten Fließregel:

$$\alpha = \frac{0,702 G + 1,287 \lambda}{2G + \lambda} \alpha_{asso} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1,287 \frac{0,2766 + 0,4545 \nu}{1 - \nu} \alpha_{asso},$$

wenn  $\alpha_{asso}$  der Wert bei assoziierter Fließregel ist.  $G$  und  $\lambda$  sind die LAMÉ-Parameter;  $\nu$  die POISSON-Zahl. Der Zusammenhang zwischen  $G$ ,  $\lambda$  und  $\nu$  ist im Anhang in Abschnitt 7.1 dargestellt. Man sieht, daß sich infolge der nichtassozierten Fließregel eine Abminderung von  $\alpha$  um etwa 30% ergibt;  $\alpha$  wird aber nie negativ.

### Verfestigungsgesetz

Beim idealplastischen Stoff ist die Fließfläche nur eine Funktion des Spannungszustandes und der Materialparameter. Ver- oder Entfestigung bedeuten, daß sich Größe, Lage oder Form der Fließfläche ändern, bzw. in der Terminologie von BETTEN (1986), S. 93, die Fließfläche geht über in die Verfestigungsfläche. Diese Veränderung wird durch den Vektor (1-spaltige Matrix)  $q$  in den Gleichungen (2.61) und (2.64) beschrieben. Dabei unterscheidet man drei Arten von Verfestigung:

**Isotrope Verfestigung:** Die Fließfläche ändert ihre Größe. In der Bodenmechanik ist der Verfestigungsparameter meist die plastische volumetrische Dehnung  $\varepsilon_{vol}^p$ . Unter der Voraussetzung der Inkompressibilität der Kornsubstanz ergibt sich für die Porenzahl  $e$ , wenn man mit der logarithmischen Dehnung,  $\varepsilon_{vol} = \ln(V/V_0)$ , arbeitet:

$$e = (1 + e_0) \exp(\varepsilon_{vol}) - 1, \quad (2.69)$$

$$\text{wobei } e = \frac{\text{Porenvolumen}}{\text{Volumen der Festsubstanz}}$$

Mit zunehmender Porenzahl nimmt die Festigkeit ab. Dabei ist  $e_0$  die Porenzahl im Ausgangszustand. Dieser Tatbestand wird im Grundbau dadurch ausgedrückt, daß man den Reibungswinkel als Funktion der Porenzahl ansetzt. Für Sande kann nach SMOLTCZYK

(1987), S. 74, die Beziehung von SCHULTZE bzw. CAQUOT/KÉRISEL  $e \tan \varphi = \text{const}$  angesetzt werden.

**Kinematische Verfestigung:** Die Fließfläche ändert ihre Lage. Mit einem kinematischen Verfestigungsgesetz läßt sich z. B. der BAUSCHINGER Effekt (unterschiedliche Zug- und Druckfließgrenzen) berücksichtigen. Wird die Translation der Fließfläche durch den Tensor  $\underline{a}$  beschrieben, so lautet die Gleichung der Fließfläche (Verfestigungsfläche)

$$f(\underline{\sigma}, \underline{a}) = k^2 .$$

Dabei ist  $k$  ein Maß für die „Größe“ des Fließkörpers,  $\underline{a}$  regelt die Verschiebung. Eine einfache kinematische Verfestigungsregel ist die von RECKLING (1967), S. 219, beschriebene Verfestigungsregel von PRAGER für den zweiachsigen Spannungszustand:

$$d\underline{a} = c d\underline{\epsilon}^{pl} .$$

Wenn außerdem  $k$  mit der Translation der Fließfläche zunimmt, hat man eine Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung. In verschiedenen Arbeiten der Bodenmechanik, so z. B. bei BREINLINGER (1989), wurden isotrope und kinematische Verfestigungsgesetze vorgeschlagen, die auf dem *Critical State Concept* aufbauen, das eine spezielle Form der Plastizitätstheorie darstellt. In der *Critical State Soil Mechanics* unterscheidet man zwischen dem starrplastischen Modell *Granta-gravel* für kohäsionsloses Material und dem elasto-plastischen *Cam-clay* für bindige Böden. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet man bei ROSCOE/BURLAND (1968) oder SCHOFIELD/WROTH (1968). Wichtigstes Element dabei ist ein geschlossener Verfestigungskörper im 3-dimensionalen Hauptspannungsraum, so daß auch bei einer hydrostatischen Druckbeanspruchung plastisches Fließen auftreten kann.

Das isotrope Verfestigungsgesetz, das diesem Modell zugrunde liegt, basiert auf der TERZAGHI Gleichung

$$e = e_0 - \lambda_c \ln \left( \frac{I_\sigma}{I_{\sigma,0}} \right) \quad (I_\sigma < I_{\sigma,0} < 0) . \quad (2.70)$$

Dabei ist  $e_0$  die Porenzahl beim Bezugsdruck  $I_{\sigma,0}$  und  $\lambda_c$  der Kompressionsbeiwert. (Der „Kompressionsbeiwert“ des Oedometerversuchs wird bei SMOLTZYK (1987), S. 52, mit  $C_c$  bezeichnet). Gleichung

chung (2.69) in Verbindung mit (2.70) stellen ein isotropes Verfestigungsgesetz dar, das auf der plastischen volumetrischen Dehnung basiert. Es zeigte sich, daß dieses Verfestigungsgesetz zwar für Traglastberechnungen brauchbar ist, die irreversiblen Verschiebungen werden jedoch stark unterschätzt. Deshalb haben verschiedene Autoren (Zusammenstellung siehe BREINLINGER 1989) Zweiflächenmodelle entwickelt, bei denen die Verfestigungsfläche des Cam-clay Modells (Grenzfließfläche, bounding surface) Umhüllende für sich translatorisch bewegende kleinere Flächen ist. Das kinematische Verfestigungsgesetz ergibt sich dann über das Größenverhältnis innere/äußerer Fließfläche. Eine direkte Ermittlung der Verfestigungsparameter oder eine Identifikation mit physikalischen Größen ist nicht möglich. D. h. die Verfestigungsparameter sind die Koeffizienten der Approximation, die sich aus der Nachrechnung von Versuchen ergeben. Diese Modelle enthalten meist koaxiale, nicht assoziierte Fließregeln; Verfestigungsfläche und die Potentialfläche für die Richtung der Verzerrungsgeschwindigkeiten werden im Hauptspannungsraum festgelegt. Die wesentlichen Elemente eines solchen Stoffgesetzes zeigt Bild 2.7, das aus den Bildern 3.8 bis 3.11 der Arbeit von BREINLINGER (1989) zusammengestellt ist. Während in diesem Modell die Anzahl der Belastungszyklen ohne Einfluß ist, wird in dem ganz ähnlichen Stoffgesetz von MUTH (1989) auch die Anzahl der Lastwechsel berücksichtigt.

**Anisotrope Verfestigung:** Von anisotroper Verfestigung spricht man dann, wenn die Verfestigungsfläche ihre Form ändert. Diese Gestaltsänderung der Fließbedingung kann über einen Tensor 4. Stufe beschrieben werden. D. h. die Spaltenmatrix  $q$  in den Gleichungen (2.61) und (2.64) enthält die Komponenten eines Tensors 4. Stufe. Wichtige Hinweise zur Festlegung des Gestaltsänderungstensors gibt LEHMANN (1972), S. 304. Anwendungen in der Bodenmechanik gibt es bisher nicht und sind wahrscheinlich auch nicht dringlich, da zunächst die numerische und experimentelle Absicherung der kinematischen Verfestigungsgesetze erforderlich ist.

Eine besondere Form der Entfestigung ist der Sprödbbruch, bei dem es ohne Plastifizierung zur Trennung des Materials und somit zur Bildung neuer Oberflächen kommt. In der Geotechnik wird nicht immer streng zwischen plastischem Fließen, Versagen und Bruch unterschieden. Man spricht häufig von der COULOMBSchen Bruchbedingung, auch wenn sie als Fließbedingung im Sinne der Plastizitätsbedingung benutzt wird.

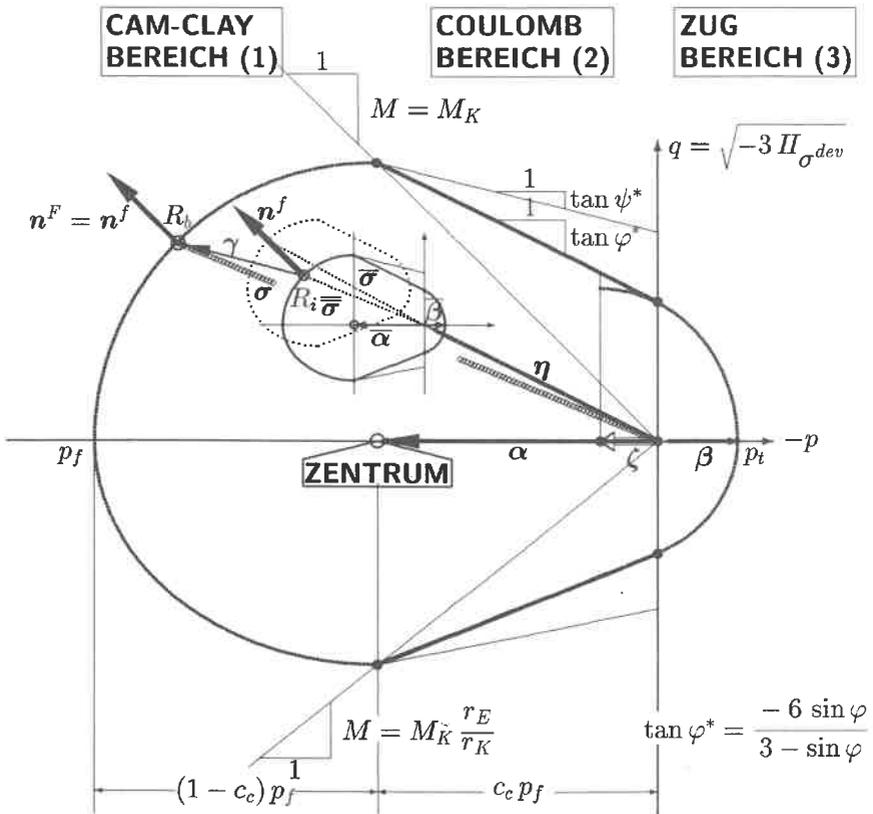


Bild 2.7: Modell von BREINLINGER (1989) in der hydrostatischen Ebene

Hilfreich ist jedoch eine begriffliche Differenzierung. So verwendet GUDEHUS (1981), S. 101, die Bezeichnung *COULOMBSche Grenzbedingung*, und BEDNARCZYK (1989), S. 14.8-1, bezeichnet Festlegungen von Spannungszuständen, bei denen Fließen oder Bruch eintritt, als *Anstrengungshypothesen*. „Je nachdem, ob sie als Fließ- oder Bruchkriterium dienen sollen, bezeichnet man sie als *Fließhypothesen* oder *Bruchhypothesen*.“ Wenn in der Geotechnik der Begriff *Bruch* oder *Bruchlast* verwendet wird, ist das meist kein *Bruch* im Sinne der linear-elastischen Bruchmechanik (GRIFFITH- oder IRWIN-Theorie), wie sie z. B. bei HAHN (1988) behandelt wird, sondern man versteht darunter die Berechnung von Grenzzuständen.

Die Schwierigkeit, bruchmechanische Methoden auf Boden oder Fels anzuwenden, ergibt sich vor allem aus der Heterogenität des Materials. Wenn

das Material aus verschiedenartigen mineralischen Stoffen besteht, wird es sehr schwierig, Rißmuster zu systematisieren (FAIRHURST 1971, S. 34). Erkenntnisse, die man aus der bruchmechanischen Analyse homogener Gesteinsproben gewinnt (z. B. OUCHTERLONY 1984) lassen sich nur qualitativ auf heterogenes Material übertragen. Der Versuch, bruchmechanische Methoden auf einen steifen geklüfteten Ton anzuwenden, wird von FEESER (1985) unternommen. Seine Untersuchungen liefern zwar Erklärungen für das mechanische Verhalten, jedoch keine quantitativen Ergebnisse.

Deshalb wird bei numerischen Analysen häufig der Bruchvorgang „verschmiert“. Die Implementierung eines solchen *smeared crack models* in ein FEM-Programm wird z. B. von CERVENKA/ELIGHAUSEN/PUKL (1989) ausführlich dargestellt. Die Methode ist prinzipiell gleich wie bei den *variable moduli models* der Bodenmechanik, die Programmierung ist jedoch aufwendiger, da die Anisotropie der gerissenen Bereiche berücksichtigt wird. In ähnlicher Weise, wie man gerissene Bereiche zu Bereichen mit anisotropem Materialverhalten „verschmiert“, betrachtet man in der Felsmechanik das unterkritische Rißwachstum als Pseudokriechen. Hinweise auf die numerischen Probleme bei einer „echten“ Rißanalyse geben u. a. GALLAGHER/MANG (1982) und WILLAM (1989). Eine aufwendige Berechnung der Entfestigung ist beim derzeitigen Stand der Versuchstechnik problematisch, da die in konventionellen Druckversuchen gemessene Entfestigung nur bedingt eine Materialeigenschaft ist, da sie durch Imperfektionen (inhomogene Spannungsverteilung) und geometrische Instabilität (Beulen) überlagert wird. Wie diesen Problemen durch eine entsprechende Versuchsanordnung begegnet werden kann, wird im Kapitel 4.2 gezeigt.

### 2.2.3 Allgemeine nichtlineare Formulierungen

Auch wenn sich diese Arbeit auf eine makroskopische, phänomenologische Beschreibung des Materialverhaltens konzentriert, soll nicht unerwähnt bleiben, daß die Deformation eines materiellen Systems einen thermomechanischen Prozeß darstellt und es deshalb zwingend ist, von den Prinzipien der Thermodynamik bzw. Thermomechanik<sup>9</sup> ausgehend Stoffgesetze zu überprüfen, bzw. Regeln für die Formulierung von Materialgleichungen anzugeben. Erwähnt seien nur die Arbeiten von HANS ZIEGLER aus den 50er und 60er Jahren, auf die z. B. BETTEN (1986), BEDNARCZYK (1967), und HAUPT (1977) verweisen, in denen u. a. die thermomechanische Be-

<sup>9</sup> „Die beiden Disziplinen — Kontinuumsmechanik und Thermodynamik — bilden daher ein geschlossenes Ganzes, das zweckmäßig als Thermomechanik bezeichnet wird“ (ZIEGLER 1976, S. 1)

gründung der Theorie des plastischen Potentials dargelegt wird. In der Arbeit von ZIEGLER (1967), S. 20 f, wird gezeigt, daß unter thermomechanischen Gesichtspunkten *Hypoelastizität*, *Elastizität* und *Hyperelastizität* eine Stoffklasse bilden; BEDNARCZYK (1967) gibt eine Einschränkung für die Koeffizienten des konstitutiven Tensors des hypoelastischen Stoffgesetzes (Gleichung 2.27) an, damit die Prinzipien der Thermodynamik erfüllt werden. Von den verschiedenen Konzepten zur Beschreibung des Materialverhaltens, die sich in Terminologie und Methode an der Arbeit von TRUESDELL/NOLL (1965) orientieren, wird nur der für Böden relevante Ansatz von KOLYMBAS (1988), Seite 69 dieser Arbeit, dargestellt; im übrigen wird auf die Zusammenstellungen bei HAUPT (1977) und BAZANT (1977) verwiesen.

Neben der Einteilung der Stoffe in *elastisch*, *viskos*, *plastisch* können Materialien nach ihrem *Gedächtnis bezüglich der thermomechanischen Vorgeschichte*, d. h. nach dem Einfluß der Vorgeschichte auf den aktuellen Spannungs- und Verzerrungszustand klassifiziert werden.

**Hyperelastische Stoffe** haben kein Gedächtnis — die innere Energie ist allein vom momentanen Verzerrungszustand abhängig.

**Viskoelastische Stoffe** haben ein nachlassendes Gedächtnis (fading memory).

**Plastische Stoffe** haben ein perfektes Gedächtnis.

**Newtonsche Flüssigkeiten** haben kein Gedächtnis — die Spannungen sind eine Funktion der momentanen Verzerrungsgeschwindigkeit.

Von KOLYMBAS (1988), S. 6, wird ein einfaches hypoelastisches Stoffgesetz für Sand angegeben, das in der Schreibweise dieser Arbeit lautet:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} = & \frac{C_1}{2} \left( \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) + C_2 \text{Sp}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) \cdot \underline{\underline{1}} + \dots \\ & \dots + C_3 \underline{\underline{\sigma}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{vol}^2 - 2 II \dot{\epsilon}} + \frac{C_4}{I_G} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{vol}^2 - 2 II \dot{\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

KOLYMBAS geht von der JAUMANNschen Spannungsgeschwindigkeit aus,

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^J = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{W}}, \quad (2.72)$$

wobei  $\underline{\underline{W}}$  der Wirbeltensor (schiefsymmetrischer Teil des Geschwindigkeitsgradienten) ist. In dieser Arbeit wird aus den bei BREINLINGER (1989) zusammengestellten Gründen die objektive Zeitableitung von GREEN/NAGHDI

verwendet, bei der  $\underline{\underline{\Omega}}$  als Drehmaß eingeführt wird.  $\underline{\underline{\Omega}}$  ergibt sich aus dem Drehtensor  $\underline{\underline{R}}$  und dessen Geschwindigkeit:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T . \quad (2.74)$$

$\underline{\underline{R}}$  erhält man aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten (siehe z. B. BUFLER 1977, S. 25).

Die Materialgleichung (2.71) wird der von BUCHMAIER (1985), S. 55, gegenübergestellt, um das Wesentliche hypoelastischer Formulierungen in der Bodenmechanik aufzuzeigen. Zwar beschränkt sich BUCHMAIER auf kleine Deformationen, doch die Deformationen der Versuche, für die diese Ansätze verifiziert wurden, sind so klein, daß der Unterschied unerheblich ist. In dieser Arbeit wird nur in Zusammenhang mit dem Stoffgesetz von KOLYMBAS die JAUMANNsche Spannungsgeschwindigkeit verwendet, ansonsten wird mit  $\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla}$  immer die Zeitableitung von GREEN/NAGHDI (1965) bezeichnet. Zum Vergleich mit Gleichung (2.71) lautet die Stoffgleichung von BUCHMAIER:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla} = \underline{\underline{C}}^* \cdot \left( \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{1}{3M} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{-II_{\sigma^{dev}}} \underline{\underline{1}} \right) . \quad (2.75)$$

Dabei ist  $\underline{\underline{C}}^*$  der „inkrementelle HOOKEsche“ Stofftensor, der sich aus den Moduli  $\bar{G}^4$  und  $\bar{K}$ , Gleichungen (2.78) und (2.79), ergibt.

Da im Hinblick auf die Implementierung in FEM-Programme die Darstellung in Matrizenform von besonderem Interesse ist, werden die Stoffgleichungen von BUCHMAIER und KOLYMBAS in der Form

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla} = \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

angegeben.

$$C^{koly} =$$

$$\begin{pmatrix} (C_1+C_2)\sigma_{11} & C_2\sigma_{22} & C_2\sigma_{33} & (\frac{C_1}{2} + C_2)\sigma_{12} & C_2\sigma_{23} & (\frac{C_1}{2} + C_2)\sigma_{31} \\ C_2\sigma_{11} & (C_1+C_2)\sigma_{22} & C_2\sigma_{33} & (\frac{C_1}{2} + C_2)\sigma_{12} & (\frac{C_1}{2} + C_2)\sigma_{23} & C_2\sigma_{31} \\ C_2\sigma_{11} & C_2\sigma_{22} & (C_1+C_2)\sigma_{33} & -C_2\sigma_{12} & (\frac{C_1}{2} + C_2)\sigma_{23} & (\frac{C_1}{2} + C_2)\sigma_{31} \\ \frac{C_1}{2}\sigma_{12} & \frac{C_1}{2}\sigma_{12} & 0 & \frac{C_1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \frac{C_1}{4}\sigma_{31} & \frac{C_1}{4}\sigma_{23} \\ 0 & \frac{C_1}{2}\sigma_{23} & \frac{C_1}{2}\sigma_{23} & \frac{C_1}{4}\sigma_{31} & \frac{C_1}{4}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{C_1}{4}\sigma_{12} \\ \frac{C_1}{2}\sigma_{31} & 0 & \frac{C_1}{2}\sigma_{31} & \frac{C_1}{4}\sigma_{23} & \frac{C_1}{4}\sigma_{23} & \frac{C_1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \end{pmatrix}$$

$$+ C_3 \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{vol}^2 - 2II\dot{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}_{vol}} \sigma (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (2.76)$$

$$+ C_4 \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{vol}^2 - 2II\dot{\epsilon}}}{I\sigma \dot{\epsilon}_{vol}} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{31} & 0 & \sigma_{12} & 0 \end{pmatrix} \sigma (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$C^{buch} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\bar{G} + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & 2\bar{G} + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 2\bar{G} + \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{G} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{K\bar{G}}{M\sqrt{-II\sigma^{dev}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\sigma^{dev})^T \quad (2.77)$$

	$C_1, C_2, C_3, C_4$	Materialparameter von Kolymbas,
Dabei sind:	$\alpha_G, \alpha_K, K_0, M, n$	Materialparameter von Buchmaier,
	$c, \varphi$	Kohäsion und Reibung,
	$s$	Scherzahl gemäß Gleichung (2.39).

Aus den Materialparametern und den Hauptspannungen ergeben sich die Werte für  $\bar{G}$  und  $\bar{\lambda}$  in Gleichung (2.77):

$$\bar{G} = \alpha_G (1 - s)^n (2c \cot \varphi - \sigma_I - \sigma_{III}), \quad (2.78)$$

$$\bar{K} = K_0 - \alpha_K I_\sigma, \quad (2.79)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{K} - \frac{2}{3} \bar{G}. \quad (2.80)$$

Wenn man den Stabilitätsbegriff auf die konstitutiven Matrizen  $C$  anwendet, bedeutet stabil, daß die Matrix  $C$  positiv definit sein muß. Ist  $C$  positiv semifinit, d. h. der kleinste Eigenwert ist 0, bzw.  $\det C = 0$ , wird ein Grenzzustand definiert, denn der Spannungszuwachs infolge eines Verzerrungsinkrements ist 0.

$$\nabla \bar{\sigma} = \mathbf{0}, \text{ wenn } \det C = 0. \quad (2.81)$$

Die durch Gleichung (2.81) definierte Fläche wird auch als Antwortumhüllende bezeichnet. Im Falle von Gleichung (2.77) ist die Lösung sehr einfach:  $\det C^{buch} = 0$ , wenn  $\bar{G} = 0$ . Wie man aus Gleichung (2.78) sieht, ist bei  $s = 1$ , also bei Erreichen des COULOMBSchen Kriteriums, diese Forderung erfüllt. Das ist trivial, denn die Anpassung an die COULOMBSchen Grenzbedingung war der Ausgangspunkt bei der Formulierung des Stoffgesetzes (SCHAD 1979, S. 83).

Während es also sehr einfach ist, die Grenzbedingung für Gleichung (2.77) grafisch darzustellen, ist dies bei Gleichung (2.76) im allgemeinen Fall nicht möglich; für einfache Sonderfälle gibt KOLYMBAS (1988), S. 74 u. 101, grafische Darstellungen. Zu der Tatsache, daß die Grenzfläche eine Hyperfläche im sechsdimensionalen Spannungsraum ist, kommt hinzu, daß diese Fläche nicht nur eine Funktion der Materialparameter ist, sondern auch von der ersten und zweiten Invarianten des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors beeinflußt wird. In der Terminologie der Plastizitätstheorie heißt das, daß Gleichung (2.76) „Fließbedingung“ „Fließregel“ und „Verfestigungsgesetz“ definiert.

Die Materialgleichung (2.76) ist ausgeprägt nichtlinear und anisotrop, so daß numerische Analysen allgemeiner Randwertprobleme sehr schwierig sein werden. Insbesondere da die Steifigkeit des Materials im spannungslosen Zustand verschwindet. Dies ist für kohäsionsloses Material eine zutreffende Annahme und kommt auch in anderen Ansätzen zum Ausdruck;

z. B. den Gleichungen (2.37) und (2.79) (wenn  $K_0 = 0$ ). Die Materialgleichungen werden für numerische Analysen günstiger, wenn für den Erdstoff eine Kohäsion angesetzt werden kann. Das wird auch bei KOLYMBAS (1988), S. 88, deutlich. Während man bei den *variable moduli models* zu der die Kompression kennzeichnenden Größe einen kohäsionsabhängigen skalaren Wert addiert, verwendet KOLYMBAS einen Strukturtensor  $\underline{S}$ , der zum Spannungstensor addiert wird. Dieses Vorgehen entspricht der allgemeinen Vorstellung, daß die Kohäsion als Vorspannung oder Eigenspannung interpretiert werden kann. In Gleichung (2.71) wird dann  $\underline{\sigma}$ , der „Lastspannungstensor“ durch einen Tensor  $\underline{\sigma}^{mod}$  ersetzt:

$$\underline{\sigma}^{mod} = \underline{\sigma} + \underline{S} . \quad (2.82)$$

Der Tatsache, daß die Kohäsion mit zunehmender Spannung und Verdichtung anwächst, wird durch die Entwicklungsgleichung

$$\underline{\dot{S}} = \mu_{koly} \underline{\sigma} \dot{\epsilon}_{vol} \quad (2.83)$$

Rechnung getragen. Qualitativ entspricht  $\mu_{koly}$  dem Kompressionsbeiwert  $\lambda_c$  im Cam-Clay-Konzept. Beide Parameter sind ein Maß für das Anwachsen des „inneren Zusammenhalts“ bei Lockergesteinen mit zunehmender Einwirkung allseitiger Druckspannungen. Das KOLYMBASSche Konzept, die Materialeigenschaften über einen Tensor 2. Stufe zu beschreiben, der dieselbe Dimension wie der Spannungstensor hat, verwenden verschiedene Autoren zur Berücksichtigung der Schädigung infolge Ribbildung. Eine Analyse dieser Verfahren gibt BETTEN (1986), S. 61 ff.

## 2.3 Viskosität, Kriechen und Relaxation

Da die Phänomene *Kriechen* und *Relaxation* ihre Ursache häufig in zähem Materialverhalten haben und somit ein enger Zusammenhang zwischen Viskosität und Kriechen besteht, ist der Gebrauch der Terminologie nicht eindeutig. Nach der Definition von ZIENKIEWICZ (1977), S. 607, werden Fließvorgänge, bei denen Beschleunigungseffekte vernachlässigbar sind, als *Kriechen* bezeichnet. Diese Definition ist sehr weit gefaßt, denn allgemein ist es üblich, zeitabhängige Verformung unter konstanter Belastung als *Kriechen* zu bezeichnen (z. B. RECKLING 1967, S. 4), wobei nicht zwischen viskoelastischem und viskoplastischem Deformationen differenziert wird. Da im Zusammenhang mit zeitabhängigen Problemen die Begriffe *schleichende Strömung*, *Kriechen* und *Relaxation* zentrale Bedeutung haben, soll zunächst eine Abgrenzung der Theorien und Phänomene erfolgen.

### 2.3.1 Schleichende Strömung

Der Begriff der *schleichenden Strömung* wird in der Hydromechanik, z. B. BEDNARCZYK 1986, Seite 3-3, eingeführt, wenn man bei der NAVIER-STOKES Gleichung die Beschleunigungsglieder gegenüber den Reibungsgliedern vernachlässigt. Bei Vernachlässigung der Reibung, wenn also die Beschleunigung im Vordergrund steht, erhält man die EULERSche Gleichung (siehe Tabelle 2.2).

Das Stoffgesetz der NEWTONSchen Flüssigkeit

$$\underline{\underline{\sigma}}^{dev} = 2 \mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{dev}; \quad p = -K^{vis} \dot{\epsilon}_{vol} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{\sigma}} = 2 \mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \lambda^{vis} \dot{\epsilon}_{vol} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (2.84)$$

bedeutet, daß in der Flüssigkeit im Ruhezustand auch kein hydrostatischer Druck auftreten kann. Deshalb ersetzt man in der Hydromechanik Gleichung (2.84) durch die Stoffgleichung von STOKES

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 \mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{dev} - p \underline{\underline{\mathbf{1}}}, \quad (2.85)$$

wobei  $p = -I_{\sigma}/3$  der Druck<sup>10</sup> ist, der voraussetzungsgemäß nicht durch die Verformungsgeschwindigkeit bestimmt sein soll, d. h.  $\lambda^{vis}$  und somit

<sup>10</sup>Die Vorzeichendefinition für den Druck wird hier so gewählt wie in Bodenmechanik und in der Hydromechanik allgemein üblich (BEDNARCZYK 1986, GUMMERT/RECKLING 1987, PRAGER 1961, SOMMERFELD 1978). Bei BREINLINGER (1989) ist dagegen  $p = I_{\sigma}/3$ , wie z. B. bei SZABO (1960) vereinbart.

die Volumenfließfähigkeit bleiben unbestimmt. Da in der Bodenmechanik die schleichende Strömung nur in Verbindung mit dem HOOKEschen Körper, z. B. VOIGTscher Stoff, oder mit nichtlinearem Stoffgesetz (nicht-NEWTONSche Flüssigkeit) von Bedeutung ist, soll die Stoffgleichung (2.84) als Ausgangsbasis dienen, während man in der Hydromechanik allgemein von der Stoffgleichung (2.85) ausgeht.

$$\text{Allgemeine Bewegungsgleichung} \quad \underline{\mathbf{f}} + \text{Div} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \underline{\mathbf{b}} \quad (2.86)$$

$$\text{NEWTONSche Flüssigkeit} \quad \underline{\mathbf{f}} + \mu \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} + (\mu + \lambda^{vis}) (\nabla \otimes \underline{\mathbf{v}}) \cdot \nabla = \rho \underline{\mathbf{b}} \quad (2.87)$$

$$\text{NAVIER-STOKESsche Gleichung} \quad \dot{\epsilon}_{vol} = 0; \quad \underline{\mathbf{f}} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} = \rho \underline{\mathbf{b}} \quad (2.88)$$

$$\text{Kompressible schleichende Strömung} \quad \underline{\mathbf{f}} + \mu \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} + (\mu + \lambda^{vis}) (\nabla \otimes \underline{\mathbf{v}}) \cdot \nabla = 0 \quad (2.89)$$

$$\text{Inkompressible schleichende Strömung} \quad \underline{\mathbf{f}} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.90)$$

$$\text{EULERSche Gleichung (reibungsfreie Strömung)} \quad \underline{\mathbf{f}} - \nabla p = \rho \underline{\mathbf{b}} \quad (2.91)$$

Dabei gilt für die *totale* oder *materielle* Beschleunigung  $\underline{\mathbf{b}}$ :

$$\underline{\mathbf{b}} = \underbrace{\frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t}}_{\text{lokale Beschleunigung}} + \underbrace{(\nabla \otimes \underline{\mathbf{v}})^T \cdot \underline{\mathbf{v}}}_{\text{konvektive Beschleunigung}} \quad (2.92)$$

$\underline{\mathbf{f}}$  ist der Vektor der Volumenkräfte (Volumenkraftdichte)

**Tabelle 2.2:** Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik

Da die in der Hydromechanik häufig getroffene Annahme der Inkompressibilität in der Bodenmechanik meist nicht zutrifft, hat man von Gleichung (2.87) bzw. (2.84) auszugehen. Der Unterschied zur NAVIER-STOKES-Gleichung besteht darin, daß die 1. LAMÉsche Konstante der Zähigkeit  $\lambda^{vis}$  oder ein äquivalenter Parameter anzugeben ist, da die Bewegung von der volumetrischen Viskosität beeinflusst wird. Die Zusammenstellung der Gleichungen in Tabelle 2.2 ergibt sich, wenn man der Systematik von BEDNARCZYK 1986, S. 3-1ff, bzw. PRAGER (1961), S. 88ff, folgt und somit

Isotropie und zeitlich und räumlich unveränderliche Materialeigenschaften ( $\mu$  und  $\lambda^{vis}$ ) voraussetzt. Die Bezeichnungen der Zähigkeitskonstanten bei Isotropie sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt. Aufgrund der Analogie zum HOOKEschen Gesetz kann die Umrechnung zwischen den Parametern nach dem bei SNEDDON/BERRY (1958), S. 26, angegebenen Schema erfolgen, das in modifizierter Form im Anhang, Seite 142, wiedergegeben wird.

$\lambda^{vis}, \lambda, \kappa$	1. LAMÉ Parameter der Zähigkeit	1 <sup>st</sup> LAMÉ's viscous constant
$\mu, \eta$	2. LAMÉ Parameter der Zähigkeit, (Scher)viskosität, (dynamische) Zähigkeit	coefficient of (shear) viscosity, dynamic viscosity
$\nu = \mu/\rho$	kinematische Zähigkeit	kinematic viscosity
$K^{vis}, \zeta$	Volumenviskosität, Volumenfließzähigkeit	volume viscosity
$\eta, \lambda_T$	viskoser Dehnungskoeffizient nach TROUTON	viscous traction coefficient
$\nu^{vis}$	POISSON Zahl für die Dehnungsgeschwindigkeiten, Querdehnungsgeschwindigkeitszahl	POISSON's ratio for strain rates
$E_s^{vis}, \eta$	Oedometerviskosität	

Tabelle 2.3: Viskose Moduli (NEWTONsches Gesetz)

Die Dimensionen der Zähigkeit:

$$\frac{\text{Kraft} \cdot \text{Zeit}}{\text{Fläche}} \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \cdot \text{Zeit}} \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]$$

Eine sehr gebräuchliche Einheit für die Zähigkeit ist 1 *Poise*. Dabei ist festgelegt:

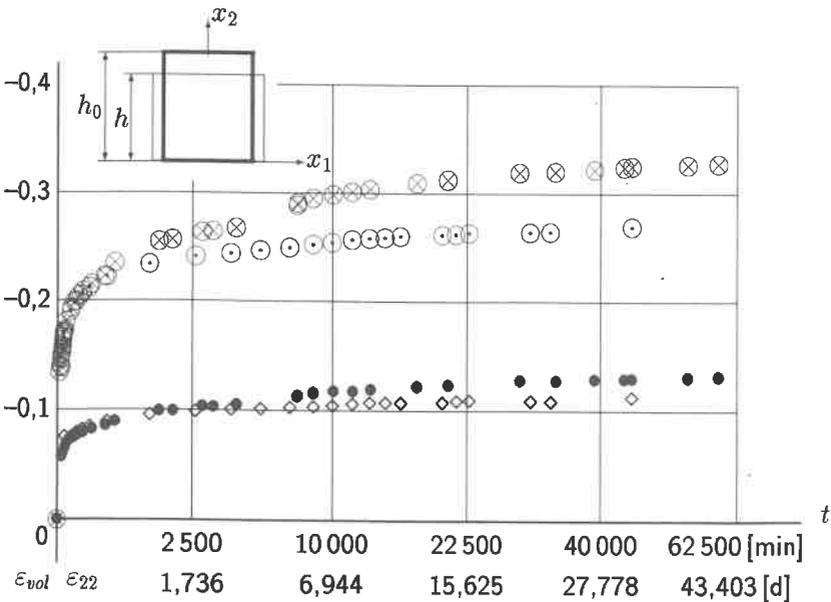
$$1 \text{ Poise} = 1 \frac{g}{cm \cdot s} = 1 \frac{dyn \cdot s}{cm^2} = 0,1 \frac{N \cdot s}{m^2} \quad (1 \text{ dyn} = 10^{-5} N).$$

Der Kehrwert der Zähigkeit heißt *Fluidität*. Den Quotienten aus Zähigkeit und Dichte bezeichnet man allgemein als *kinematische Zähigkeit*, die meist in der Einheit 1 *Stokes* (*St*) = 1  $cm^2/s$  gemessen wird. Um deutlich die *Zähigkeit* von der kinematischen Zähigkeit zu unterscheiden, wird auch der

Begriff *dynamische Zähigkeit* verwendet. Beliebte Einheiten für die kinematische Zähigkeit sind  $1\text{ cSt}$ , für die Zähigkeit (dynamische Zähigkeit)  $1\text{ cPoise}$ . Da Wasser bei einer Temperatur von  $20^\circ$  eine dynamische Viskosität von  $1,005\text{ cPoise}$  oder eine kinematische Viskosität von  $1,005\text{ cSt}$  hat, ergibt sich mit diesen Einheiten immer ein einfacher Bezug zur Zähigkeit des Wassers.

### 2.3.2 Kriechen und Relaxation

Als *Relaxation* sollen zeitabhängige Spannungsänderungen ohne zeitliche Änderung der Verzerrungen bezeichnet werden. Auf Stoffgleichungen bezogen unterscheidet HAUPT (1977), S. 5, formal zwischen *Stoffgleichungen vom Kriechtyp*, bei denen der Verzerrungszustand ein Funktional der Spannungsgeschichte ist, und *Stoffgleichungen vom Relaxationstyp*, bei denen der Spannungszustand ein Funktional der Verzerrungsgeschichte ist.



$\sigma_{22} = -1875\text{ kPa} = \text{const}$	$\otimes$ $\epsilon_{22} = \ln(h/h_0)$	$\bullet$ $\epsilon_{vol} = \ln(V/V_0)$
$F = 12\text{ kN} = \text{const}$	$\odot$ $\epsilon_{22} = \ln(h/h_0)$	$\diamond$ $\epsilon_{vol} = \ln(V/V_0)$

Bild 2.8: Vergleich von last- und spannungskonstantem Kriechversuch mit Kork

Im Hinblick auf Kriechversuche muß bei großen Deformationen präzisiert werden, ob mit „konstanter Belastung“ *Lastkonstanz* oder *Spannungskonstanz* gemeint ist, denn bei bestimmten Materialien, siehe Bild 2.8, kann der Unterschied wesentlich sein.

In der Geotechnik haben Kriechprobleme eine wesentlich größere Bedeutung als Relaxationsprobleme, so daß es eine große Zahl von Arbeiten gibt, in denen aufgrund von Kriechversuchen bzw. molekulartheoretischen Überlegungen Kriechgleichungen angegeben werden. Zur Einordnung dieser Ergebnisse kann das in den Materialwissenschaften allgemein übliche Schema (z. B. REINHARDT 1973, S. 35, oder SCHATT 1981, S. 360), bei dem das Kriechen in drei Phasen eingeteilt wird (Bild 2.9), verwendet werden. Z. B. werden von VYALOV (1986), S. 343, für Kaolin und ORTH (1986), S. 47 ff, für gefrorenen Sand Kriechkurven angegeben, die qualitativ den in Bild 2.9 dargestellten Verlauf bestätigen. In der praktischen Anwendung sollte jedoch, wie bei DERSKI ET AL., S. 115, nach Boden- oder Felsart und Beanspruchungsgrad differenziert werden:

1. Alle drei Phasen können quantifiziert werden.
2. Die erste und zweite Phase sind so kurz sind, daß man von einem „schlagartigen“ Versagen sprechen kann.
3. Die Kriechgeschwindigkeit klingt stetig ab.

Dem unter Punkt 1) genannte Verhalten wird in der Forschung vor allem deshalb eine große Bedeutung zugemessen, da es sicherheitstechnisch sehr brisant ist.

Der Kriechverlauf wird allgemein durch mathematische Funktionen, z. B. die in Bild 2.9 angegebenen, beschrieben. Diese Funktionen erheben nicht den Anspruch von Allgemeingültigkeit, sondern es sind — wie andere Kriechgleichungen auch — Interpolationsformeln zur mathematischen Beschreibung von Meßergebnissen. „Man kann davon mit Vorteil in der Materialprüfung Gebrauch machen, wenn es sich darum handelt, zur Erfassung des Verhaltens eines Materials Modellversuche an demselben Materiale vorzunehmen“ (REINER 1933, S. 298).

**Primäre Kriechphase:** Da das *Primär-*, oder *Übergangskriechen* häufig durch einen Ansatz der Form  $\varepsilon = \alpha \ln(t/t_0)$  beschrieben wird, spricht man auch vom  $\alpha$ -Kriechen oder vom *logarithmischen Kriechen*. Zuweilen wird auch der aus dem Englischen kommende Begriff *transientes Kriechen* verwendet. Eine besondere Art des Übergangskriechens ist der in der Felsmechanik als *Pseudokriechen* bezeichnete Kriech-

oder Relaxationsprozeß, der sich infolge einer zeitabhängigen unterkritischen Rißausbreitung ergibt. Man kann dieses Phänomen auch bei Sand beobachten, ohne es allerdings als Pseudokriechen zu bezeichnen.

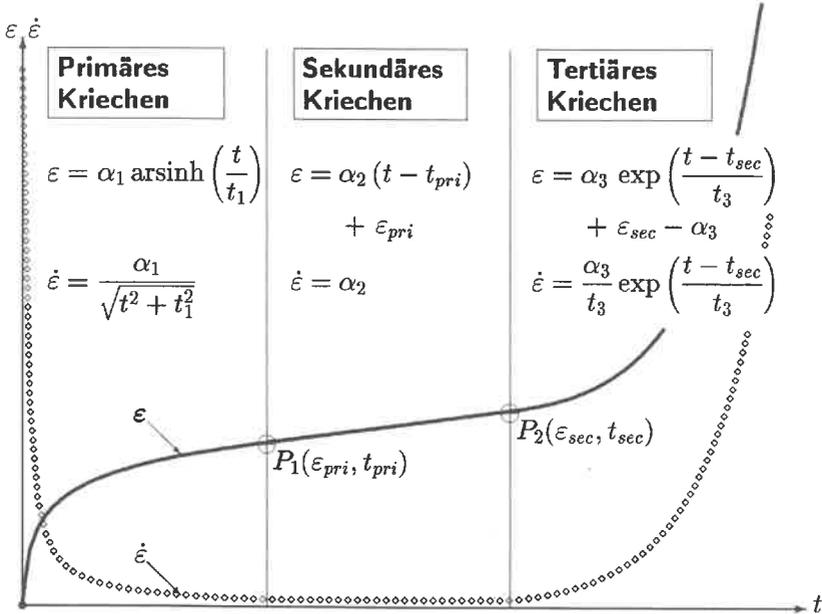


Bild 2.9: Die drei Phasen des Kriechens;  $\sigma = const$

**Sekundäre Kriechphase:** Diese Phase ist gekennzeichnet durch eine konstante Verzerrungsgeschwindigkeit. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen Verzerrungsgeschwindigkeit und Spannung nicht immer linear wie beim NEWTONSchen Stoffgesetz, sondern es werden häufig Potenzansätze  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_\alpha (\sigma/\sigma_\alpha)^\beta$  oder Exponentialansätze  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_\alpha \exp(\sigma/\sigma_\alpha)$  verwendet. Wählt man statt der Exponentialfunktion die Sinushyperbolicusfunktion  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_\alpha \sinh(\sigma/\sigma_\alpha)$ , erhält man einen Ansatz, der sich für  $(\sigma/\sigma_\alpha) > 1$  nur unwesentlich vom Exponentialansatz unterscheidet und für  $|\sigma/\sigma_\alpha| \ll 1$  dem linearen Zusammenhang der NEWTONSchen Flüssigkeit entspricht. Die Temperaturabhängigkeit, wie sie bei der Bodenvereisung oder im Bergbau von Bedeutung sein kann, läßt sich über einen ARRHENIUS-Term in der Form  $\dot{\varepsilon} = K \exp[-Q/(RT)]$  beschreiben ( $K$  ist eine Referenzgeschwindigkeit,  $Q$  die Aktivierungsenergie,  $R$  die allgemeine

Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur). Die Ansätze sind in der Geotechnik dieselben, wie sie auch bei Metallen üblich sind. Eine Zusammenstellung findet man z. B. bei ORTH (1989), S. 9 ff.

**Tertiäre Kriechphase:** Im tertiären Bereich (*beschleunigendes Kriechen*) zeigt sich eine mit der Beanspruchungszeit stark zunehmende Dehnung, die zum *Kriechbruch* führt. Diese Phase ist mit großen Deformationen und der Ausbildung von Anisotropie verbunden. Diese Erscheinungen lassen sich aber bei Böden und Fels nur schwer quantifizieren, da in dieser Phase beim Zylinderdruckversuch in den Proben Trennflächen auftreten und somit eine mathematische Beschreibung in Form von Spannungs-Verzerrungsbeziehungen nicht mehr möglich ist. Wenn es gelingt, Versuche durchzuführen, bei denen auch in dieser Phase ein homogener Verzerrungszustand gegeben ist, kann mit den bei BETTEN (1986), S. 143 ff, angegebenen Regeln die Anisotropie im tertiären Bereich mathematisch beschrieben werden.

### 2.3.3 Kriechgleichungen und implizite Spannungsintegration

**Kriechgesetze und Anfangslastmethode:** In verschiedenen Arbeiten, z. B. KLEIN (1978) und HEUSERMANN (1982), werden die Kriechdehnungen im Rahmen von geometrisch linearen FE-Analysen ähnlich wie Temperaturdehnungen behandelt. D. h. die Kriechdehnungen werden mit der Methode der Anfangslasten berücksichtigt. Liegt für die inelastischen Kriechdehnungen  $\underline{\varepsilon}^{creep}$  ein Kriechgesetz etwa in der Form

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{creep} = f(\sigma, t, T) \quad (2.93)$$

vor, so sind diese Verzerrungsgeschwindigkeiten bei der Integration zur Ermittlung der Spannungen zu berücksichtigen. Dieses Vorgehen hat den Mangel, daß die Kriechgleichung in der numerischen Analyse wie ein Stoffgesetz verwendet wird. Da Kriechgleichungen auf Versuchen mit zeitlich konstanter Belastung basieren, in der numerischen Analyse allgemeiner Randwertprobleme diese Voraussetzung jedoch nicht gegeben ist, kann dieses Vorgehen eine sehr starke Vereinfachung darstellen.

Die Implementierung in FE-Programme basiert auf der Integration der Spannungen nach der Gleichung

$${}^{t+\Delta t}\underline{\sigma} = {}^t\underline{\sigma} + \int_t^{t+\Delta t} \underline{C} \cdot (d\underline{\varepsilon} - d\underline{\varepsilon}^{creep}) \quad (2.94)$$

und ist z. B. bei BATHE (1986), S. 431 ff, und HEUSERMANN (1982), S. 120 ff, ausführlich dargestellt. Die Verallgemeinerung von einaxialen Kriechversuchen auf den dreidimensionalen Spannungszustand erfolgt meist dadurch daß die  $\sigma - \varepsilon$  Beziehung auf  $\sqrt{-II_{\sigma^{dev}}} - \sqrt{-II_{\varepsilon^{dev}}}$  übertragen wird, so daß sich ergibt:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vis} = f(\sqrt{-II_{\sigma^{dev}}}, t, T) \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{dev}}{\|\underline{\underline{\sigma}}^{dev}\|} \quad (2.95)$$

Aus der Annahme der Proportionalität von Spannungsdeviator und Kriechverzerrungsgeschwindigkeit ergibt sich volumenkonstantes Kriechen. Diese Annahme wird zwar sehr häufig getroffen, ist jedoch für Böden nur bedingt brauchbar, da vor allem bei Setzungs Vorgängen dem volumetrischen Kriechen entscheidende Bedeutung zukommt. Das Problem dieser Vorgehensweise besteht darin, daß die Kriechgleichung (2.93) aus Versuchen mit  $\sigma = const$  ermittelt wurde und diese Verhältnisse bei einem allgemeinen Problem nicht gegeben sind.

**Kriechpotential:** Bei vielen Materialien kann man beobachten, daß irreversible zeit- und geschwindigkeitsabhängige Deformationen erst bei einer bestimmten Beanspruchung auftreten. Von daher bietet es sich an, zur Darstellung des mehraxialen Kriechens in Analogie zur Theorie des plastischen Potentials (s. S. 57) eine *Theorie des Kriechpotentials* zu formulieren (BETTEN 1986, S. 141 ff). D. h. der Verfestigungsmodul  $h$  in Gleichung (2.68) ist dann eine Funktion der Zeit und der Beanspruchungsgeschwindigkeit. Häufig wird die Möglichkeit eines „zeitabhängigen Verfestigungsmoduls“ genutzt, um die Effizienz der numerischen Lösung im Rahmen der Methode der Finiten Elemente zu steigern. Es wird eine fiktive Viskosität gewählt, die keine physikalische Bedeutung hat (z. B. WITTKKE 1984, S. 85/312). Dieses Vorgehen wird dann als „viskoplastisch“ bezeichnet, obwohl es sich, physikalisch gesehen, um elastoplastische Berechnungen handelt.

**Idealstoffe (rheologische Modelle):** Während die Verfahren *Kriechgleichungen und Anfangslastmethode* und die *Theorie des Kriechpotentials* darauf beruhen, daß das Verhalten in Kriechversuchen mathematisch beschrieben wird und man dann durch Verallgemeinerung ein Stoffgesetz formuliert, kann man auch den umgekehrten Weg gehen. D. h. man wählt einen Idealstoff (rheologisches Modell), z. B. einen der in Abschnitt 2.1 beschriebenen, aus und prüft, ob dieser Idealstoff das in Kriechversuchen

beobachtete Verhalten zutreffend beschreibt. Diese Methode wird z. B. von FRITZ (1981) zur Analyse von Problemen des Tunnelbaus und von LANGER (1978) für den Hohlraumbau im Salzgebirge verwendet. Sie wird auch im folgenden Kapitel bei der Erweiterung eines elastoplastischen Stoffgesetzes zur Berücksichtigung geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens genutzt.

# Kapitel 3

## Visko-elastoplastisches Stoffgesetz

Entsprechend den grundsätzlichen Materialeigenschaften der Festkörper *Elastizität*, *Plastizität* und *Viskosität* hat sich in der technischen Anwendung die gegliederte Beschreibung der beobachteten Phänomene bewährt. Dieser Gliederung folgt in den folgenden Abschnitten die Beschreibung des elastoplastischen und des viskoelastischen Teils des Stoffgesetzes. Die beiden Teile des Stoffgesetzes können dann im Rahmen von FEM-Analysen analog zu dem in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen modifizierten ZENER-Körper „parallel geschaltet“ werden.

### 3.1 Elastoplastischer Teil

Der elastoplastische Teil des Stoffgesetzes entspricht der bei BREINLINGER (1989) dargestellten Formulierung. Die detaillierte Beschreibung der Fließfläche erfolgt jedoch in dieser Arbeit (siehe Fußnote bei BREINLINGER, S. 64). Den Vorteilen des COULOMBSchen Kriteriums — nur zwei Parameter, die für alle geologischen Materialien relativ gut bekannt sind — stehen folgende Nachteile gegenüber:

- Unstetigkeit der räumlichen Ableitungen der Fließfläche, da sich diese aus Ebenen zusammensetzt;
- Unterschätzung der Scherfestigkeit im Bereich von  $\sigma_{II} \simeq \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{III})$ ;
- Überschätzung der Zugfestigkeit.

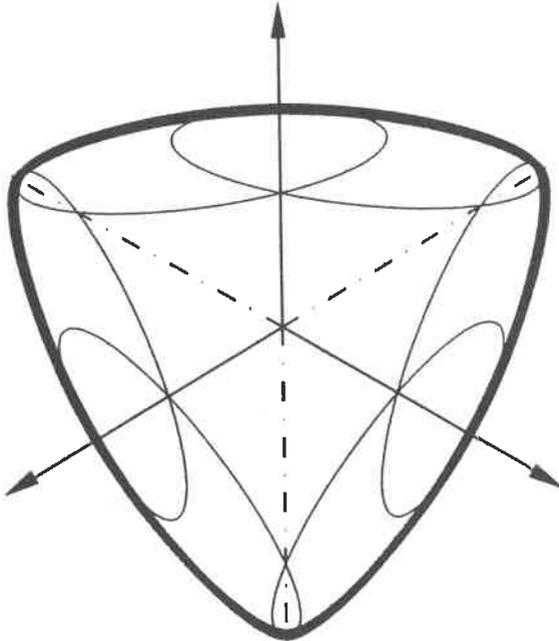
Die Einfachheit der COULOMBSchen Formulierung ergibt sich aus der Tatsache, daß sich die Fließfläche aus ebenen Flächen zusammensetzt. Betrachtet man die Fließfläche in den zwei zueinander senkrecht stehenden

Ebenen des Hauptspannungsraums, der Deviatorebene und der hydrostatischen Ebene, ist die Fließkurve in der Deviatorebene ein Sechseck, in der hydrostatischen Ebene eine Gerade.

Die Nachteile des COULOMBSchen Ansatzes können nur überwunden werden, wenn man zu einem höheren Ansatz für die Fließkurven übergeht. Deshalb werden Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte) gewählt, deren Gleichung in einem kartesischen Koordinatensystem lautet:

$$a_1 x^2 + 2 a_2 x y + a_3 y^2 + 2 a_4 x + 2 a_5 y + a_6 = 0$$

Damit bleibt die Formulierung relativ einfach, es ist jedoch eine gute Approximation an Versuchsergebnisse möglich und die Fließkurven, die sich nun aus Kurven 2. Ordnung zusammensetzen, werden so aneinander gefügt, daß in der Deviatorebene eine auch in allen Ableitungen stetige Fließkurve entsteht.



**Bild 3.1:** Fließkurve des modifizierten COULOMB-Kriteriums in der Deviatorebene

Um die Vorteile der COULOMBSchen Formulierung beizubehalten und die Nachteile zu überwinden, wird nun keine vollkommen neue Fließfläche vorgeschlagen, sondern das COULOMBSche Kriterium wird so modifiziert,

daß die klassischen Parameter  $c$  und  $\varphi$  weiterhin verwendet werden. Dazu kommen drei neue Parameter, die eher den Charakter von Korrekturfaktoren haben.

### 3.1.1 Parameter des modifizierten Coulomb-Kriteriums

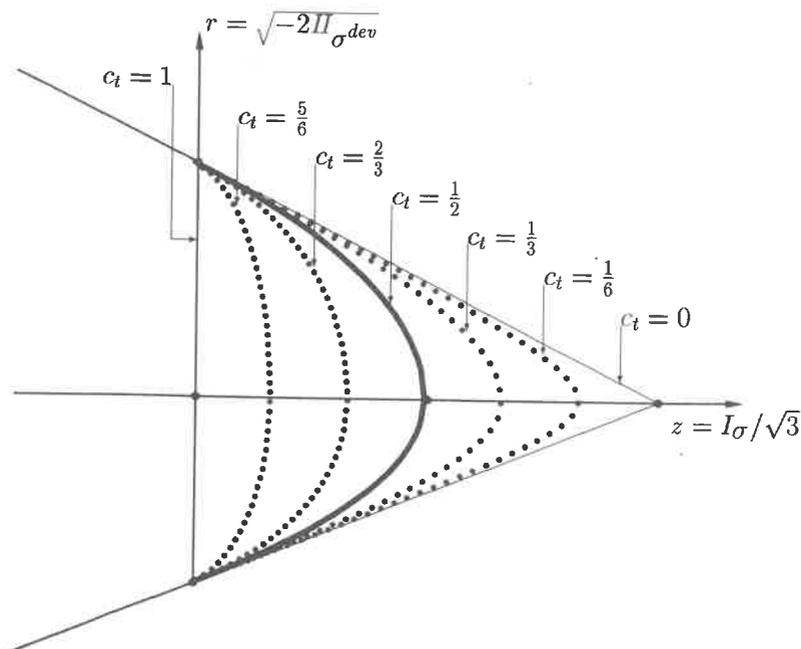
Zu den COULOMBSchen Parametern  $c$  und  $\varphi$  kommen die drei Parameter  $c_t$ ,  $c_h$  und  $c_p$  hinzu:

1.  $c_t$ : correction of the tension-cut-off criterion (Bild 3.2). Über diesen Parameter wird die Fließfläche im Zugbereich modifiziert (Abschnitt 7.2.2).

$c_t = 0$ : COULOMBSches Kriterium.

$c_t = 1$ : Zugspannungsfrei (No-tension-material).

Materialverhalten, das in dem Bereich dazwischen liegt, kann durch die Variationsmöglichkeit  $0 \leq c_t \leq 1$  erfaßt werden.



**Bild 3.2:** Einfluß des Parameters  $c_t$  auf die Fließkurve

2.  $c_h$ : correction of the hexagon (Bild 3.3). Die Form des Sechsecks in der Deviatorebene wird beim COULOMBSchen Kriterium durch den Reibungswinkel  $\varphi$  bestimmt. Für das Verhältnis der Radien der Eckpunkte gilt bei COULOMB:

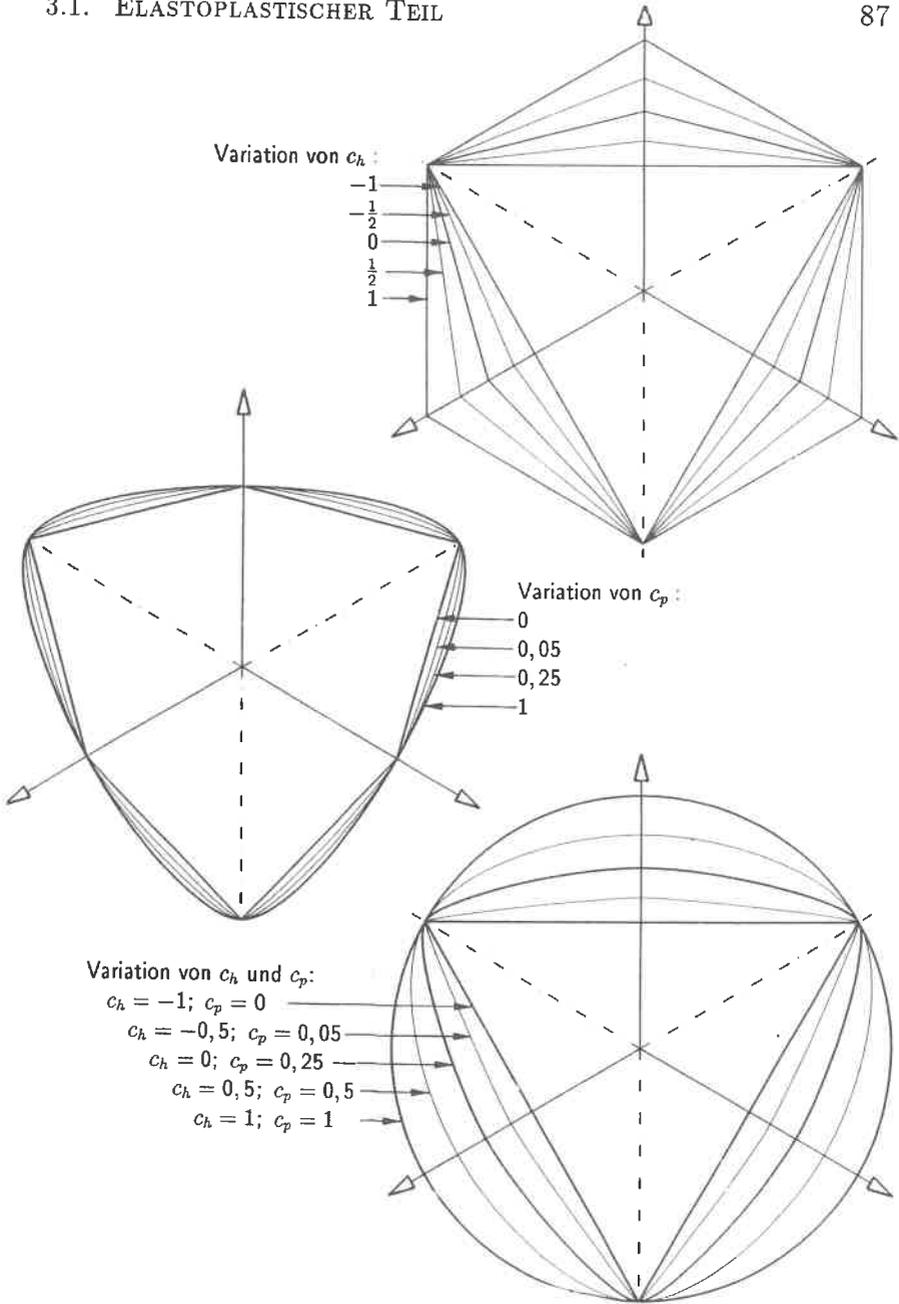
$$f_{MC} = \frac{r_o^{MC}}{r_1^{MC}} = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}. \quad (3.1)$$

Wird dieses Verhältnis nicht durch Meßergebnisse bestätigt, kann dies beim modifizierten COULOMBSchen Kriterium durch Wahl des entsprechenden Parameters  $c_h$  berücksichtigt werden. Damit — unabhängig vom Reibungswinkel — für die Grenzfälle die Bedingungen

- $c_h = 1$ : Gleichseitiges Sechseck  
 $c_h = 0$ : Sechseck von COULOMB  
 $c_h = -1$ : Sechseck degeneriert zum Dreieck

erfüllt sind, muß zwischen dem Bereich  $c_h \geq 0$  und dem Bereich  $c_h < 0$  differenziert werden:

$$\begin{aligned} \text{Für} \quad 0 \leq c_h \leq 1 \quad \frac{r_o}{r_1} &= \frac{f_{MC}}{(f_{MC})^{c_h}} \\ \text{oder} \quad \frac{r_o}{r_1} \geq f_{MC} \quad c_h &= \frac{\ln(f_{MC} \frac{r_1}{r_o})}{\ln(f_{MC})}. \\ & \hspace{15em} (3.2) \\ \text{Für} \quad -1 \leq c_h < 0 \quad \frac{r_o}{r_1} &= f_{MC} (2 f_{MC})^{c_h} \\ \text{oder} \quad \frac{r_o}{r_1} < f_{MC} \quad c_h &= \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_1 f_{MC}}\right)}{\ln(2 f_{MC})}. \end{aligned}$$



**Bild 3.3:** Einfluß der Parameter  $c_h$  und  $c_p$  auf die Fließkurve in der Deviatorebene

3.  $c_p$ : correction for the plumpness (Bild 3.3). Zur Beschreibung des Einflusses der mittleren Hauptspannung haben verschiedene Autoren, u. a. GUDEHUS, STUTZ, LADE, WILLAM/WARNKE, Versuche durchgeführt und zur Beschreibung der Versuchsergebnisse stetige Fließkurven in der Deviatorebene vorgeschlagen, die „fülliger“ sind als das COULOMBSche Sechseck. Eine Zusammenstellung der Formulierungen und Versuchsergebnisse findet man z. B. bei GOLLUB (1989), S. 61 ff, und GUDEHUS (1980). Die meisten Formulierungen ergeben jeweils eine bestimmte Fülligkeit, die gut zu dem vom jeweiligen Autor untersuchten Material paßt, jedoch nicht für die breite Gruppe der Erdstoffe angewendet werden kann. Deshalb wird der Parameter  $c_p$  eingeführt, mit dem, in Verbindung mit dem Parameter  $c_h$ , jede Fülligkeit gut approximiert werden kann. Wenn keine Experimente zur Bestimmung von  $c_p$  durchgeführt werden, kann man mit  $c_p = 0,5$  rechnen. Gegenüber dem COULOMBSchen Gesetz,  $c_p = 0$ , hat diese Festlegung den Vorteil, daß sich die „Ausrundung der Ecken“ positiv auf das Konvergenzverhalten bei einer iterativen Berechnung auswirkt.

**Sonderfälle:**

$c_p = 0$ : Sechseck. Fließkurve in der Deviatorebene ist ein Sechseck. In Verbindung mit  $c_h = 0$  ergibt sich das COULOMBSche Kriterium. Bei  $c_h = -1$  erhält man ein Dreieck.

$c_p = 1$ : Fließkurve setzt sich aus drei Ellipsenbögen zusammen wie beim Modell von WILLAM/WARNKE (1974). In Verbindung mit  $c_h = 1$  wird die Fließkurve in der Deviatorebene zum Kreis und entspricht dann der Formulierung von DRUCKER/PRAGER (1952).

### 3.1.2 Die geometrischen Elemente der Fließkurven

In der Deviatorebene besteht die Fließkurve aus sechs Ellipsenbögen (s. Bild 3.1), so daß sowohl ein Kreis (MIESES, DRUCKER/PRAGER) als auch ein Sechseck (COULOMB) beschrieben werden können. Während bei der Fließkurve von WILLAM/WARNKE (1974) die kleinen Achsen der Ellipse mit den Projektionen der Hauptspannungsachsen in die Deviatorebene identisch sind, wird in der Formulierung dieser Arbeit die Ellipse gegenüber den Achsen des Hauptspannungsraumes gedreht. Diese Drehung wird über den Parameter  $c_p$  gesteuert. Der Winkel  $\alpha_{gr}$  zwischen der Normalen zur  $x'$ -Achse und dem Sechseck ergibt sich als Funktion von  $r_0$  und  $r_1$  (Bild 3.4).

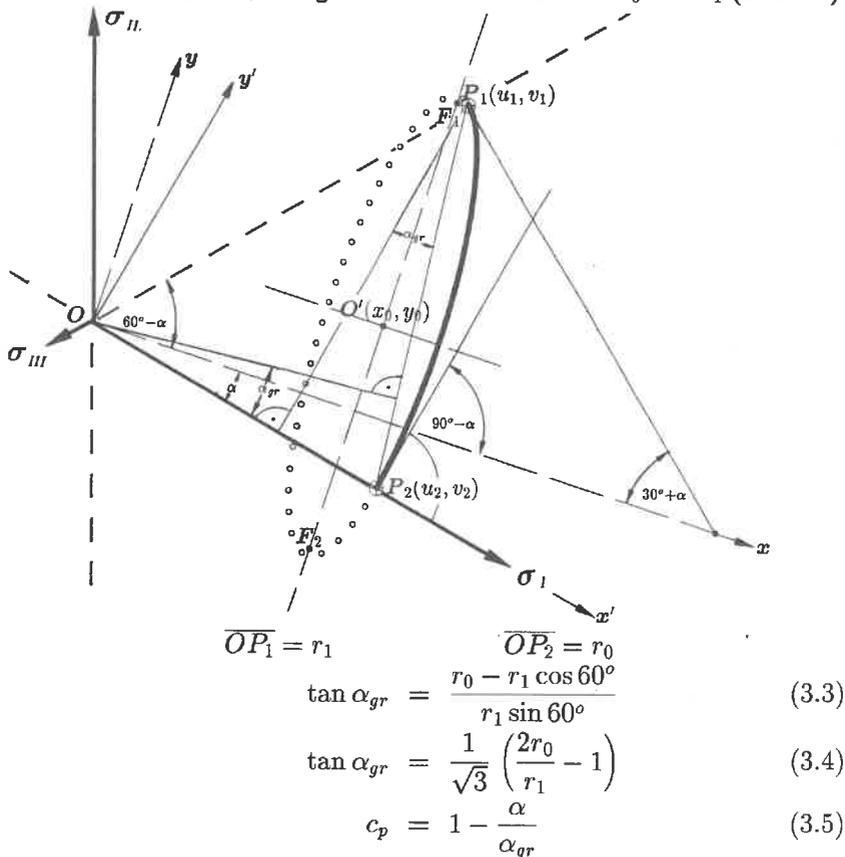


Bild 3.4: Hauptachsen der Ellipse und „Fülligkeit“  $c_p$

Koordinaten von  $P_1$  im  $x, y$ -System:

$$u_1 = r_1 \cos(60^\circ - \alpha) , \quad v_1 = r_1 \sin(60^\circ - \alpha) . \quad (3.6)$$

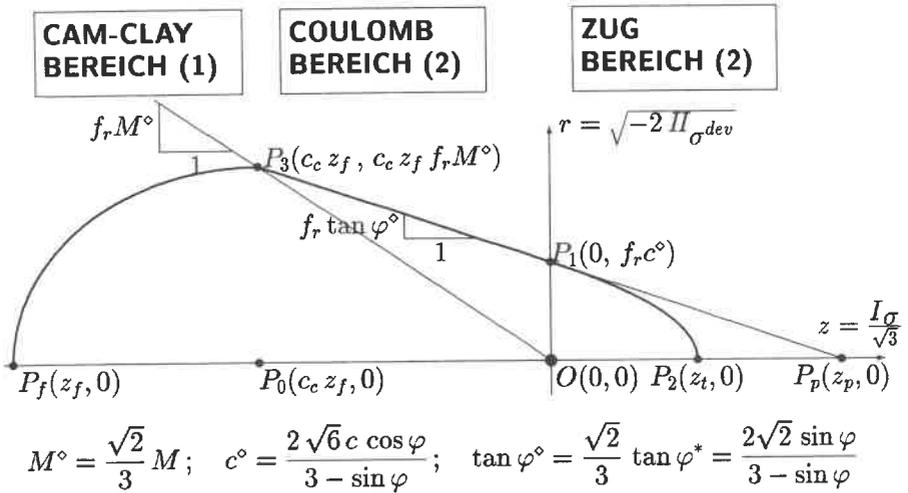
Koordinaten von  $P_2$  :

$$u_2 = r_0 \cos \alpha , \quad v_2 = -r_0 \sin \alpha . \quad (3.7)$$

Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  :

$$m_1 = -\tan(30^\circ + \alpha) , \quad m_2 = \tan(90^\circ - \alpha) . \quad (3.8)$$

Die „Größe“ der Fließkurve ergibt sich aus  $r_1$  bzw.  $r_0$ , das durch die Fließkurve in der hydrostatischen Ebene (siehe Bild 3.5 und Anhang Abschnitt 7.2.2) bestimmt wird.



**Bild 3.5:** Bereiche und Bezeichnungen in der hydrostatischen Ebene

Eine ausführliche Herleitung der Fließkurven findet sich im Anhang in Abschnitt 7.2.

## 3.2 Viskosität

### 3.2.1 Vergleich verschiedener Funktionen für primäres Kriechen

Zur Beschreibung eines abklingenden Vorgangs werden häufig verwendet:

$$\text{Potenzansatz} \quad y = a \left( \frac{x}{x_0} \right)^b + c$$

$$\text{oder} \quad y = a x^b + c, \quad (3.9)$$

$$\text{Exponentialansatz} \quad y = a e^{bx} + c, \quad (3.10)$$

$$\text{Areasinusansatz} \quad y = a \operatorname{arsinh}(bx) + c. \quad (3.11)$$

Wenn man die Gleichungen (3.9) und (3.10) umformt, erhält man:

$$\ln(y - c) = b \ln x + \ln a - b \ln x_0 \quad \text{bzw.} \quad \ln(y - c) = b \ln x + \ln a.$$

Für  $bx \gg 1$  kann man Gleichung (3.11) näherungsweise ersetzen durch:

$$y = a \ln(2 bx) + c.$$

So wird deutlich, daß diese Ansätze der üblichen Auswertung von Versuchsergebnissen mit halb- oder doppellogarithmischen Auftragung entsprechen. Im allgemeinen wird zur Parameterbestimmung eine Regressionsgerade durch die Meßpunkte gelegt, ohne zu beachten, daß das Kriterium des Fehlerquadratminimums bei der verzerrten Auftragung nicht identisch ist mit der Anwendung dieses Kriteriums bei natürlicher Auftragung, so daß die gute Übereinstimmung zwischen Meßwerten und Ansatzfunktion nur ein Effekt der Darstellung sein kann. Dies gilt insbesondere bei der doppellogarithmischen Auswertung für den Potenzansatz. Deshalb wird — von der natürlichen Darstellung der Funktionen in der Form der Gleichungen (3.9) bis (3.11) ausgehend — die Suche des Fehlerquadratminimums als eine Optimierungsaufgabe angesehen. Für den Fall von maximal drei unabhängigen Parametern wird ein spezieller Algorithmus entwickelt und programmiert.

Ist  $E$  die Summe der Fehlerquadrate und sind die  $v_i$  die Meßwerte bei den entsprechenden  $x_i$  ergibt sich die Forderung

$$E = \sum_{i=1}^n [v_i - a f(bx_i) - c]^2 = \text{Minimum}. \quad (3.12)$$

Daraus ergeben sich durch Ableitung nach den Parametern die drei Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^n [v_i - a f(bx_i) - c] f(bx_i) = 0, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^n [v_i - a f(bx_i) - c] \frac{\partial f(bx_i)}{\partial b} = 0, \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^n [v_i - a f(bx_i) - c] = 0. \quad (3.15)$$

Ist der Parameter  $c = 0$ , ergibt sich die Lösung dadurch, daß man Gleichung (3.13) nach  $a$  aufgelöst,

$$a = \frac{\sum_1^n v_i f(bx_i)}{\sum_1^n [f(bx_i)]^2},$$

und in Gleichung (3.14) einsetzt. Die eindimensionale Nullstellensuche kann dann nach den bei BRONSTEIN/SEMENDJAJEW (1987), S. 744 f. beschriebenen Verfahren — Sekanten-Verfahren (Regula/Falsi) und NEWTON-Verfahren — durchgeführt werden.

Dieses Vorgehen kann man auch bei  $c \neq 0$  anwenden, indem man das Problem durch  $\bar{v}_i = v_i - c$  auf die oben beschriebene Aufgabe zurückführt. D. h.  $c$  wird als bekannt vorausgesetzt und durch Variation von  $c$  werden Werte in der Nähe des Fehlerquadratminimums gesucht. Die sich aus dieser Variation ergebenden Werte werden dann als Startwerte für das NEWTON/RAPHSON Verfahren (BRONSTEIN/SEMENDJAJEW 1987, S. 747<sup>1</sup>) oder die u. a. bei BATHE (1986), S. 539 ff, und RAMM (1988) beschriebenen Quasi-NEWTON-Verfahren von BFGS (BROYDEN/FLETSCHER/GOLDFARB/SHANNO) bzw. BROYDEN zur mehrdimensionalen Nullstellensuche verwendet. Der Ablauf der Berechnung erfolgt nach dem in Bild 3.6 dargestellten Schema.

<sup>1</sup> Bei BRONSTEIN/SEMENDJAJEW (1987) wird die Bezeichnung NEWTON/KANTOROWITSCH-Verfahren verwendet

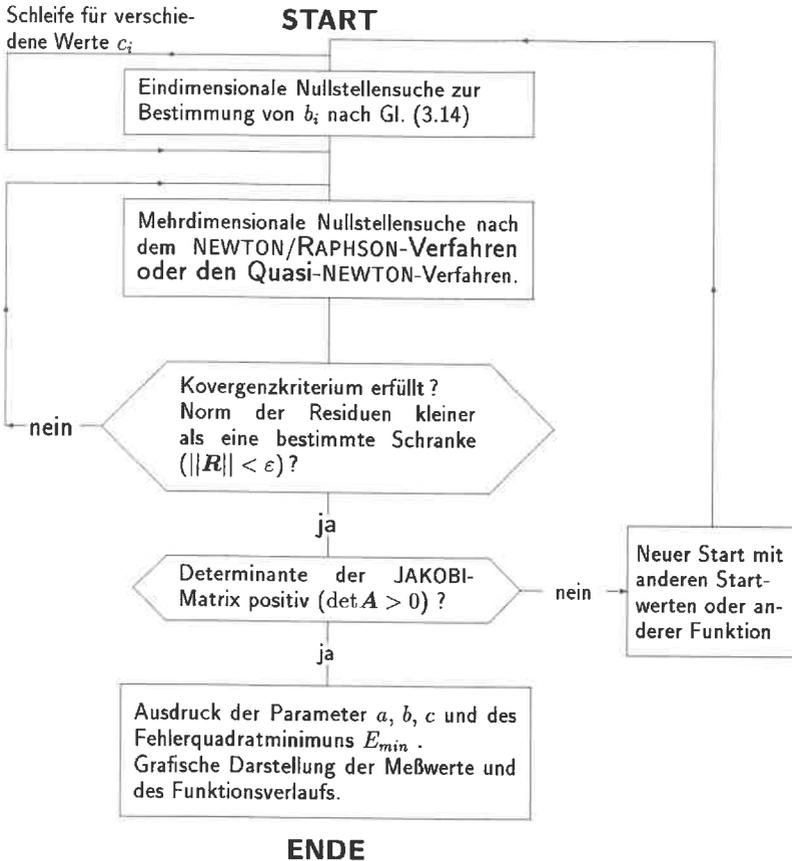
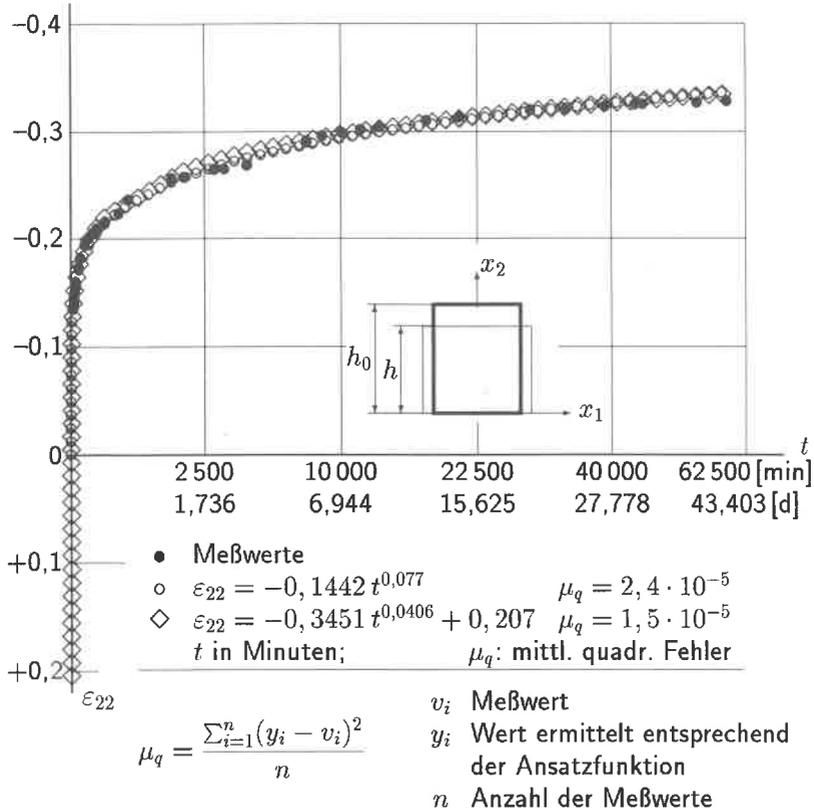


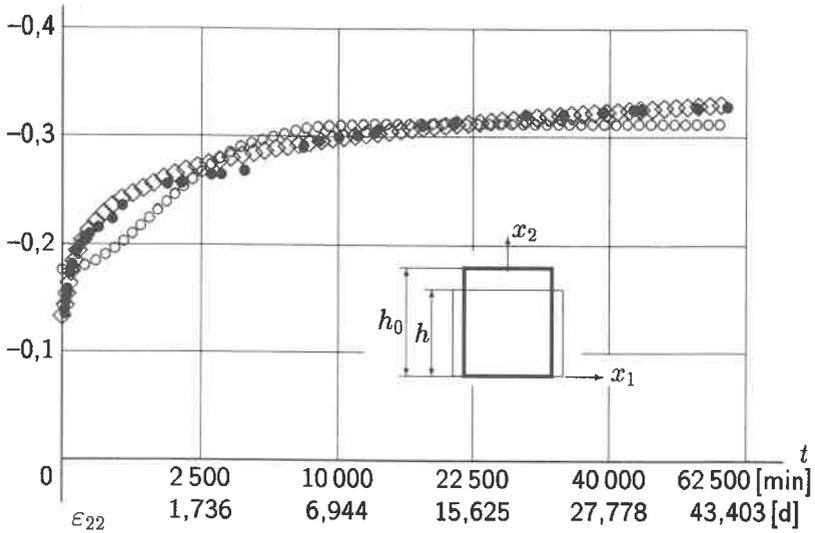
Bild 3.6: Programmablauf zur Parameterbestimmung

In der Anwendung für die Auswertung der Kriechversuche haben sich das NEWTON/RAPHSON-Verfahren und die Methode von BFGS bewährt. Da die Anzahl der benötigten Iterationen bei den verschiedenen Verfahren etwa gleich ist, ergibt sich ein Vorteil der Quasi-NEWTON-Methode aufgrund des geringeren Rechenzeitbedarfs. Wichtig ist in beiden Fällen, daß durch eine ausreichende Rastervariation ein in einer Mulde liegender Startwert gewählt wird. Der bewährte Potenzansatz ohne Absolutglied wurde auch durch die Auswertung des Kriechversuchs mit Kork bestätigt. Wählt man einen Potenzansatz mit Absolutglied, ergibt sich das Fehlerquadratminimum bei

einem negativen Absolutglied, ist also physikalisch unsinnig (Bild 3.7). Der geringe Unterschied beim mittleren quadratischen Fehler zwischen  $c = 0$  und  $c = 0,207$  ist ein Indiz dafür, daß man beim Potenzansatz nur zwei Parameter benötigt. Beim Exponential- und Areasinusansatz ergibt sich i. a. nur mit drei Parametern eine brauchbare Approximation der Meßwerte (Bild 3.8).



**Bild 3.7:** Potenzansatz — mit und ohne Absolutglied — zur Approximation des Kriechverlaufs



- Meßwerte

- ◇  $\varepsilon_{22} = 0,0181 \operatorname{arsinh}(0,4507 t) + 0,13$   $\mu_q = 2,4 \cdot 10^{-5}$
  - $\varepsilon_{22} = -0,1358 \exp(-0,000446 t) + 0,3114$   $\mu_q = 3,9 \cdot 10^{-4}$
- $t$  in Minuten;  $\mu_q$ : mittl. quadr. Fehler

**Bild 3.8:** Approximation eines Kriechversuchs durch  $y = a \operatorname{arsinh}(bt) + c$   
und  $y = a \exp(bt) + c$

### 3.2.2 Modifiziertes Voigt-Modell

Ein häufig verwendetes Argument für die Verwendung von Kriechansätzen ist, daß man mit den klassischen rheologischen Modellen das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten von Boden und Fels nur unzureichend beschreiben könne. Deshalb gibt es zahlreiche Vorschläge für Kriechgesetze, insbesondere für gefrorene Böden (KLEIN 1978, ORTH 1988), weiche bindige Erdstoffe (LEINENKUGEL 1975) und Salz (HEUSERMANN 1982, LANGER 1978). Diese Kriechgleichungen haben den Vorteil, daß in einfacher mathematischer Form das Materialverhalten beschrieben wird (siehe Abschnitt 3.2.1). Auch wenn — von den Ergebnissen her — häufig diese Kriechansätze erfolgreich bei numerischen Analysen verwendet werden, ist im Hinblick auf die Analyse allgemeiner Rand- und Anfangswertprobleme ein theoretisch schlüssiges Konzept, wie das der rheologischen Modelle, zu bevorzugen. Zu den Nachteilen der finiten Gesetze siehe auch RECKLING (1967), S. 220f.

Beispielhaft wird nun am VOIGT-Modell für den eindimensionalen Fall gezeigt, daß man die Anpassungsfähigkeit dieses rheologischen Modells an Versuchsergebnisse wesentlich verbessern kann, indem der HOOKEsche Körper durch einen hypoelastischen Körper ersetzt wird. Es werden drei verschiedene Ansätze untersucht, die zu nichtlinearen Differentialgleichungen führen. Die Differentialgleichungen werden zur anschaulichen Darstellung des Kriechverlaufs (Bilder 3.9 bis 3.11) für den Kriechversuch ( $\sigma = const$ ) nach dem verbesserten Polygonzugverfahren BRONSTEIN/SEMENDJAJEW (1987), S. 770, gelöst.

**Dehnungsansatz für den hypoelastischen Körper:** Der „Elastizitätsmodul“ falle mit zunehmender Dehnung linear ab.

$$E = \begin{cases} \bar{E} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}}\right) & \text{für } \varepsilon < \varepsilon_{gr} \\ 0 & \text{für } \varepsilon \geq \varepsilon_{gr} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\eta \dot{\varepsilon} = \begin{cases} \sigma - \bar{E} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}}\right) \varepsilon & \text{für } \varepsilon < \varepsilon_{gr} \\ \sigma & \text{für } \varepsilon \geq \varepsilon_{gr} \end{cases} \quad (3.17)$$

Normiert man die Zeit durch  $\kappa = \bar{E}t/\eta$ , folgt:

$$\frac{\partial \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}}}{\partial \kappa} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}}\right)^2 = \frac{\sigma}{\bar{E} \varepsilon_{gr}} \quad (3.18)$$

Für den Kriechversuch,  $\sigma = \text{const}$ , kann man man eine kritische Last  $\sigma_c$  berechnen, bei der sich kein Versagenszustand einstellt. D. h.  $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ , wenn  $t \rightarrow \infty$ .

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}} + \frac{\sigma_c}{\bar{E}\varepsilon_{gr}} = 0.$$

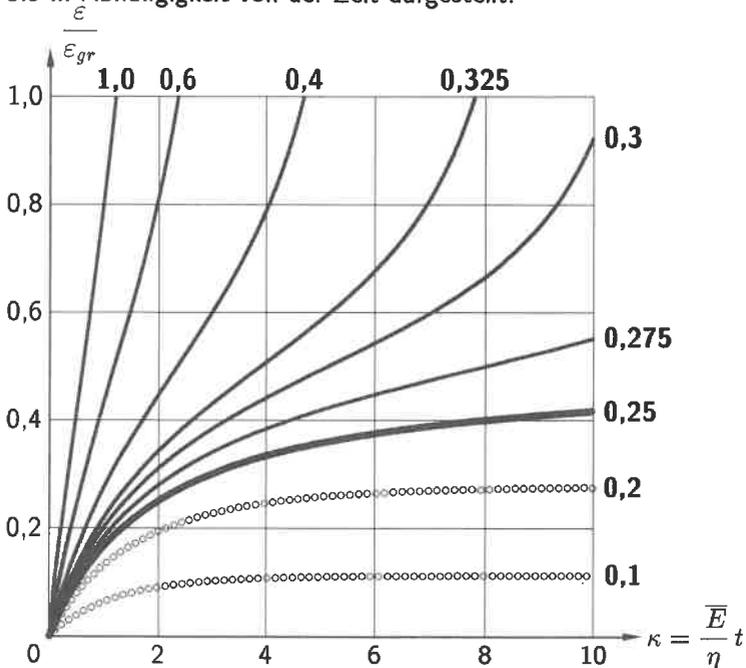
Diese quadratische Gleichung hat nur reelle Lösungen, wenn  $1 - 4\sigma_c/(\bar{E}\varepsilon_{gr}) \geq 0$ . D. h. solange  $\sigma_c \leq \bar{E}\varepsilon_{gr}/4$ . Für die Langzeitfestigkeit gilt also

$$\beta = \frac{\bar{E}\varepsilon_{gr}}{4}. \quad (3.19)$$

Für  $\sigma_c \leq \beta$  wird die Dehnung für  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_{gr}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma_c}{\bar{E}\varepsilon_{gr}}} \right). \quad (3.20)$$

Die Dehnungen bei verschiedenen zeitlich konstanten Belastungen sind in Bild 3.9 in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.



**Bild 3.9:** Kriechkurven eines dehnungsabhängigen, nichtlinearen, viskoelastischen Körpers für verschiedene Werte von  $\sigma_c/(\bar{E}\varepsilon_{gr})$

**Linearer Spannungsansatz für den hypoelastischen Körper:**

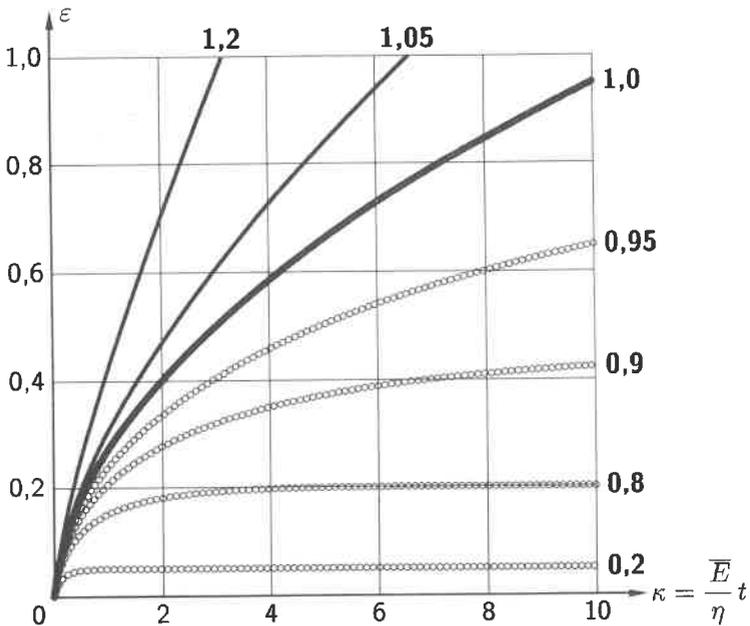
$$E = \bar{E} \left( 1 - \frac{\sigma_{Hooke}}{\beta} \right) \rightarrow E = \bar{E} \left( 1 - \frac{\sigma - \eta \dot{\varepsilon}}{\beta} \right), \quad (3.21)$$

$$\frac{\eta}{\bar{E}} \dot{\varepsilon} + \varepsilon \left( 1 - \frac{\sigma}{\beta} \right) + \frac{\eta}{\beta} \dot{\varepsilon} \varepsilon = \frac{\sigma}{\bar{E}}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} \left( 1 + \frac{\bar{E}}{\beta} \varepsilon \right) + \varepsilon \left( 1 - \frac{\sigma}{\beta} \right) = \frac{\sigma}{\bar{E}}. \quad (3.23)$$

Da  $\varepsilon$  und  $\sigma$  gleiches Vorzeichen haben müssen, hat die Gleichung für  $\dot{\varepsilon} = 0$  nur eine Lösung wenn  $\sigma < \beta$ .  $\beta$  kann man als Langzeitfestigkeit bezeichnen, denn solange die Beanspruchung kleiner ist als  $\beta$ , bleiben die Dehnungen endlich, kommt es also zu keinem Versagen. Für den Kriechversuch,  $\sigma = \sigma_c$ , folgt für  $\sigma_c < \beta$ :

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma_c}{\bar{E}} \frac{\beta}{\beta - \sigma_c}. \quad (3.24)$$



**Bild 3.10:** Kriechkurven eines linear spannungsabhängigen, nichtlinearen, viskoelastischen Körpers für verschiedene Werte von  $\sigma_c/\beta$  bei  $\bar{E}/\beta = 20$

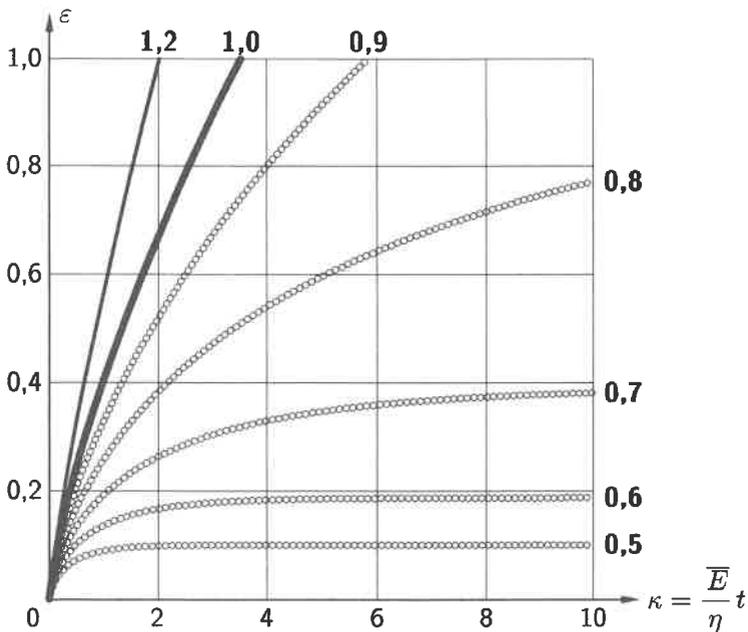
**Quadratischer spannungsabhängiger Ansatz für den hypoelastischen Körper:** Da man das Verhältnis  $\sigma_{Hooke}/\beta$  als „Schersbeanspruchung“ des hypoelastischen Körpers interpretieren kann, wird in Anlehnung an Gleichung (2.38) von DUNCAN/CHANG, die im Grundbau eine breite Anwendung gefunden hat, formuliert:

$$E = \bar{E} \left(1 - \frac{\sigma_{Hooke}}{\beta}\right)^2 \rightarrow E = \bar{E} \left(1 - \frac{\sigma - \eta \dot{\epsilon}}{\beta}\right)^2, \quad (3.25)$$

$$\frac{\eta}{\bar{E}} \dot{\epsilon} + \epsilon \left(1 - \frac{\sigma - \eta \dot{\epsilon}}{\beta}\right)^2 = \frac{\sigma}{\bar{E}}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa} + \epsilon \left(1 - \frac{\sigma}{\beta} + \frac{\bar{E}}{\beta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa}\right) = \frac{\sigma}{\bar{E}}. \quad (3.27)$$

Im Kriechversuch, für  $\sigma_c < \beta$ :  $\epsilon_\infty = \frac{\sigma_c}{\bar{E}} \left(\frac{\beta}{\beta - \sigma_c}\right). \quad (3.28)$



**Bild 3.11:** Kriechkurven bei einem quadratischen Spannungsansatz für den „HOOKEschen“ Teil eines nichtlinearen, viskoelastischen Körpers für verschiedene Werte von  $\sigma_c/\beta$  bei  $\bar{E}/\beta = 20$

### 3.2.3 Modifiziertes Zener-Modell für dreidimensionale Spannungszustände

Das in Abschnitt 2.1.3 für den eindimensionalen Fall beschriebene modifizierte ZENER-Modell wird nun auf allgemeine Spannungszustände erweitert. Im Hinblick auf die Implementierung in FEM-Programme wird in diesem Abschnitt durchweg die Matrixschreibweise verwendet. Wie aus Bild 3.12 ersichtlich, besteht das Modell in der Überlagerung eines elastoplastischen und eines viskoelastischen Körpers.

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{C}}^{elpl} + \underline{\underline{C}}^{visel}) \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$$

$$\underline{\underline{C}}^{elpl} = \underline{\underline{C}}^{el} - \frac{\underline{\underline{C}}^{el} \underline{\underline{n}}^g (\underline{\underline{n}}^f)^T \underline{\underline{C}}^{el}}{h + (\underline{\underline{n}}^f)^T \underline{\underline{C}}^{el} \underline{\underline{n}}^g}$$

$$\underline{\underline{C}}^{visel} = \underline{\underline{C}}^{el} - \underline{\underline{C}}^{el} (\underline{\underline{C}}^{vis})^{-1} \text{diag} \left( \frac{\sigma_{11}}{\dot{\epsilon}_{11}} \quad \frac{\sigma_{22}}{\dot{\epsilon}_{22}} \quad \frac{\sigma_{33}}{\dot{\epsilon}_{33}} \quad \frac{\sigma_{12}}{2 \dot{\epsilon}_{12}} \quad \frac{\sigma_{23}}{2 \dot{\epsilon}_{23}} \quad \frac{\sigma_{31}}{2 \dot{\epsilon}_{31}} \right)$$

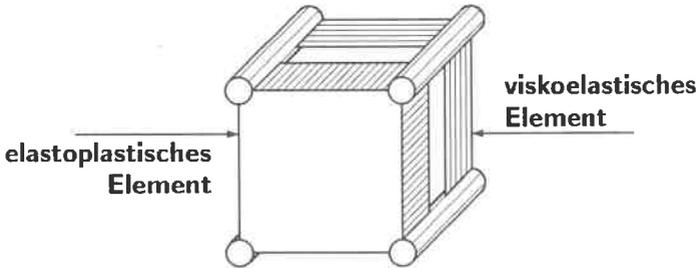


Bild 3.12: Parallelschaltung von elastoplastischem und viskoelastischem Körper

Diese Überlagerung kann im Rahmen der Methode der Finiten Elemente für eine modulare Programmstruktur genutzt werden. Das bei BREINLINGER (1989) dargestellte elastoplastische Modell kann vollkommen beibehalten werden und muß nur durch einen viskoelastischen Teil ergänzt werden. In der Terminologie der rheologischen Modelle: dem modifizierten PRANDTL-Körper wird ein MAXWELL-Körper parallel geschaltet. Das bedeutet, daß sich das Material im elastischen und plastischen Bereich viskos verhält. Auf die Möglichkeit, die Viskosität nichtlinear zu formulieren wird bewußt verzichtet, da die Parameterbestimmung bei der Kombination eines nichtlinearen elastoplastischen und eines nichtlinearen viskoelastischen

Mediums fast unmöglich sein dürfte. Da bei Fels oder Boden, dessen Konsistenz im Sinne von DIN 18122, Teil 1, *steif* oder *fest* ist, die elastoplastischen Eigenschaften dominieren, ist es angebracht, für diese Materialien einen möglichst einfachen Ansatz für die Zähigkeit zu machen. Bei Böden, die eine Konsistenz im Bereich von *breiig* und *flüssig* haben, kann es zweckmäßig sein, sie als nicht-NEWTONSche Flüssigkeit zu beschreiben.

**Viskoelastische Materialgleichung:** Im eindimensionalen Fall lautet die Gleichung der MAXWELLSchen Flüssigkeit:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{oder} \quad \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} - \frac{E}{\eta} \sigma \quad (3.29)$$

Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall ergibt:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = C^{el} \dot{\epsilon} - C^{el} \underbrace{(C^{vis})^{-1}}_{\dot{\epsilon}^{vis}} \sigma \quad (3.30)$$

Dabei ist  $C^{vis}$  die konstitutive Matrix der NEWTONSchen Flüssigkeit und  $\overset{\nabla}{\sigma}$  die Spannungsgeschwindigkeit nach GREEN/NAGHDI. Es wird eine Matrix  $A$  eingeführt, so daß gilt:

$$\dot{\epsilon}^{vis} = A \dot{\epsilon} \quad (3.31)$$

Aufgrund von Gleichung (3.30) lautet die Gleichung für  $A$ :

$$A = (C^{vis})^{-1} \text{diag} \left( \frac{\sigma_{11}}{\dot{\epsilon}_{11}} \quad \frac{\sigma_{22}}{\dot{\epsilon}_{22}} \quad \frac{\sigma_{33}}{\dot{\epsilon}_{33}} \quad \frac{\sigma_{12}}{2\dot{\epsilon}_{12}} \quad \frac{\sigma_{23}}{2\dot{\epsilon}_{23}} \quad \frac{\sigma_{31}}{2\dot{\epsilon}_{31}} \right) \quad (3.32)$$

Gleichung (3.32) in (3.30) eingesetzt ergibt:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = C^{el} \dot{\epsilon} - C^{el} \left[ (C^{vis})^{-1} \text{diag} \left( \frac{\sigma_{11}}{\dot{\epsilon}_{11}} \quad \frac{\sigma_{22}}{\dot{\epsilon}_{22}} \quad \frac{\sigma_{33}}{\dot{\epsilon}_{33}} \quad \frac{\sigma_{12}}{2\dot{\epsilon}_{12}} \quad \frac{\sigma_{23}}{2\dot{\epsilon}_{23}} \quad \frac{\sigma_{31}}{2\dot{\epsilon}_{31}} \right) \right] \dot{\epsilon} \quad (3.33)$$

Analog zur tangentialen elastoplastischen Matrix erhält man die Gleichung für die tangentielle viskoelastische Matrix:

$$C^{visel} = C^{el} - C^{el} (C^{vis})^{-1} \text{diag} \left( \frac{\sigma_{11}}{\dot{\epsilon}_{11}} \quad \frac{\sigma_{22}}{\dot{\epsilon}_{22}} \quad \frac{\sigma_{33}}{\dot{\epsilon}_{33}} \quad \frac{\sigma_{12}}{2\dot{\epsilon}_{12}} \quad \frac{\sigma_{23}}{2\dot{\epsilon}_{23}} \quad \frac{\sigma_{31}}{2\dot{\epsilon}_{31}} \right) \quad (3.34)$$

Bei Isotropie wird die Viskositätsmatrix (NEWTONSche Matrix) bzw. der konstitutive Tensor der zähen Flüssigkeit durch zwei Konstante definiert (zur Definition der Moduli siehe Abschnitt 2.3). Während in der Hydromechanik allgemein die Annahme der Inkompressibilität gerechtfertigt ist,

haben Böden eine endliche volumetrische Viskosität. In der bodenmechanischen Literatur wird häufig nicht direkt die Größe der volumetrischen Viskosität angegeben. So verwendet GUSSMANN (1979b), S. 149, bei der eindimensionalen Konsolidation die Viskositätskonstante  $\eta$  analog zum Steifemodul, rechnet also mit einer oedometrischen Viskosität. GUDEHUS (1980), S. 140, trifft die Annahme  $\nu^{vis} = 0$ , rechnet also mit einer volumetrischen Viskosität  $K^{vis} = \frac{2}{3}\mu$ . Die Umrechnung zwischen den Viskositätskonstanten und die Bildung der Inversen der Viskositätsmatrix erfolgt nach demselben Schema wie beim HOOKEschen Gesetz und ist im Anhang, S. 142, dargestellt. Zwar kann man auch, analog zur Elastizitätstheorie, mit einer anisotropen Zähigkeit rechnen (z. B. REINER 1951), doch ist es bei Böden schwierig genug, zwei Parameter zu bestimmen. In den meisten Fällen ist die Annahme  $\nu^{vis} = 0$  ausreichend.

# Kapitel 4

## Versuche

Die Scherfestigkeit von Erdstoffen wird meist im Triaxialgerät ermittelt, wobei im allgemeinen die Spannung in der Achsrichtung der zylindrischen Probe bis zum Versagen gesteigert wird. Der Versuch ist in DIN 18137 genormt und wie der Kastenscherversuch in vielen Lehr- und Handbüchern des Grundbaus ausführlich dargestellt. Da die Probe axial durch Druck beansprucht wird und seitlich nicht gehalten ist, ergibt sich der Grenzzustand, je nach Bodenart, durch Abscheren oder plastisches Knicken. Um den Einfluß der Geometrie weitgehend unabhängig vom Einfluß der materiellen Instabilität zu untersuchen, wird in Abschnitt 4.1 der Druckversuch mit Proben aus viskoelastischem Material experimentell und numerisch analysiert.

Der „Geometrieanteil“ beim Versagen einer Boden- oder Felsprobe läßt sich auch im Triaxialgerät verringern, wenn man das in DIN 18137 empfohlene Verhältnis Höhe/Durchmesser reduziert, jedoch wird dann der unerwünschte Effekt der Endflächenreibung größer. Insbesondere im Hinblick auf die Quantifizierung der bei Fels und dichtem Sand sehr ausgeprägten Entfestigung ist es wünschenswert, das Nachbeulverhalten der Proben im Zylinderdruck- oder Triaxialversuch, wie es u. a. von READ/HEGEMIER (1984) beschrieben wird, versuchsstechnisch zu eliminieren. Dazu eignen sich Versuchseinrichtungen wie Biaxialgerät, „Wahres Triaxialgerät“ und Einfachschergerät, über die man z. B. bei MATTHEWS (1988) eine vergleichende Darstellung findet. In Abschnitt 4.2 wird die Entwicklung und Anwendung eines Einfachschergeräts beschrieben, das sich dadurch von den üblichen Einfachschergeräten unterscheidet, daß es für die speziellen Erfordernisse gebaut ist, wie sie sich bei Erdstoffen im Grenzbereich zwischen Locker- und Festgestein ergeben.

## 4.1 Stabilitätsprobleme in Druckversuchen

Die Stabilität in Druckversuchen wird an Proben aus einem Gummi-Kork Gemisch untersucht, da durch Verwendung dieses Materials die Versuche einfach reproduziert und mit den Einrichtungen eines bodenmechanischen Labors durchgeführt werden können. Bei Proben aus Boden oder Fels hätte nur mit sehr hohem Aufwand die grundsätzliche Bedeutung des Knickens aufgezeigt werden können, da die Materialeigenschaften von Probe zu Probe stark streuen und zudem die Proben im Vergleich zu Versuchsproben aus Kork oder Kunststoff ausgeprägt inhomogen sind.

Zur Ermittlung des Kriechverhaltens der Kork-Gummi Mischung wurden spannungskonstante Kriechversuche bei verschiedenen Laststufen an Quadern (Querschnitt  $80/80\text{ mm}$ , Höhe  $100\text{ mm}$  bei Versuchsbeginn) durchgeführt. Die in den Bildern 4.1 und 4.2 dargestellten Versuchsergebnisse und der Vergleich mit einem Exponentialansatz, wie er dem ZENER-Körper entspricht, zeigen, daß das verwendete Material mit dem relativ einfachen Stoffgesetz brauchbar beschrieben werden kann.

Die Knickversuche wurden an Probekörpern mit einem Querschnitt von  $80/80\text{ mm}$  und einer Höhe von  $240\text{ mm}$  durchgeführt. Mit den gewählten Abmessungen entsprechen die Körper in etwa der in DIN 18137 (Teil 2, Abschnitt 5) für schlanke Proben empfohlenen Größe;  $100\text{ mm}$  Durchmesser und ein Verhältnis von Anfangshöhe zu Anfangsdurchmesser von 2,0 bis 2,5.

Aus dem Kriechversuch mit der Laststufe  $-1875\text{ kN/m}^2$  wurden die Materialparameter des ZENER-Modells bestimmt. Da die Versuchsdauer etwa 30 Minuten beträgt, wurde der Auswertung entsprechend Abschnitt 3.2.1 nur der Kriechverlauf in den ersten 30 Minuten des Versuchs zugrunde gelegt. Dabei ergaben sich die in Bild 4.3 zusammengestellten Kennwerte. In Bild 4.3 sind die Ergebnisse der Versuche dem Ergebnis der FE-Berechnung gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß die drei Versuche in der Kraft-Verschiebungslinie wesentlich besser übereinstimmen als in der Knicklast. In allen drei Versuchen trat das Ausknicken nicht plötzlich auf, sondern die Verschiebung  $v_1$  steigerte sich während eines Zeitraums von drei Minuten und konnte deshalb gut beobachtet werden.

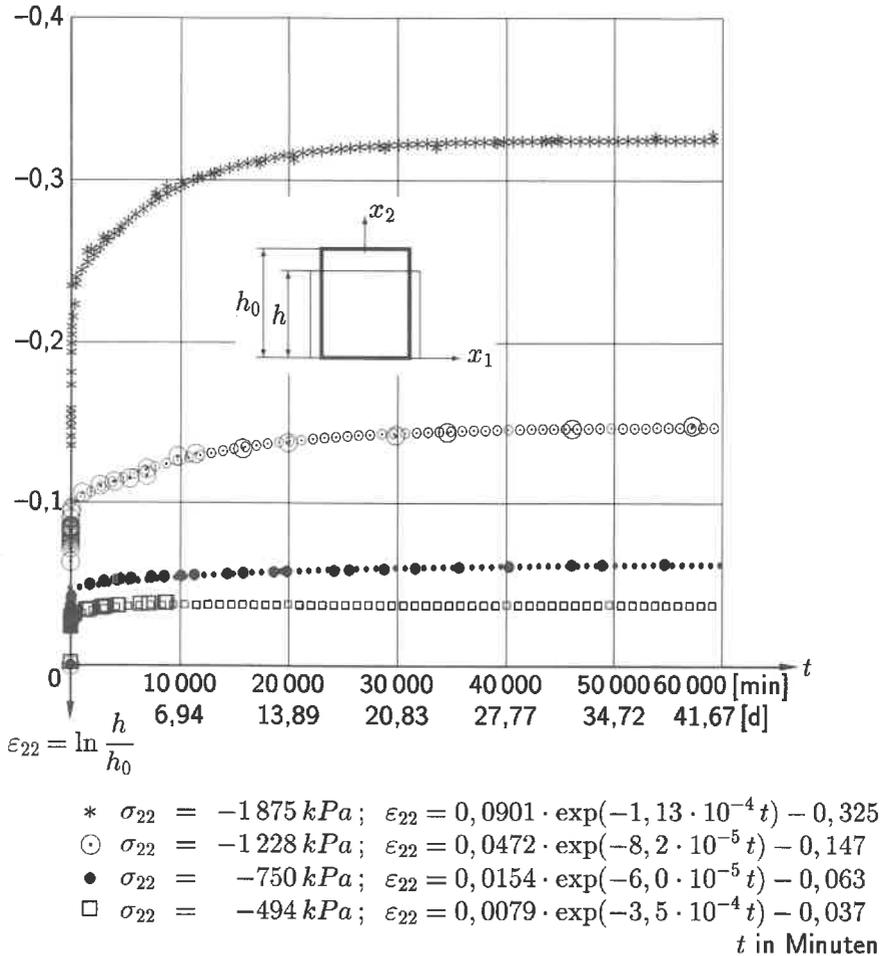


Bild 4.1: Kriechversuche bei verschiedenen Laststufen

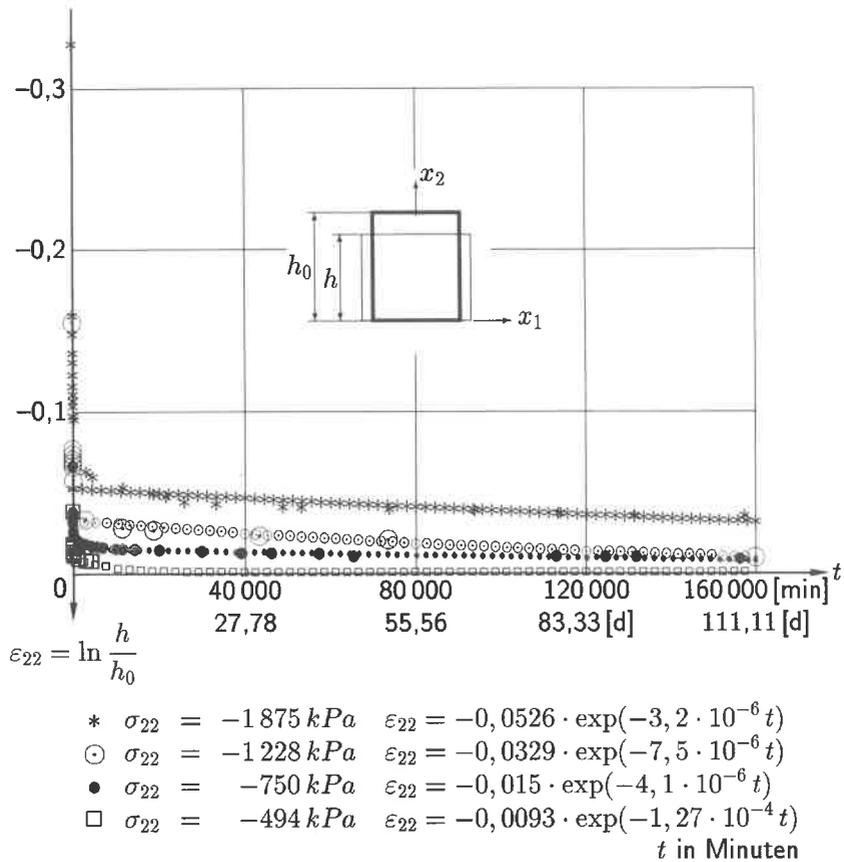


Bild 4.2: Entlastungsversuche

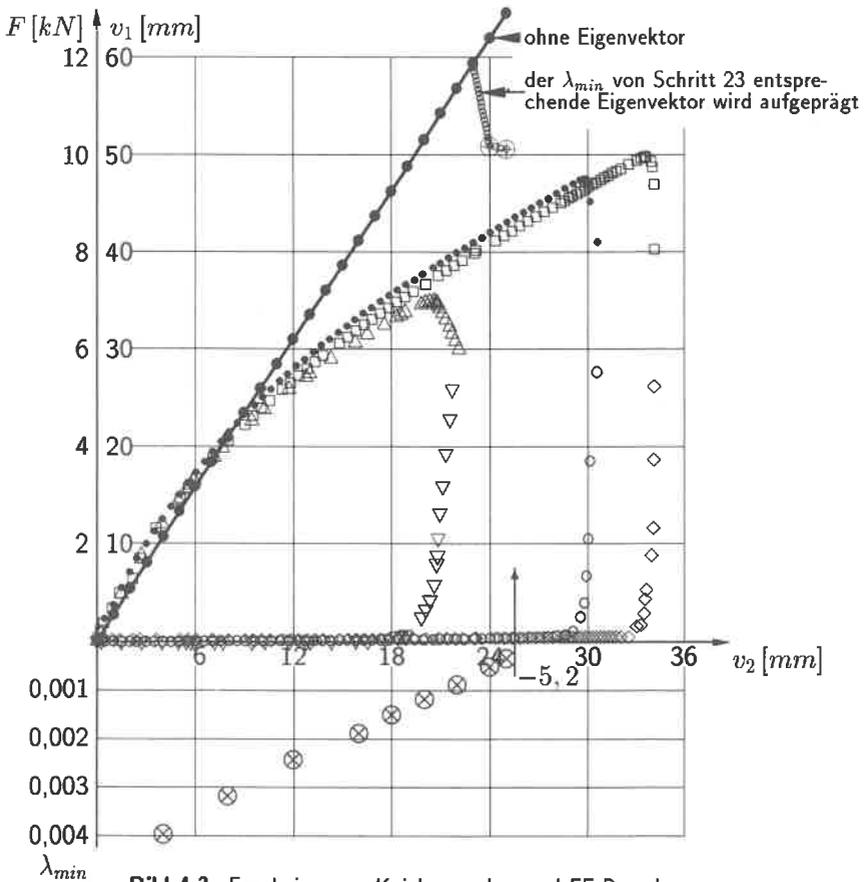
**FE-Berechnung mit „ZENER-Körper“**

$$E_{Hooke} = 17,53 \text{ MN/m}^2 \quad \nu_{Hooke} = \nu_{Maxw}^{el} = \nu_{Maxw}^{vis} = 0,30$$

$$E_{Maxw} = 3,85 \text{ MN/m}^2 \quad \eta_{Maxw} = 5540 \text{ MN s/m}^2$$

Vorschubgeschw.: 0,25 mm/min Inkremente in FE-Ber.: 1 Zeitschr.  $\hat{=}$  4 min

Versuche	Dichte $\rho$ des Materials	Vorschub- geschw.	Horizontal- versch. $v_1$	Vertikal- versch. $v_2$
1	0,854 g/cm <sup>3</sup>	0,50 mm/min	○	●
2	0,859 g/cm <sup>3</sup>	0,25 mm/min	◇	□
3	0,840 g/cm <sup>3</sup>	0,25 mm/min	▽	△



**Bild 4.3:** Ergebnisse von Knickversuchen und FE-Berechnung

In der FE-Analyse wurde das Materialverhalten des ZENER-Körpers mit dem in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Verfahren — Überlagerung elastischer und viskoelastischer Elemente — simuliert. Die Idealisierung erfolgte als ebenes Problem (ebener Spannungszustand) mit der in Bild 4.4 dargestellten Diskretisierung. Zur rechnerischen Ermittlung des Verzweigungspunkts wurde in der FE-Analyse in jedem Inkrement das allgemeine Eigenwertproblem

$$Kx = \lambda Mx \quad (4.1)$$

gelöst, wobei

$K$  tangentielle Steifigkeitsmatrix entsprechend

BREINLINGER (1989), Seiten 81 ff und 124,

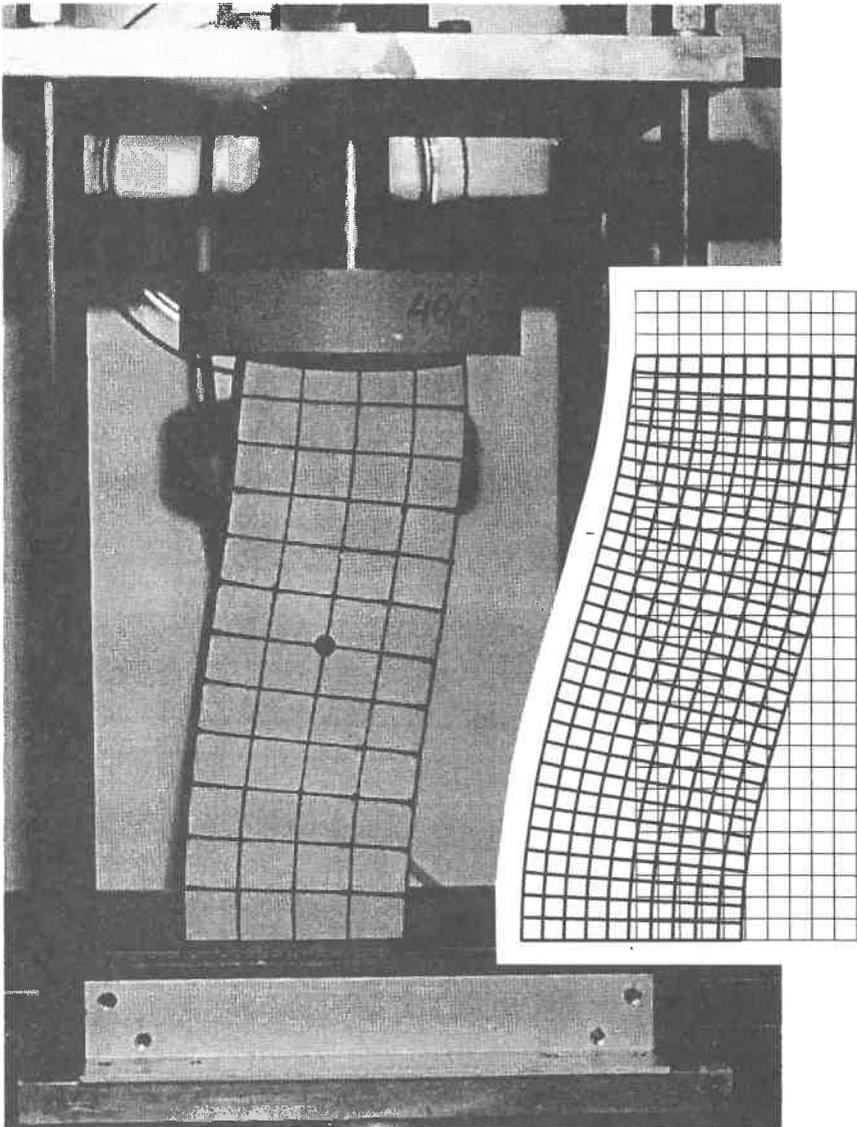
$M$  konzentrierte Massenmatrix (BATHE 1986, S. 180),

$x$  Eigenvektor mit dem Eigenwert  $\lambda$ .

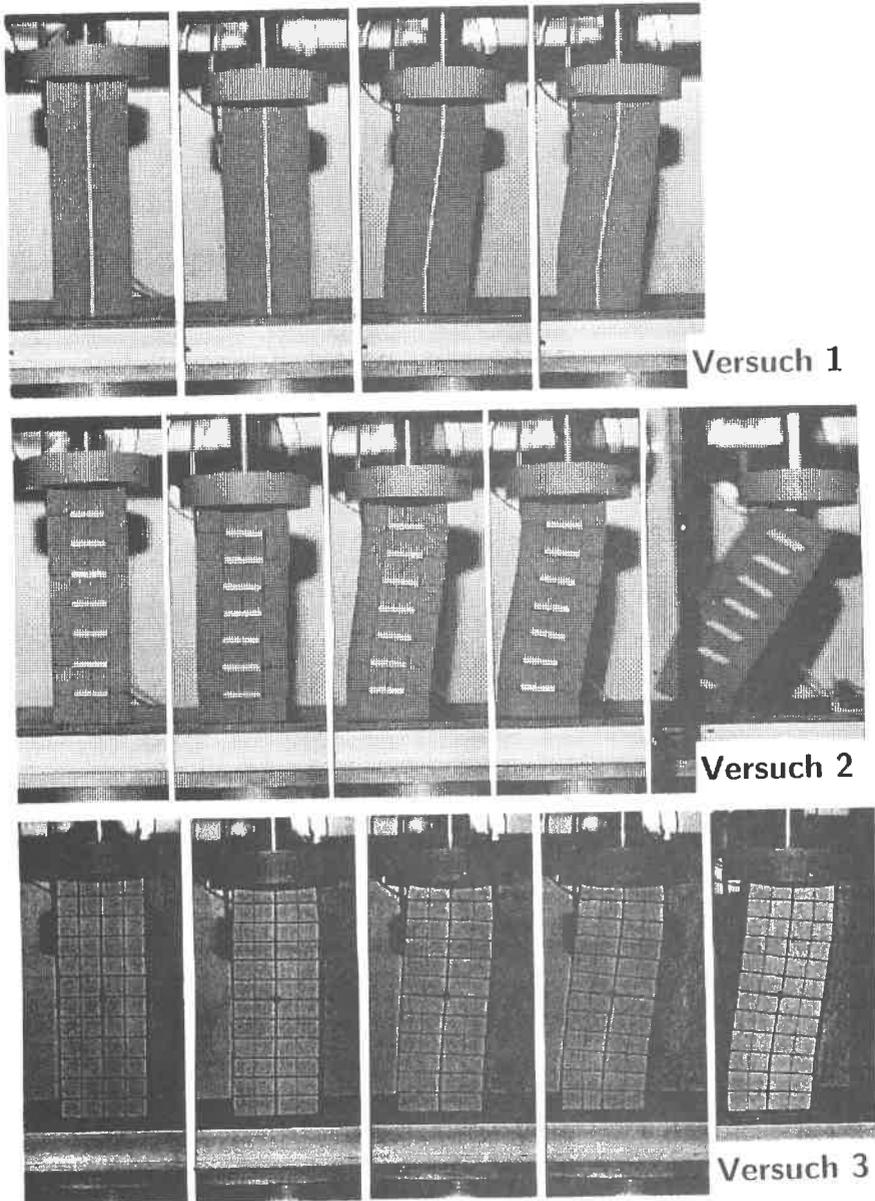
Mit diesem Verfahren kann man nicht direkt die „Verzweigungslast“ bestimmen, da man nur feststellen kann, in welchem Inkrement der kleinste Eigenwert noch positiv ist und in welchem er bereits negativ wird. Bei der gewählten Inkrementierung von 1 mm ist deshalb nur die Aussage möglich: Der Verzweigungspunkt liegt zwischen einer Verschiebung  $v_2$  von 25 mm und 26 mm.

Die Eigenwertanalyse wird programmtechnisch dadurch realisiert, daß entsprechend BATHE (1986), S. 629, das allgemeine Eigenwertproblem auf das spezielle Eigenwertproblem zurückgeführt wird. Wegen der Nichtsymmetrie der Steifigkeitsmatrizen, wie sie sich bei BREINLINGER ergeben, wurde das Eigenproblem mit dem HOUSEHOLDERSchen QR-Verfahren aus der EISPACK-Programmbibliothek (SMITH ET AL. 1976, Seite 28 ff) gelöst.

Das ausgeknickte FE-Netz von Bild 4.4 wurde dadurch berechnet, daß der skalierte Eigenvektor, der zum kleinsten Eigenwert von Verschiebungsincrement 23 gehört, dem Verschiebungszustand bei diesem Schritt aufgeprägt wurde. D. h. kurz vor Erreichen der kritischen Last wird dem Körper die entsprechende Knickfigur aufgezwungen. So wird es auch möglich, in beschränktem Umfang das Nachbeulverhalten zu untersuchen. Eine gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ergibt sich nur im ersten Drittel der Kraft-Verschiebungskurve. Mit zunehmender Verschiebung wird die Abweichung der gerechneten von den gemessenen Kurven immer größer, was zum einen an der vereinfachenden Annahmen des ZENER-Modell für das Materialverhalten liegt, zum andern aber auch durch die Vernachlässigung von geometrischen Imperfektionen bei der numerischen Analyse bedingt ist. Bezogen auf den Weg, bei dem die Verzweigungslast erreicht wird, liegt die Rechnung sehr gut, insbesondere wenn man sieht, daß die Versuchsergebnisse untereinander eine erhebliche Streuung aufweisen.



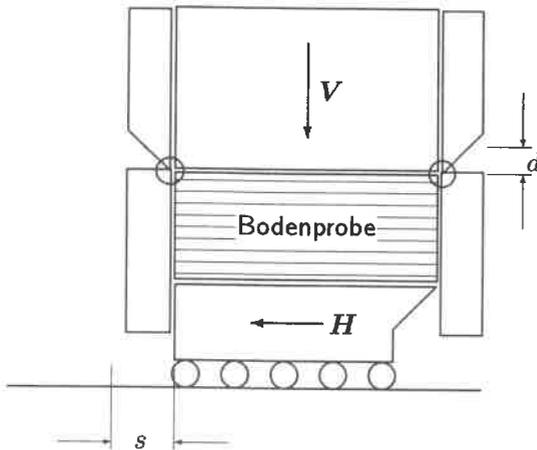
**Bild 4.4:** Knickfigur in Versuch und FE-Berechnung



**Bild 4.5:** Entwicklung des Knickens in den verschiedenen Versuchen

## 4.2 Entwicklung und Anwendung eines Schergeräts

Eine Trennung der Einflüsse von geometrischer und materieller Instabilität sowie eine Beanspruchung mit Drehung der Hauptspannungsachsen ist prinzipiell mit dem in Cambridge entwickelten Einzelschergerät möglich, das im angelsächsischen Sprachraum als „simple shear apparatus“ (SSA) bezeichnet wird. Die englische Bezeichnung wird auch häufig in deutschen Publikationen verwendet, z. B. SMOLTZYK (1987), S. 61, um deutlich zu machen, daß es kein einfaches Schergerät ist, sondern ein Gerät zur Durchführung von Versuchen mit *einfacher Scherung*. Der prinzipielle Aufbau eines solchen Geräts ist in Bild 4.6 dargestellt.



**Dilatanzwinkel:**  
Ist in einem Zeitintervall  $\Delta t$  die Verschiebung  $\Delta s$  und die Hebung  $\Delta d$  ergibt sich der Dilatanzwinkel

$$\tan \psi = \frac{\dot{d}}{\dot{s}} \approx \frac{\Delta d}{\Delta s}$$

**Bild 4.6:** Versuchsgerät für einfache Scherung (simple shear)

Im Gegensatz zu Biaxial- und Triaxialgeräten, wo keine Hauptachsenschere stattfindet, wird im Einzelschergerät die Versuchsprobe durch eine Schubdeformation beansprucht, die mit einer Hauptachsenschere verbunden ist. Der Schervorgang ist nicht notwendigerweise volumentreu, wie bei der Beanspruchung durch *einfachen Schub* im Sinne von REINER (1969), S. 20, oder REINER (1958), S. 437, wo ausdrücklich für die „simple-shear“-Deformation Volumenkonstanz gefordert wird.

### 4.2.1 Konstruktion eines Einfachschergeräts

Da das in Cambridge entwickelte Einfachschergerät für Sand und weiche bindige Böden geeignet ist, die Untersuchungen aber mit regional anstehenden Böden durchzuführen waren, wurde ein Schergerät für kubische Proben (Grundfläche  $60/60\text{ cm}$ , Höhe  $50\text{ cm}$ ) entwickelt und gebaut. Die Probengröße ergab sich u. a. aus den bei SCHULZ/SMOLTZYK (1978), S. 276 ff, dargelegten Problemen bei der Ermittlung der Festigkeit teilweise verwitterter Tonsteine:

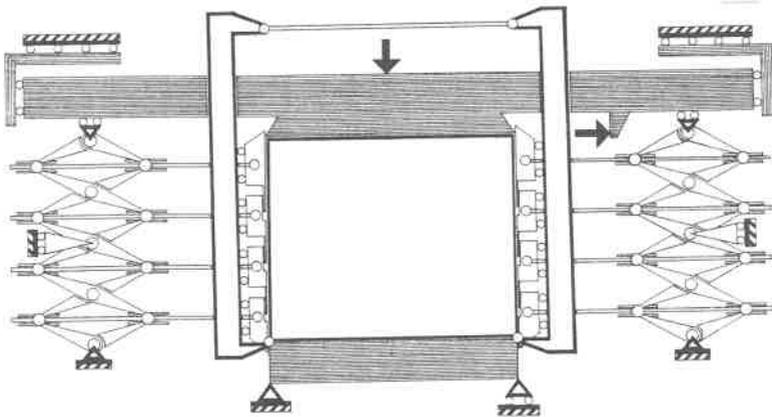
- In überkonsolidierten Tonen treten Bereiche mit unterschiedlichen Verwitterungsstufen räumlich unmittelbar nebeneinander auf und haben ein unregelmäßiges Trennflächengefüge.
- Die mechanischen Störungen bei der Probengewinnung können bei Stutzenproben ganz erheblich sein. Die an solchen Proben ermittelten Festigkeiten können etwa bei  $2/3$  der Festigkeiten von Blockproben liegen. Andererseits erhält man aus kleinen Proben häufig die Festigkeiten intakter Bereiche ohne Schwächezone. D. h. der Einfluß von Diskontinuitäten bleibt unberücksichtigt, so daß die an Stutzenproben ermittelten Festigkeiten nur bedingt ein Maßstab für den zu untersuchenden Baugrund, das Gebirge, sind.

Ähnliche Überlegungen haben WICHTER (1980), S. 16 ff, zu der Entwicklung einer Technik zur Untersuchung von Großproben ( $60\text{ cm}$  Durchmesser,  $120\text{ cm}$  Länge) veranlaßt. Die Probengröße ergibt sich nach NATAU ET. AL. (1984) aus dem Mindestverhältnis von kleinster Probenkörperabmessung zu Trennflächenabstand, das im Bereich von  $5 - 10$  liegen soll. Da die Untersuchung großer zylindrischer Bodenproben in Triaxialversuchen in der Empfehlung Nr. 3, des DGEG Arbeitskreises *Versuchstechnik Fels* beschrieben wird, kann dieser Versuch als Stand der Technik angesehen werden. So lag es nahe, die  $60\text{ cm}$  als Grundmaß für den Probenkörper zu wählen.

Bei großen Schubverformungen ergibt sich das Problem, daß sich die seitlich angebrachten drehbaren Platten (Bild 4.6) mit der Probe mitdehnen müssen, wenn die Deformation homogen bleiben soll. In dem Einfachschergerät aus Cambridge behilft man sich damit, daß die Probenhöhe klein ist im Vergleich zur Probenlänge ( $l/h \simeq 5$ ) und man, über die Länge betrachtet, in drei Bereichen Schub- und Normalspannungen mit sogenannten Dreikomponentenaufnehmern mißt und nur die Ergebnisse im mittleren Bereich der Auswertung zugrunde legt. Diese Methode ist bei ungestörten Großproben aus folgenden Gründen nicht zweckäßig:

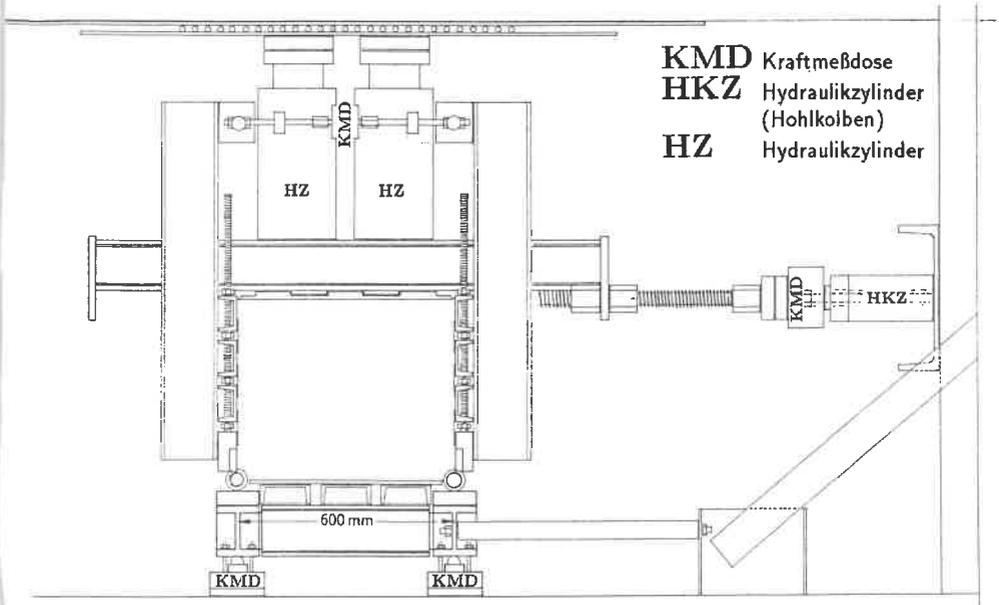
- Wenn die Probenhöhe ein Mehrfaches des Trennflächenabstandes betragen soll und gleichzeitig die Probenlänge etwa das Fünffache der Höhe, ergeben sich für den Versuchskörper Abmessungen, die nicht, oder nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand, ungestört entnommen werden können.
- Die Meßtechnik mit den Dreikomponentenaufnehmern ist sehr empfindlich und aufwendig im Vergleich zur Anwendung konventioneller Kraftmeßdosen.

So ergab sich als Lösung zur Verringerung der Störungen zwischen den seitlichen Platten und dem Versuchskörper die Aufteilung der Platten in Lamellen. Zur Begrenzung des konstruktiven Aufwands wurde die Aufteilung in vier Lamellen gewählt. Die Kinematik, die der Konstruktion zugrunde liegt, ist in Bild 4.7 dargestellt, die technische Realisierung in Bild 4.8. Die Anpassung der Lage der Lamellen an die Probendehnungen wird über Gewindestangen und Muttern erreicht, da durch Drehen der Muttern die Lage der Lamellen geregelt werden kann. Zur Herstellung des vollen Verbundes zwischen den Stahlplatten und der Bodenprobe wurden die Proben eingeklebt, wozu zwei verschiedene Kleber verwendet wurden: ein Kunstharzkleber für den Verbund mit dem Stahl und ein Universal-Baukleber für den Verbund zwischen Kunstharz und Boden. Die Verbundwirkung der Kleberschichten wurde im Kastenschерgerät getestet und hat sich in allen Versuchen bewährt.

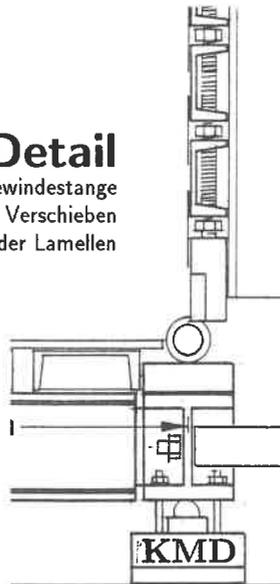


**Bild 4.7:** Kinematik des entwickelten Einfeldschersgeräts

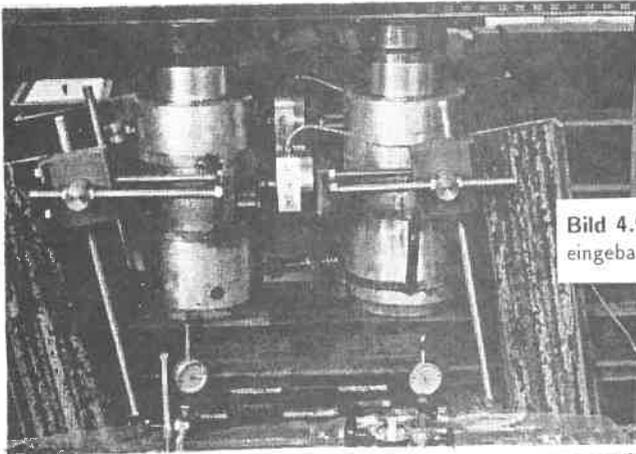
Die Versuche wurden alle mit konstanter Vertikalspannung  $\sigma_{22}$ , die durch die beiden Hydraulikzylinder (HZ in Bild 4.8) aufgebracht wurde, gefahren. Die Vertikalkräfte wurden über die Kraftmeßdosen KMD an der Basis des Geräts kontrolliert. In den Versuchen 1 und 2 wurde durch Anziehen der Mutter an der Spindel die Scherbeanspruchung aufgebracht; in den Versuchen 3 und 4 über den Hohlkolben-Hydraulikzylinder (HKZ in Bild 4.8). Gemessen wurde die Horizontalverschiebung des Querträgers zwischen den vertikalen Hydraulikzylindern HZ und der Bodenprobe, aus der dann der Schubwinkel  $\gamma$  berechnet wurde. Zur Ermittlung der Horizontalspannung in der Bodenprobe wurde die Kraft in der Zugstange, die die beiden vertikalen Träger verbindet, mit zwei Kraftmeßdosen gemessen. Die Vertikalverschiebungen der die Probe abdeckenden Platte wurden an den vier Eckpunkten mit Meßuhren registriert. Kleine Schiefstellungen wurden dadurch korrigiert, daß in einem vertikalen Hydraulikzylinder der Druck reduziert und im anderen erhöht wurde, so daß die Vertikalbelastung insgesamt konstant blieb. Da gerätebedingt keine Horizontaldehnungen der Probe auftreten können, sind die aus den Vertikalverschiebungen errechneten Vertikaldehnungen gleich den volumetrischen Dehnungen. Da die Schubdeformation sehr langsam aufgebracht wurde (mittlere Schubverzerrungsgeschwindigkeit etwa 0,0001/min) und der Sättigungsgrad der Proben ca. 70 % betrug, kann angenommen werden, daß es sich um dränierte Versuche handelt, also keine nennenswerten Porenwasserdrücke auftreten. Einen Eindruck von der Versuchseinrichtung, dem Probeneinbau und der Sicherung der Proben für den Transport sollen die Bilder 4.9 bis 4.11 vermitteln.



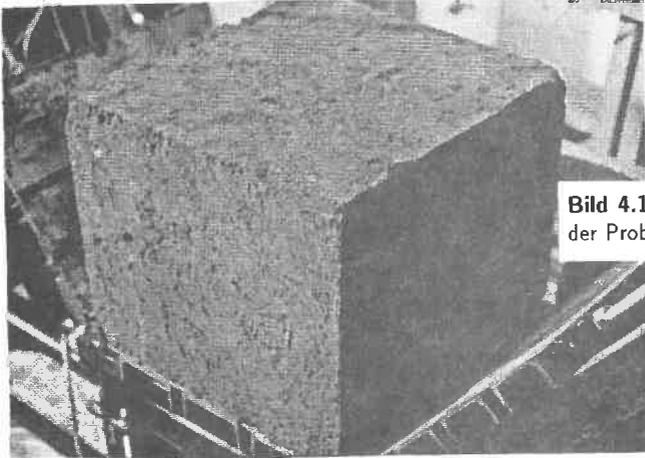
**Detail**  
 Gelenk mit Gewindestange  
 und Muttern zum Verschieben  
 der Lamellen



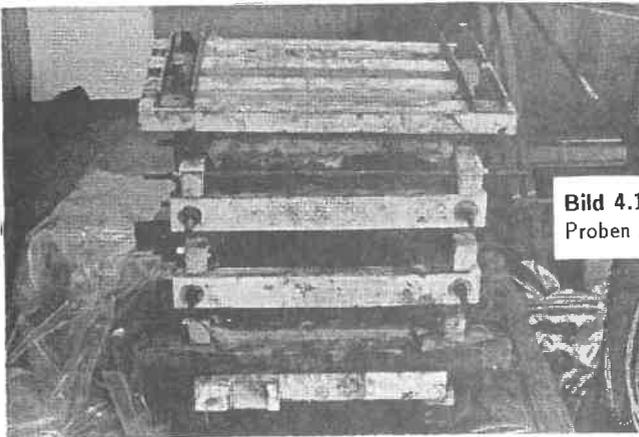
**Bild 4.8:** Realisierung des Einfeldschersgerätes



**Bild 4.9:** Schergerät mit eingebauter Bodenprobe



**Bild 4.10:** Vorbereitung der Probe zum Einkleben



**Bild 4.11:** Sicherung der Proben zum Transport

### 4.2.2 Scherversuche mit Lößlehm

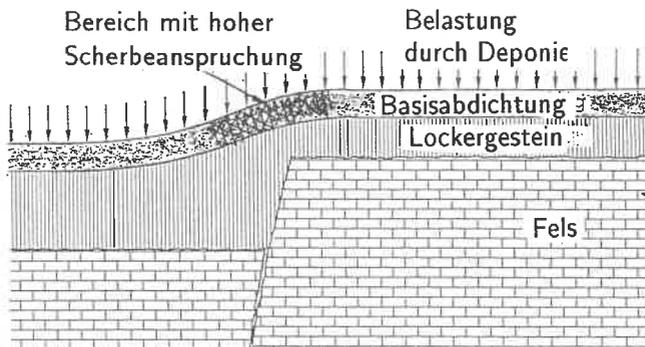
Die Versuche mit dem neu entwickelten Schergerät wurden mit Lößlehm aus dem Steinbruch Bopp in Talheim bei Heilbronn durchgeführt, dessen wichtigste bodenmechanische Parameter in Tabelle 4.1 zusammengestellt sind.

Wassergehalt	16,7 %	Tongehalt	20 %
Fließgrenze	34,5 %	Ausrollgrenze	15,0 %
Konsistenzzahl	0,92	Kalkgehalt	1,9 %
Feuchtdichte	$1,9 \text{ g/cm}^3$	Trockendichte	$1,63 \text{ g/cm}^3$
Korndichte	$2,64 \text{ g/cm}^3$		

Mittelwerte nach Rücksprache mit WITTLINGER.  
Siehe auch SMOLTZYK/WITTLINGER (1991).

**Tabelle 4.1:** Bodenmechanische Daten des Lößlehms

Der Lößlehm hat einen Tongehalt von ca. 20 % und entspricht somit Material, wie es häufig für den Bau von Dichtungen im Erd- und Deponiebau verwendet wird. Wenn Lößlehmschichten dieser Zusammensetzung unterhalb einer Deponie anstehen, gelten sie bei entsprechender Mächtigkeit als natürliche Barriere zum Schutz des Grundwassers. Da bei heterogenen Untergrundverhältnissen unter Deponien die Dichtungen bzw. die Barrierschichten eine erhebliche Beanspruchung erfahren können (Bild 4.12), ist die Kenntnis der mechanischen Eigenschaften des Materials von zunehmender Bedeutung.



**Bild 4.12:** Mögliche Verformungen unter einer Deponie

Daher wurden mit diesem Boden Einfachscherversuche an ungestörten Proben im Labor und Scherversuche entsprechend den Empfehlungen Nr. 4 des Arbeitskreises 19 der Deutschen Gesellschaft für Erd- und Grundbau an zylindrischen Prüfkörpern mit 60 *cm* Durchmesser im Feld durchgeführt.

Die Schergeraden in der MOHRschen Ebene für die in-situ Scherversuche und die Einfachscherversuche sind in Bild 4.13 dargestellt. Da beim Einfachscherversuch Nr. 3 ein Schaden am Versuchsgerät auftrat und somit dieser Versuch nur bedingt verwertet werden kann, wurde die COULOMBSche Gerade mit und ohne Berücksichtigung von Versuch 3 aufgetragen. Während sich der in den Feldversuchen ermittelte Reibungswinkel wesentlich von dem der Einfachscherversuche unterscheidet, ist der Unterschied in der Kohäsion unbedeutend. Dies steht im Widerspruch zu der allgemeinen Erfahrung, daß der Reibungswinkel zuverlässiger bestimmt werden kann als die Kohäsion. Ursache ist vermutlich die unterschiedliche Abschergeschwindigkeit. Während bei den Feldversuchen bei einer Laststufe innerhalb von 8 Stunden abgeschert wurde, war die Schergeschwindigkeit bei den Einfachscherversuchen wesentlich niedriger. D. h. die Zähigkeit hatte bei den beiden Versuchsarten unterschiedliche Auswirkungen. Obwohl beide Versuche als drainierte Versuche interpretiert werden können, beeinflusste bei den Feldversuchen möglicherweise der nicht vollständig abgebaute Porenwasserdruck die Versuchsergebnisse.

Grenzzustände der in-situ Scherversuchen

Versuch	Symbol	Stufe 1		Stufe 2		Stufe 3	
		$\tau$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma$
1	⊕	124,4	104,1	147,6	160,2	231,5	296,0
2	⊙	83,84	68,49	104,8	120,1	134,7	220,2
3	◇	80,85	67,70	98,81	118,5	140,7	221,8

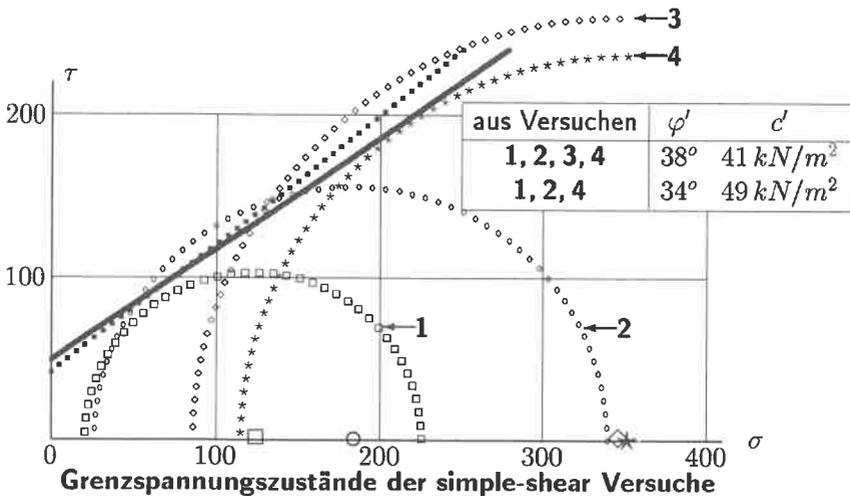
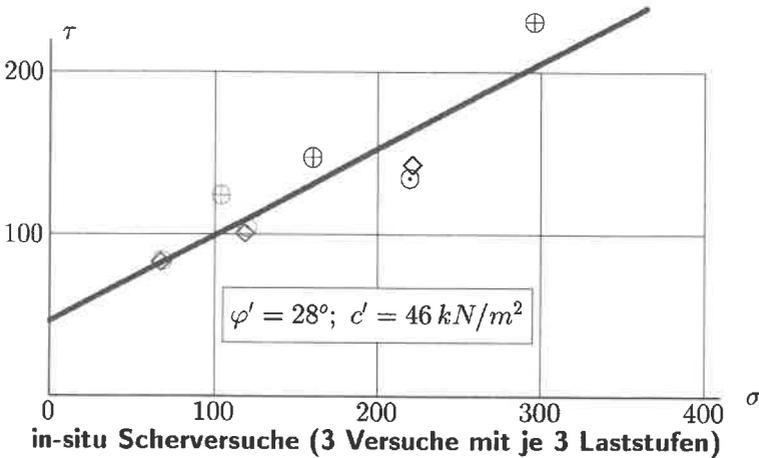
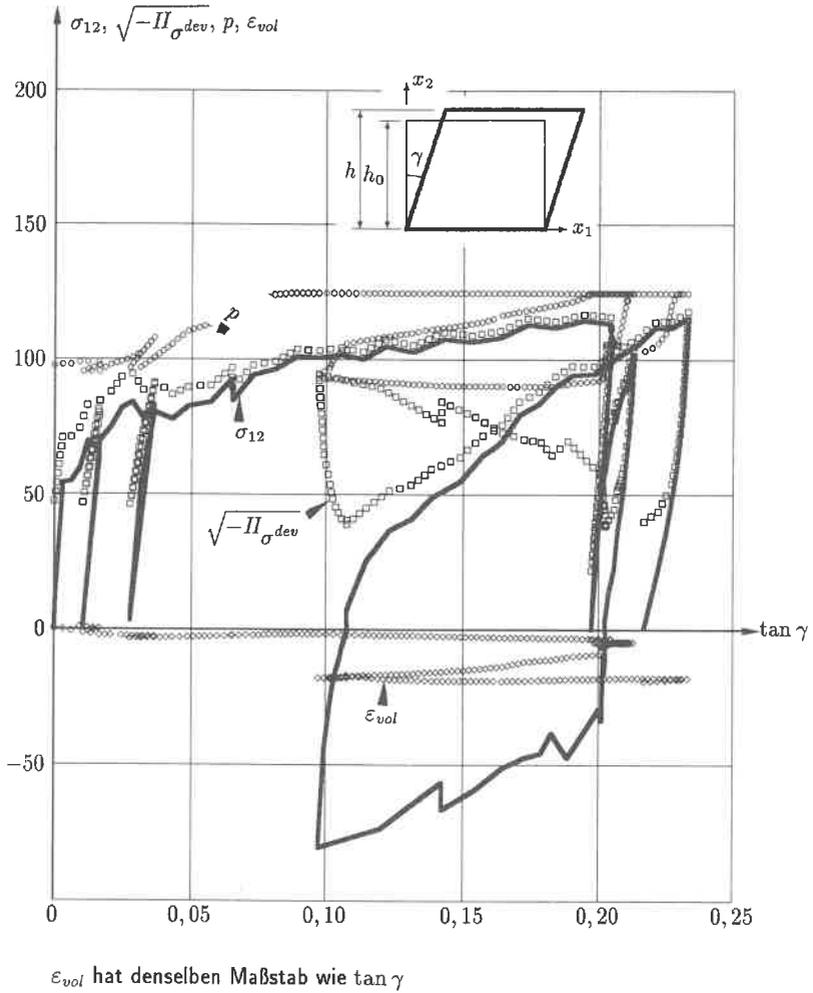


Bild 4.13: Vergleich zwischen in-situ und simple-shear Scherversuchen

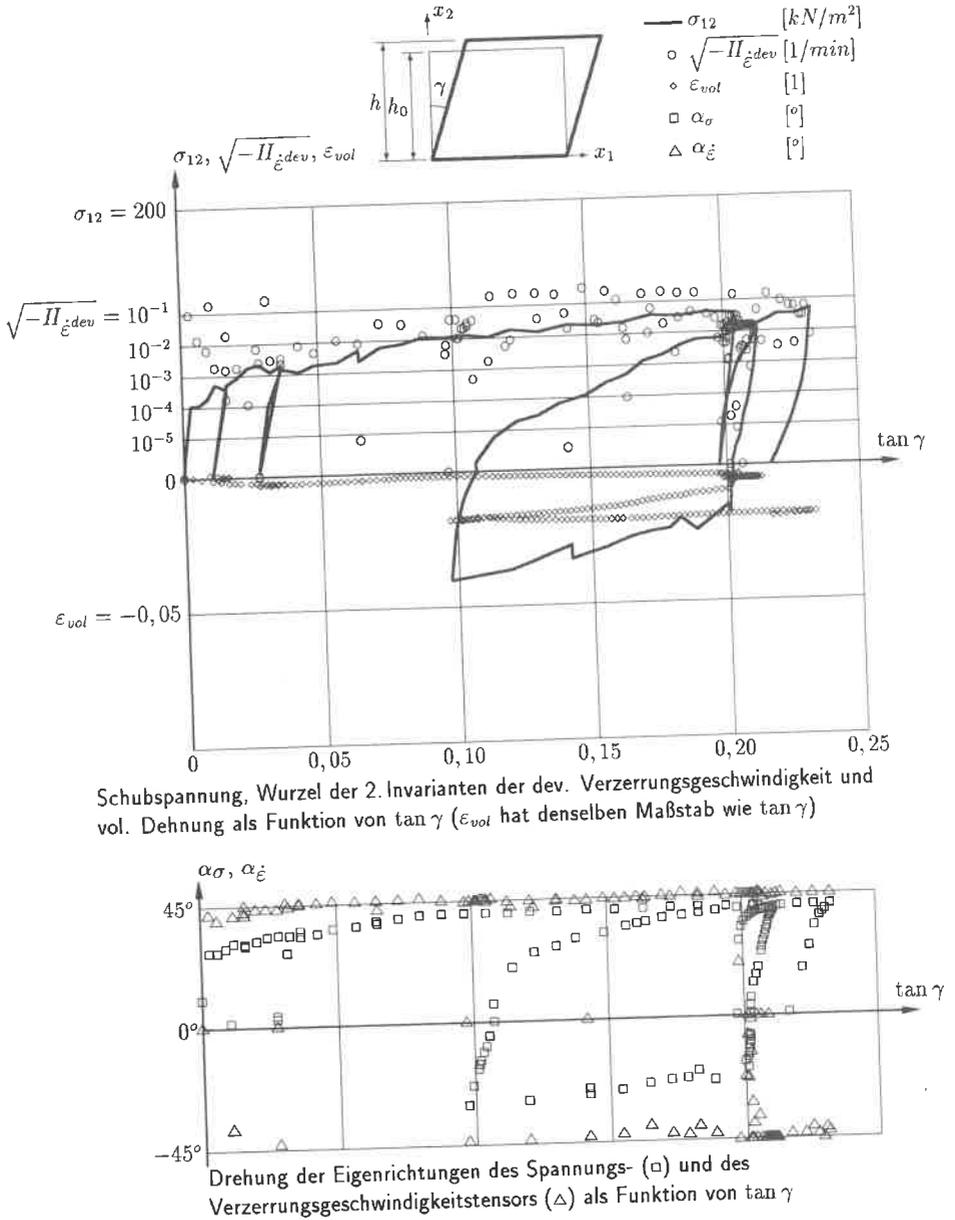
In den Bildern 4.14 bis 4.21 sind die Versuchsergebnisse der Einfachscherversuche dargestellt. Bei den Versuchen 1 und 2 wurde die Beanspruchung durch Aufbringen einer Verschiebung, aus der der Schubwinkel  $\gamma$  resultierte, schrittweise erzeugt. Da keine aufwendige Versuchsmaschine zur Verfügung stand, wurde die Verschiebung manuell über die Spindel in Inkrementen aufgebracht. Infolge der Zähigkeit des Materials und der Elastizität des Rahmens, gegen den gedrückt wurde, ergab sich ein unruhiger Kraft-Verschiebungsverlauf, da sich die Phänomene von Kriechen und Relaxation überlagerten. Es gelang nicht, eine gleichmäßige Vorschubgeschwindigkeit zu erzeugen (Bilder 4.15 und 4.17).

Deshalb wurde in den Versuchen 3 und 4 die Beanspruchung in Lastinkrementen aufgebracht. Mit Hilfe von Membranspeichern gelang es, die Last relativ konstant zu halten, so daß sich wegen des Kriechens zwar eine abgetreppte Versuchskurve ergibt. Es kommt jedoch nicht mehr zu den ungewollten Entlastungsvorgängen wie in den Versuchen 1 und 2. Nach dem Aufbringen eines Lastinkrements mit relativ hoher Vorschubgeschwindigkeit wurde gewartet, bis das Kriechen nahezu abgeklungen war. Dadurch ergibt sich der starke Wechsel in der Vorschubgeschwindigkeit, wie er in den Bildern 4.19 und 4.21 dargestellt ist.

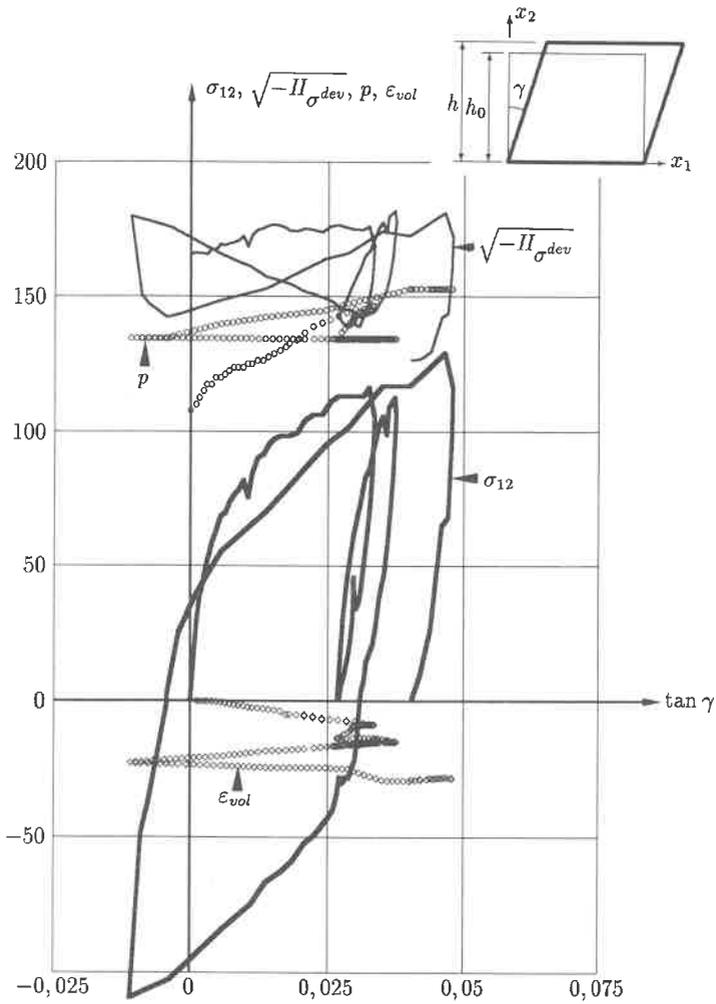
Wenn man in den Bildern 4.14, 4.16, 4.18 und 4.20 die Wurzel der 2. Invariante des Spannungsdeviators ( $\sqrt{-II_{\sigma^{dev}}}$ ) mit der Schubspannung ( $\sigma_{12}$ ) vergleicht, sieht man, daß auch ohne Schubspannung  $\sigma_{12}$  bereits eine erhebliche Schubbeanspruchung  $\sqrt{-II_{\sigma^{dev}}}$  vorhanden ist, die sich aus der Differenz der Normalspannungen ergibt. Der Nachteil der Versuchseinrichtung besteht nun darin, daß diese Differenz nicht gezielt verändert werden kann. Es kann zwar die Vertikalbelastung bzw. -verschiebung gesteuert werden, aber — da keine Horizontalverschiebungen aufgebracht werden können — nicht die Horizontalspannung. Zu diesem Problem, das sich aus der Kinematik des Versuchsgeräts ergibt, kommt das meßtechnische Problem der genauen Erfassung der Horizontalspannung. In der Versuchsplanung wurde dieses Problem unterschätzt. Die Kraftmeßdosen wurden so gewählt, daß sie für alle Versuche verwendet werden konnten. Bei den Versuchen 1 und 2 mit den kleinen Vertikalspannungen wurde also nur ein Teil des Meßbereichs der Kraftmeßdose ausgenutzt, so daß die gemessenen Horizontalspannungen ungenau sind.



**Bild 4.14:** Scherversuch 1 ( $\sigma_{22} = -149,5 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )

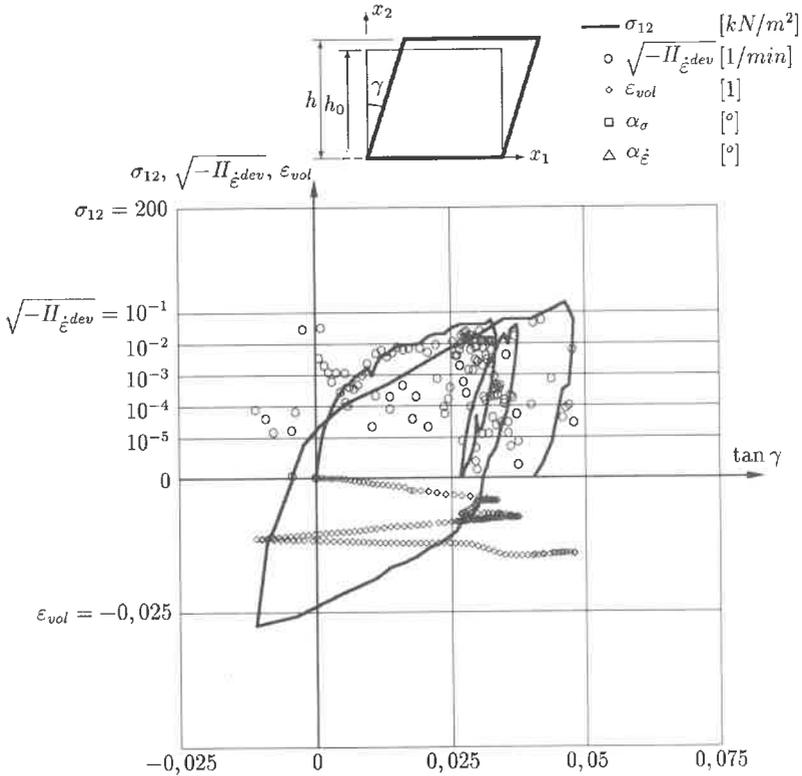


**Bild 4.15:** Scherversuch 1 ( $\sigma_{22} = -149,5 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung

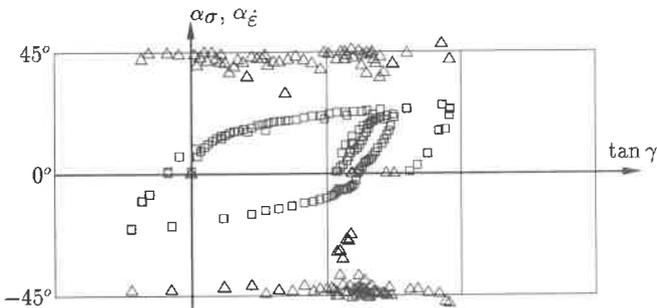


$\epsilon_{vol}$  hat denselben Maßstab wie  $\tan \gamma$

**Bild 4.16:** Scherversuch 2 ( $\sigma_{22} = -299 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )

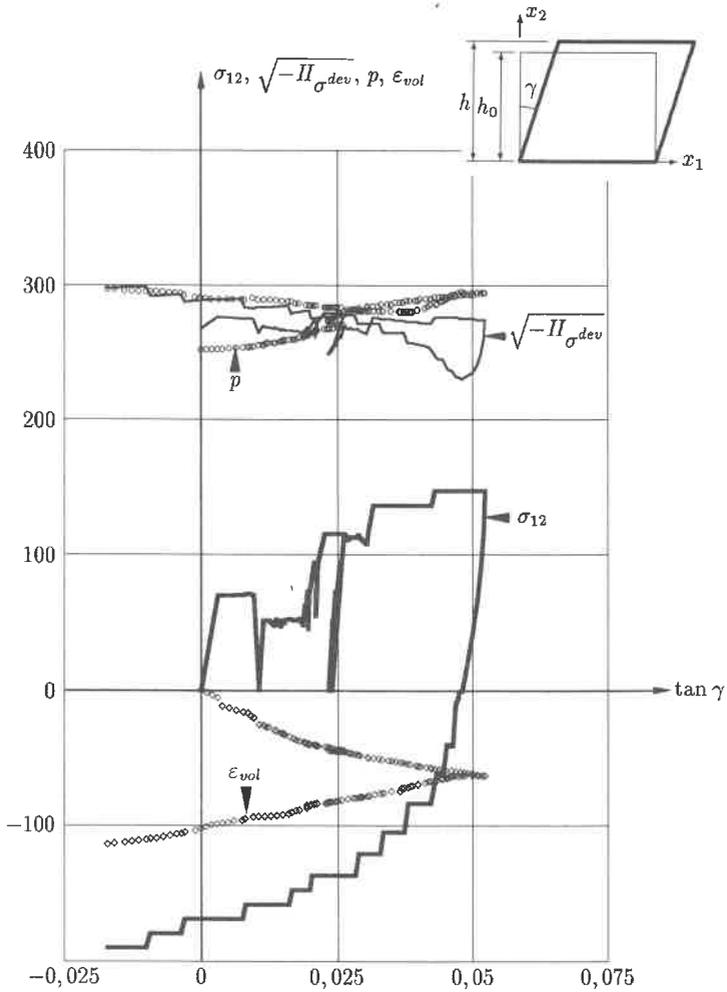


Schubspannung, Wurzel der 2. Invarianten der dev. Verzerrungsgeschwindigkeit und vol. Dehnung als Funktion von  $\tan \gamma$  ( $\epsilon_{vol}$  hat denselben Maßstab wie  $\tan \gamma$ )



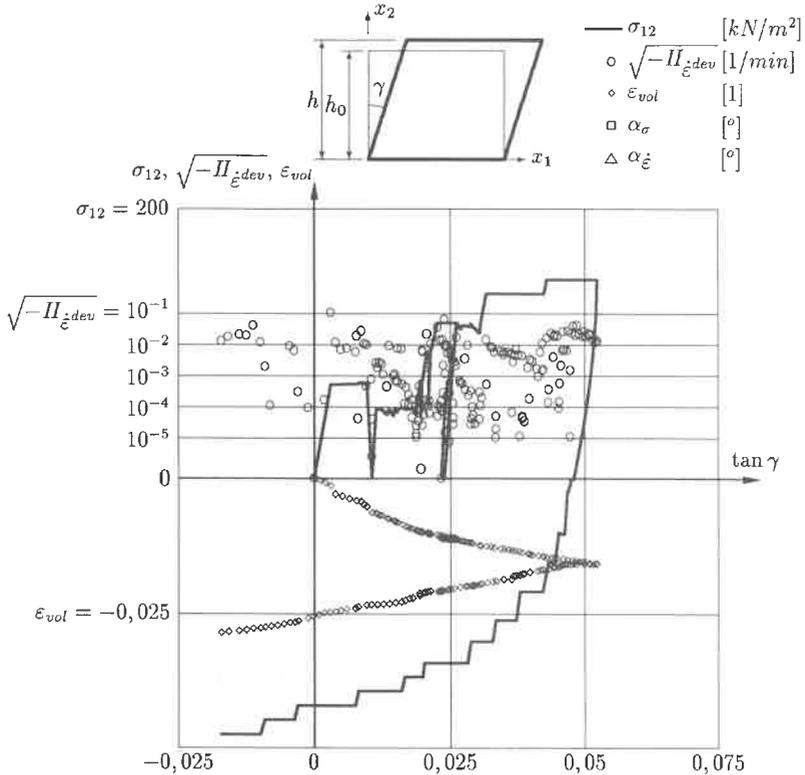
Drehung der Eigenrichtungen des Spannungs- ( $\square$ ) und des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors ( $\triangle$ ) als Funktion von  $\tan \gamma$

**Bild 4.17:** Scherversuch 2 ( $\sigma_{22} = -299 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung

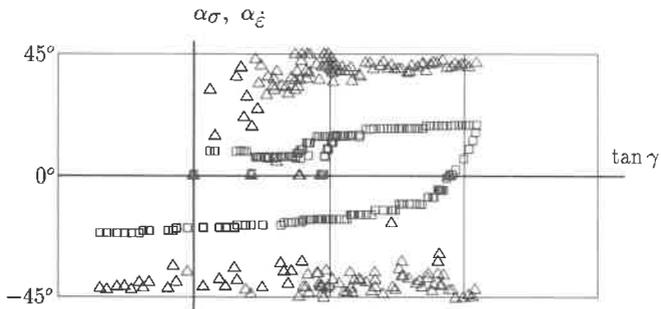


$\epsilon_{vol}$  hat denselben Maßstab wie  $\tan \gamma$

**Bild 4.18:** Scherversuch 3 ( $\sigma_{22} = -562 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )

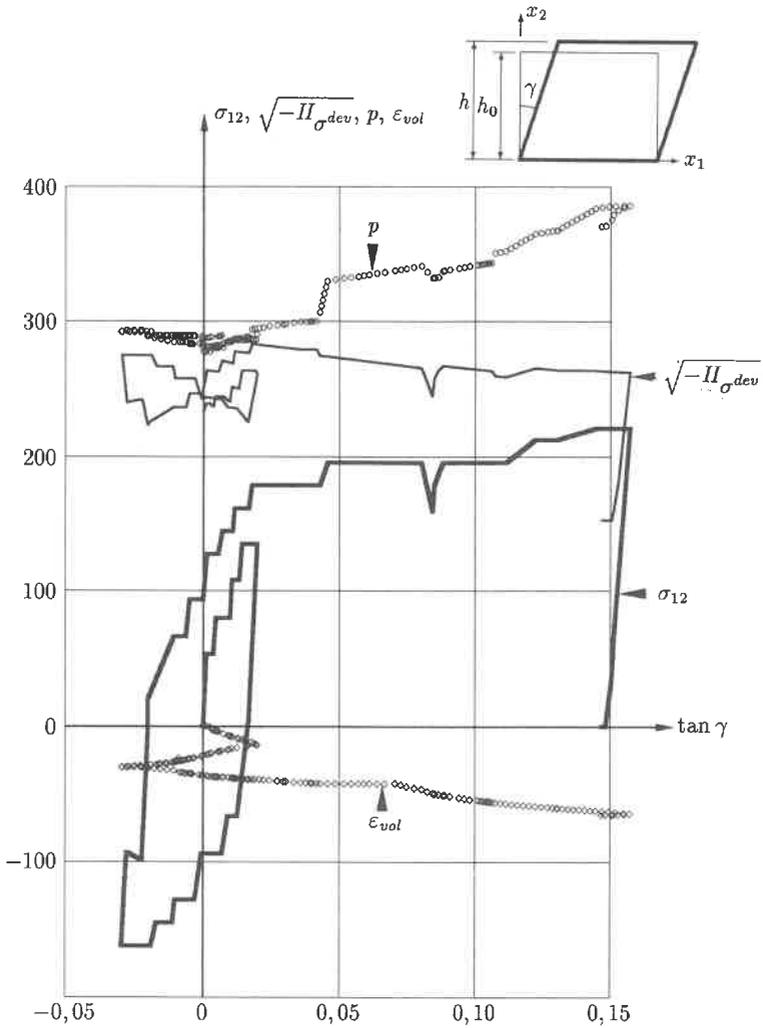


Schubspannung, Wurzel der 2. Invarianten der dev. Verzerrungsgeschwindigkeit und vol. Dehnung als Funktion von  $\tan \gamma$  ( $\epsilon_{vol}$  hat denselben Maßstab wie  $\tan \gamma$ )



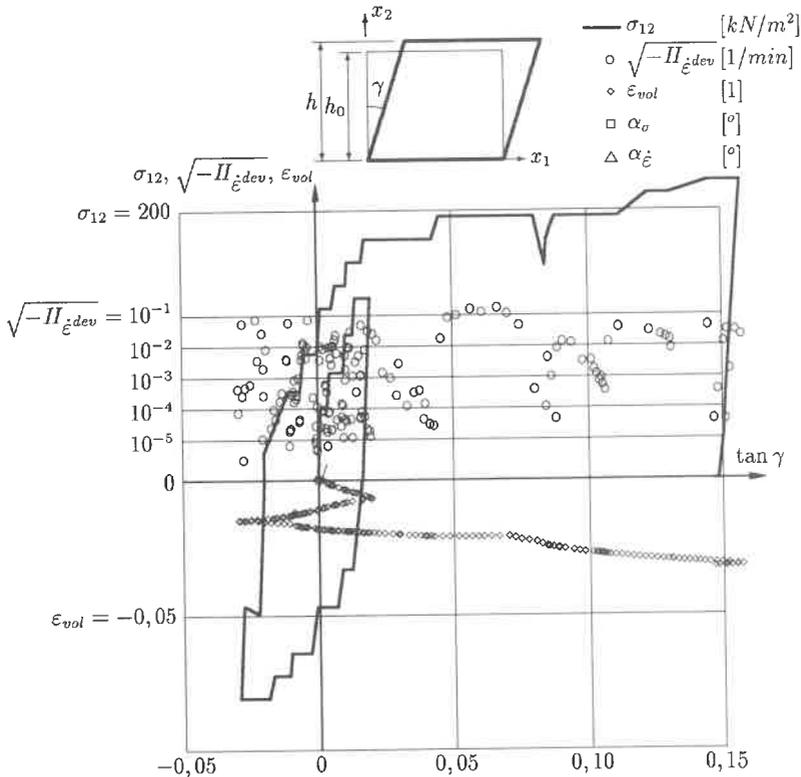
Drehung der Eigenrichtungen des Spannungs- ( $\square$ ) und des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors ( $\triangle$ ) als Funktion von  $\tan \gamma$

**Bild 4.19:** Scherversuch 3 ( $\sigma_{22} = -562 \text{ kN/m}^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung

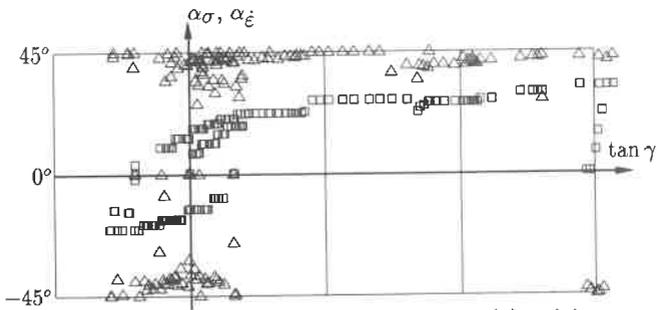


$\epsilon_{vol}$  hat denselben Maßstab wie  $\tan \gamma$

**Bild 4.20:** Scherversuch 4 ( $\sigma_{22} = -547 \text{ kN/m}^2$ ); Spannungen und Tangens des Schubwinkels ( $\tan \gamma$ )



Schubspannung, Wurzel der 2. Invarianten der dev. Verzerrungsgeschwindigkeit und vol. Dehnung als Funktion von  $\tan \gamma$  ( $\epsilon_{vol}$  hat denselben Maßstab wie  $\tan \gamma$ )



Drehung der Eigenrichtungen des Spannungs- ( $\square$ ) und des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors ( $\triangle$ ) als Funktion von  $\tan \gamma$

**Bild 4.21:** Scherversuch 4 ( $\sigma_{22} = -547 kN/m^2$ ); Dehnungsgeschwindigkeit, Hauptspannungsrichtung

# Kapitel 5

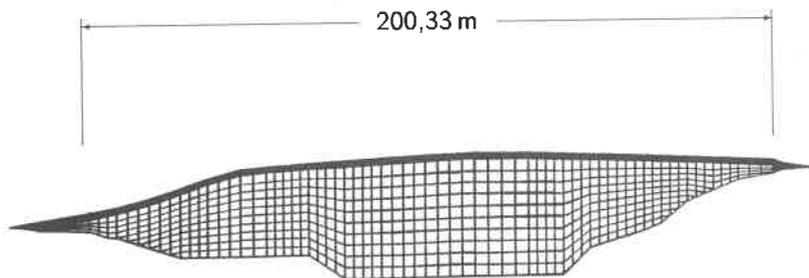
## Numerische Analysen

In diesem Kapitel sollen die Möglichkeiten numerischer Lösungsverfahren an zwei Beispielen aus der bodenmechanischen Praxis aufgezeigt werden: Zur Prognose der Langzeitsetzungen der Oberfläche einer Mülldeponie wird eine Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente durchgeführt. Dabei wird das Deponiegut als einphasiger, viskoelastischer Stoff idealisiert, da wegen der Komplexität des Materials eine Differenzierung des zeitabhängigen Verhaltens nach dem Einfluß der Abströmgeschwindigkeit der Porenflüssigkeit und der Viskosität des Feststoffgerüsts nicht möglich ist. Für Böden, bei denen die Stoffparameter für die Sickerströmung und die Viskosität des Korngerüsts zuverlässig bestimmt werden können und somit die Anwendung der Konsolidationstheorie angebracht ist, wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem man aus bekannten Lösungen für Spannungsrandbedingungen die Verschiebungen und Spannungen bei Verschiebungsrandbedingungen berechnen kann. Dieses Verfahren kann vor allem für die Analyse vorschubgesteuerter Laborversuche mit wassergesättigten, bindigen Böden nützlich sein.

### 5.1 Analyse der Langzeitsetzungen einer Deponie

Zum Schutz von Deponien gegen Oberflächenwasser werden zunehmend Kombinationsdichtungen aus Kunststoffdichtungsbahnen und tonigen Erdstoffen ausgeführt. Da die Oberflächendichtung aufgebracht werden muß, bevor die Setzungen des Deponieguts abgeklungen sind, ergibt sich die Frage nach Beanspruchung und Verschiebung der Dichtung. Aus geo-

dätischen Messungen an der Deponie Malsch über mehrere Jahre hinweg standen zuverlässige Daten zur Verfügung<sup>1</sup>, um das Zeit-Setzungsverhalten zu analysieren. Über mehr als 5 Jahre hinweg wurden an über 200 Punkten an der Deponieoberfläche die Verschiebungen gemessen. Die aus den Messungen ermittelte mittlere Setzung der Deponieoberfläche ist in Bild 5.2 mit dem Symbol  $\square$  in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen. Den Querschnitt durch die Deponie (Punkte 1601 bis 1618 des geodätischen Meßprogramms) mit der Abdeckung und dem FE-Netz zeigt Bild 5.1.



**Bild 5.1:** FE-Netz des Deponiequerschnitts

Die mittlere Setzung  $s_m$  wurde nach der Formel

$$s_m = \frac{V_0 - V_t}{A}$$

$V_0$	Deponievolumen zum Zeitpunkt $t_0$ (11.12.85)
$V_t$	Deponievolumen zum Zeitpunkt $t$
$A$	Deponieoberfläche auf die Horizontale projiziert

ermittelt. Die Festlegung der Materialparameter des ZENER-Modells — Zusammenstellung siehe Bild 5.2 — orientierte sich an folgenden Vorgaben:

- Sofortsetzung und Zeitsetzung sollen gleich groß sein. D. h.:  $E_{Hooke} = E_{Maxwell}$ , oder die Sofortsetzung beträgt 50 % der Gesamtsetzung.
- Die Querdehnzahl in allen rheologischen Körpern sei 0,3.
- Es sind möglichst „runde“ Zahlen zu wählen, um deutlich zu machen, daß die Analyse den Charakter einer rationalen Abschätzung hat und vor allem Tendenzen aufzeigen soll.

<sup>1</sup> Für die Überlassung der Daten sei der SBW Baden-Württemberg herzlich gedankt. Herr Dr. Lächler vom Baugrundinstitut Smoltczyk & Partner hat die Auswertung durch seine sachkundigen Hinweise nachhaltig unterstützt.

- Gute Approximation des bisher gemessenen Zeit-Setzungsverlaufs.

Die Bestimmung der Parameter erfolgte im ersten Schritt für eindimensionale Verhältnisse mit dem in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Verfahren. Durch verschiedene Berechnungen für die zweidimensionalen Verhältnisse wurde mit „trial and error“ eine optimale Anpassung an den gemessenen Zeit-Verschiebungsverlauf erzielt. Aus Bild 5.2 ist ersichtlich, daß mit dem ZENER-Modell der gemessene Setzungsverlauf gut wiedergegeben werden kann. Die Prognose der Setzungen zeigt, daß — auf der Basis des gewählten Modells — die geplante Grundwasserabsenkung und die Belastung durch die Abdeckung zu Setzungssprüngen führen werden. Wegen der Betrachtung des Deponiegutes als einphasiger Stoff bleibt natürlich unberücksichtigt, daß sich durch die Grundwasserabsenkung die Dränerandbedingungen ändern. Da zur Grundwasserabsenkung Dränschlitze in die Deponie eingebracht werden, ergeben sich kürzere Sickerstrecken für das Wasser. D. h. die Konsolidationssetzungen entwickeln sich nach der Grundwasserabsenkung schneller. Da dieser Effekt bei der FE-Analyse nicht berücksichtigt wird, überschätzt man die Zeit, die erforderlich ist, bis die Setzungen im wesentlichen abgeklungen sind. Die Zeit von elf Jahren nach dem Aufbringen der Abdeckung, die sich aus Bild 5.2 ergibt, wird also unterschritten werden.

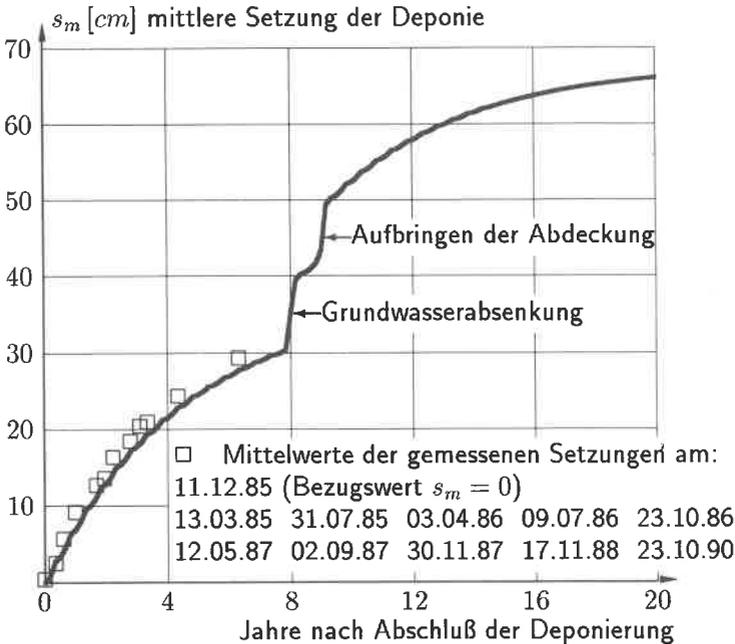
### FE-Berechnung mit ZENER-Körper

$$E_{s,Hooke} = 5,0 \text{ MN/m}^2 \rightarrow E_{Hooke} = 3,714 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{s,Maxw} = 5,0 \text{ MN/m}^2 \rightarrow E_{Maxw} = 3,714 \text{ MN/m}^2$$

$$\eta_{Maxw} = 100 \text{ MN} \cdot \text{Monat/m}^2$$

$$\nu_{Hooke} = \nu_{Maxw}^{el} = \nu_{Maxw}^{vis} = 0,30$$



**Bild 5.2:** Mittlere Setzung der Deponie; Meßwerte und FE-Analyse

In Bild 5.3 sind die Ergebnisse der Verschiebungsmessungen zusammengestellt, die sich direkt aus den geodätischen Messungen ergeben. Aufgrund der unterschiedlichen zeitlichen Abstände zwischen den Messungen wird in diesem Bild nicht deutlich, daß die Verschiebungen mit der Zeit abklingen. Führt man jedoch eine zeitliche Interpolation der Meßergebnisse durch und wählt z. B. den 01.01. eines jeden Jahres als Referenzzeitpunkt, wird offenkundig, daß die Setzungen mit der Zeit abklingen (Bild 5.4).

Deponieoberfläche entsprechend der Messung vom 11.12.1984

Datum	13.03.85	31.07.85	03.04.86	09.07.86	23.10.86
Symbol	*	□	◇	△	▽
Datum	12.05.87	02.09.87	30.11.87	17.11.88	23.10.90
Symbol	•	*	◇	⊗	○

Verschiebungen 40-fach „überhöht“

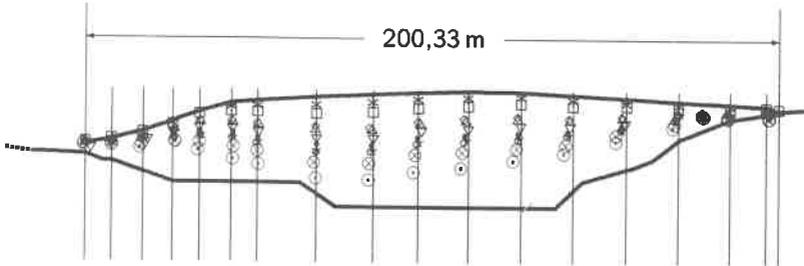


Bild 5.3: Ergebnisse der geodätischen Verschiebungsmessungen von 1985 bis 1990

Deponieoberfläche entsprechend der Messung vom 11.12.1984

Datum	01.01.85	01.01.86	01.01.87	01.01.88	01.01.89	01.01.90
Symbol	×	*	□	◇	△	▽

Verschiebungen 40-fach „überhöht“

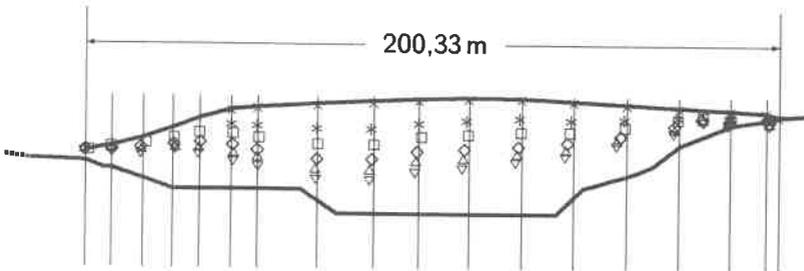
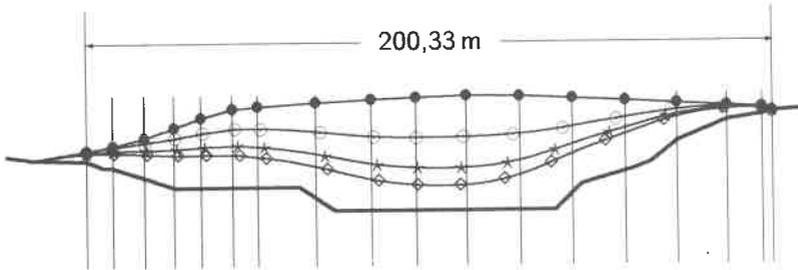


Bild 5.4: Verschiebungen an den Meßpunkten; zeitliche Interpolation auf den Jahresanfang

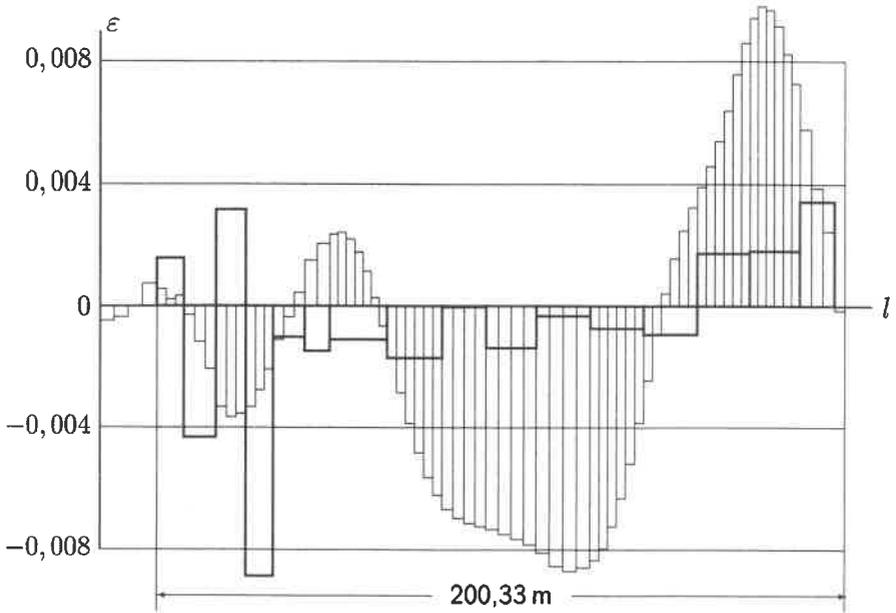
Oberfläche entsprechend der Messung vom 11.12.1984 •  
 Oberfläche des Deponiematerials zu den Zeitpunkten:  
 $t = 7 \text{ Jahre}$  ◊       $t = 10 \text{ Jahre}$  \*       $t = 20 \text{ Jahre}$  ◇

Verschiebungen 20-fach „überhöht“



**Bild 5.5:** Oberflächenverschiebungen aus der FE-Analyse

Wenn man Bild 5.4 mit Bild 5.5 vergleicht, sieht man, daß sich nicht nur bei den Vertikalverschiebungen eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ergibt — was aufgrund der Festlegung der Parameter ja selbstverständlich ist —, sondern auch bei den Horizontalverschiebungen. Dabei ist zu bedenken, daß die Verschiebungen der Meßpunkte in horizontaler Richtung relativ gering sind und teilweise im Bereich der Meßgenauigkeit liegen. D. h. die aus den gemessenen Verschiebungen errechneten Dehnungen der Deponieoberfläche (Bild 5.6) geben nur eine Tendenz an. Mit Bild 5.6 soll gezeigt werden, daß die Dehnungen an der Oberfläche unter 1% bleiben. Wenn dieses Maß nicht überschritten wird, ergeben sich bei Kunststoffdichtungsbahnen keine Probleme. Weil es nur darauf ankommt zu zeigen, daß die Dehnungen unter 1% bleiben, werden die Meßwerte aus einem Zeitraum von sieben Jahren den gerechneten Werten, die sich auf einen Zeitraum von zwanzig Jahren beziehen, gegenübergestellt. Eine erhebliche Sicherheitsreserve ergibt sich noch dadurch, daß die Dichtungsbahnen nur die Dehnungen aufzunehmen haben, die nach dem Aufbringen der Abdeckung auftreten, und nicht die Dehnungen, die sich auf den Zeitpunkt  $t = 0$  beziehen.



$l$  Grenzschicht in die Horizontale projiziert

$\varepsilon$  Dehnung  $\ln(l/l_0)$  in der Grenzschicht Abdeckung/Deponiematerial

— Auswertung der Messungen über den Beobachtungszeitraum von 7 Jahren

— Ergebnisse der FE-Analyse von  $t = 0$  bis  $t = 20$  Jahre

**Bild 5.6:** Dehnungen der Deponieoberfläche; Messung und Rechnung

## 5.2 Verschiebungsgesteuerte Beanspruchung

Wegen der Vorteile verschiebungsgesteuerter Versuche bei konsolidierenden Böden, wie sie z. B. bei STEINMANN (1985) und ULRICH (1980) dargestellt werden, sind Lösungen, bei denen sich Spannung bzw. Porenwasserdruck als Funktion der Vorschubgeschwindigkeit ergeben, von Interesse. Daher werden auch von den oben genannten Autoren aus Lösungen für Spannungsrandbedingungen Lösungen für Verschiebungsrandbedingungen abgeleitet. In diesem Abschnitt wird ein allgemeines Verfahren vorgestellt, um aus Lösungen für eine konstante Last  $q_c$  in der Form

$$x(r, t) = q_c f(r, t) \quad (5.1)$$

$$\text{eine Lösung} \quad q(r, t) = g(\dot{x}_c) \quad \text{und} \quad u(r, t) = h(\dot{x}_c) \quad (5.2)$$

zu ermitteln.

Dabei sind:	$f, g, h$	Funktionen,
	$q$	Belastung bzw. Spannungsantwort,
	$r$	Ort,
	$t$	Zeit,
	$u$	Porenwasserdruck,
	$x$	Verschiebungskomponente,
	$\dot{x}_c$	Vorschubgeschwindigkeit am Rand.

Da das Verfahren das Superpositionsprinzip zur Voraussetzung hat, ist es grundsätzlich beschränkt auf folgende Annahmen:

- linear viskoelastisches Stoffgesetz für das Korngerüst (ZENER bzw. POYNTING/THOMSON-Körper);
- infinitesimal kleine Verzerrungen;
- lineare Abhängigkeit zwischen Druckgefälle und Filtergeschwindigkeit (DARCYSches Gesetz).

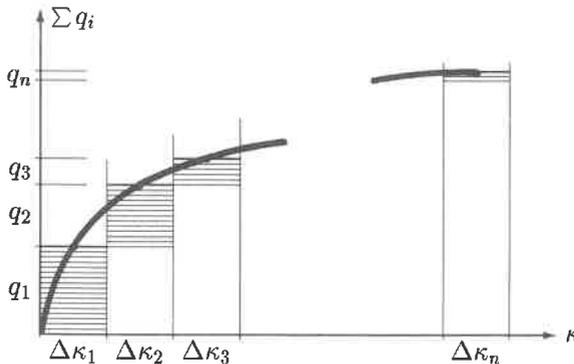
Darüberhinaus sollen die Annahmen der klassischen Konsolidationstheorie — manche Autoren verwenden auch die Bezeichnung BIOTsche Theorie — gelten, wie sie z. B. bei BUCHMAIER (1985), S. 27, beschrieben sind:

- Der Boden ist wassergesättigt (Zweiphasengemisch),
- Kornsubstanz und Porenwasser sind inkompressibel,
- keine Trägheitskräfte.

Sinnvoll kann dieses Verfahren angewandt werden, wenn für das Problem analytische Lösungen in der Form

$$x(r, t) = q_c f(r, t) \quad \text{und} \quad u(r, t) = q_c g(r, t) \quad (5.3)$$

bekannt sind. Wie bei GUSSMANN (1979a) wird die Möglichkeit genutzt, eine kontinuierlich veränderliche Belastung treppenförmig anzunähern (Bild 5.7). Während jedoch GUSSMANN durch einen Grenzübergang zu einer analytischen Lösung gelangt, erfolgt in der im folgenden dargestellten Anwendung eine zeitliche Diskretisierung. Grundsätzlich kann man mit veränderlicher Schrittweite arbeiten, die Aufbereitung für die Programmierung erfolgt jedoch mit konstanten Zeitschritten, da sich dadurch der Algorithmus wesentlich vereinfacht.



**Bild 5.7:** Treppenförmige Approximation einer stetigen Belastung

$$\begin{aligned} x_n = & q_1 f\left(\kappa_n - \frac{\Delta \kappa_1}{2}\right) + q_2 f\left(\kappa_n - \Delta \kappa_1 - \frac{\Delta \kappa_2}{2}\right) \\ & + q_3 f\left(\kappa_n - \Delta \kappa_1 - \Delta \kappa_2 - \frac{\Delta \kappa_3}{2}\right) \\ & + \dots + q_n f\left(\kappa_n - \Delta \kappa_1 - \Delta \kappa_2 - \Delta \kappa_3 - \dots - \frac{\Delta \kappa_n}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sind die Zeitschritte  $\Delta \kappa_i$  alle gleich, vereinfacht sich Gleichung (5.4) zu

$$\begin{aligned} x(n\Delta\kappa) = & q_1 f\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta\kappa\right] + q_2 f\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)\Delta\kappa\right] + \\ & q_3 f\left[\left(n - \frac{5}{2}\right)\Delta\kappa\right] + \dots + q_n f\left[\left(n - \frac{2n-1}{2}\right)\Delta\kappa\right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$x(n\Delta\kappa) = \sum_{i=1}^n q_i f\left[\left(n - \frac{2i-1}{2}\right)\Delta\kappa\right] \quad (5.6)$$

Wenn die Anfangsverschiebung  $x_0$  und der zeitliche Verlauf der Verschiebungsgeschwindigkeit gegeben sind, erhält man ein lineares Gleichungssystem  $Aq = x$ . In der Matrix  $A$  ist nur die Hauptdiagonale und der Teil unterhalb der Hauptdiagonale besetzt. Aufgrund der Wahl gleicher Zeitschritte besteht die Matrix  $A$  nur aus  $n$  verschiedenen Elementen.

$$\begin{pmatrix} f\left(\frac{\Delta\kappa}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f\left(\frac{3\Delta\kappa}{2}\right) & f\left(\frac{\Delta\kappa}{2}\right) & 0 & \dots & 0 \\ f\left(\frac{5\Delta\kappa}{2}\right) & f\left(\frac{3\Delta\kappa}{2}\right) & f\left(\frac{\Delta\kappa}{2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f\left(\frac{2n-1}{2}\Delta\kappa\right) & f\left(\frac{2n-3}{2}\Delta\kappa\right) & f\left(\frac{2n-5}{2}\Delta\kappa\right) & \dots & f\left(\frac{\Delta\kappa}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Wegen der einfachen Struktur der Matrix  $A$  braucht kein allgemeines Lösungsverfahren angewandt werden, sondern man kann von oben nach unten durch Einsetzen sehr schnell den Vektor  $q$  ermitteln. Das Lösungsverfahren stellt also an die Leistungsfähigkeit des Computers keine besonderen Anforderungen.

Der Vorteil des Verfahrens besteht darin, daß aus allen bekannten Lösungen für Spannungsrandbedingungen mit einem einheitlichen Algorithmus Lösungen für Verschiebungsrandbedingungen ermittelt werden können. Der Programmier- und Testaufwand ist dadurch wesentlich geringer, als wenn man das Problem durch numerische Inversion der verschiedenen speziellen Funktionen löst.

Die Methode kann man etwa auf folgende Lösungen anwenden:

1. Konsolidation homogener Schichten mit Dräns (FEUERLEIN 1965).
2. Zweidimensionale Konsolidation zylindrischer Proben (GUSSMANN/THAMM 1974).
3. Eindimensionale Konsolidation mit dem VOIGT'schen Stoffgesetz für das Korngerüst (GUSSMANN 1979b).
4. Konsolidation unter einer Lastplatte mit einem ZENER-Modell für das Korngerüst (GARBSCH 1973).

Zur Verifizierung des Programms kann man auf die Arbeiten von GUSSMANN (1979a/b) und ULRICH (1980) zurückgreifen, wo analytische Lösungen für verschiebungsgesteuerte Versuche angegeben werden.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Nach der Darlegung der Methodik und Terminologie von HOHENEMSER/PRAGER (1932) zur Beschreibung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens erfolgte der Nachweis, daß dieses Konzept auch in der Geotechnik angewandt werden kann. Deshalb wurde die Beschreibung des Materialverhaltens mit einem erweiterten PRANDTL-MAXWELL-Körper — dem elastoplastischen Körper wird ein viskoelastisches Medium überlagert — für die FE-Methode in der von BREINLINGER (1989) präsentierten Form einer Geschwindigkeitsformulierung unter Berücksichtigung endlicher Deformationen aufbereitet.

Die COULOMBSche Fließfläche wurde so modifiziert, daß die vorgeschlagene Formulierung die COULOMBSche Fläche und den DRUCKER-Kegel als Sonderfälle enthält und den Übergangsbereich zwischen diesen beiden Formulierungen zutreffend beschreibt.

Die Möglichkeiten der Überlagerung von zwei rheologischen Körpern wurden mit der Anwendung des ZENER-Modells zur FE-Analyse zweier geotechnischer Probleme genutzt:

- Experimentell und numerisch wurde der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität für einen Druckversuch quantifiziert, um zu zeigen, daß ein Kraft-Weg-Diagramm, bei dem die Kraft mit dem Weg erst stetig ansteigt und dann abfällt (peak) bei Versuchsbedingungen, wie sie auch in der Geotechnik auftreten können, nicht unbedingt in einer Entfestigung des Materials begründet sein muß, sondern daß auch Knicken oder Beulen ursächlich sein können.
- Zur Analyse des Langzeitverhaltens einer Deponie wurde eine viskoelastische Berechnung durchgeführt, um aus dem beobachteten Zeitsetzungsverhalten die weitere zeitliche Entwicklung der Verschiebung

gen zu prognostizieren.

Da neben der Viskosität vor allem Konsolidationsvorgänge in der Geotechnik das zeitabhängige Verhalten beeinflussen, wurde zur Berechnung vorschubgesteuerter Laborversuche mit wassergesättigten, bindigen Böden auf der Basis der Konsolidationstheorie ein numerisches Verfahren entwickelt, mit dem man aus bekannten Lösungen für Spannungsrandbedingungen die Verschiebungen und Spannungen bei linearen Stoffbeziehungen (ZENER-Körper) und infinitesimal kleinen Deformationen berechnen kann, wenn die Verschiebungsrandbedingungen gegeben sind.

Zur besseren experimentellen Erfassung des Materialverhaltens von überkonsolidiertem Ton und teilweise verwittertem Fels wurde ein Einfachschergerät konzipiert und getestet, das zur Untersuchung von heterogenen Bodenproben geeignet ist und mit dem nichtmonotone Belastung, Belastungs-umkehr und Drehung der Hauptspannungen untersucht werden können. Zur Anwendung des Gerätes war eine besondere Technik zur ungestörten Entnahme der 60/60/50 cm großen Bodenproben und ihren Einbau in das Versuchsgerät erforderlich. Beim Testen des Gerätes mit Bodenproben aus Lößlehm ergab sich eine relativ gute Übereinstimmung mit der in in-situ gemessenen Scherfestigkeit.

# Kapitel 7

## Anhang

### 7.1 Parameter für Hookesches und Newtonsches Gesetz

Zur Beschreibung HOOKEschen Materials sind die in Tabelle 7.1 zusammengestellten Parameter üblich.

$\lambda$	1. LAMÉ Parameter	1 <sup>st</sup> LAMÉ's elastic constant
$G, \mu, n$	2. LAMÉ Parameter, Schubmodul, Gleitmodul	2 <sup>nd</sup> LAMÉ's elastic constant, rigidity modulus, shear modulus
$K$	Kompressionsmodul	bulk modulus
$E$	Elastizitätsmodul	Young's modulus
$\nu$	Querkontraktionszahl	Poisson's ratio
$E_s$	Steifemodul	stiffness modulus

**Tabelle 7.1:** Elastische Moduli (HOOKEsches Gesetz)

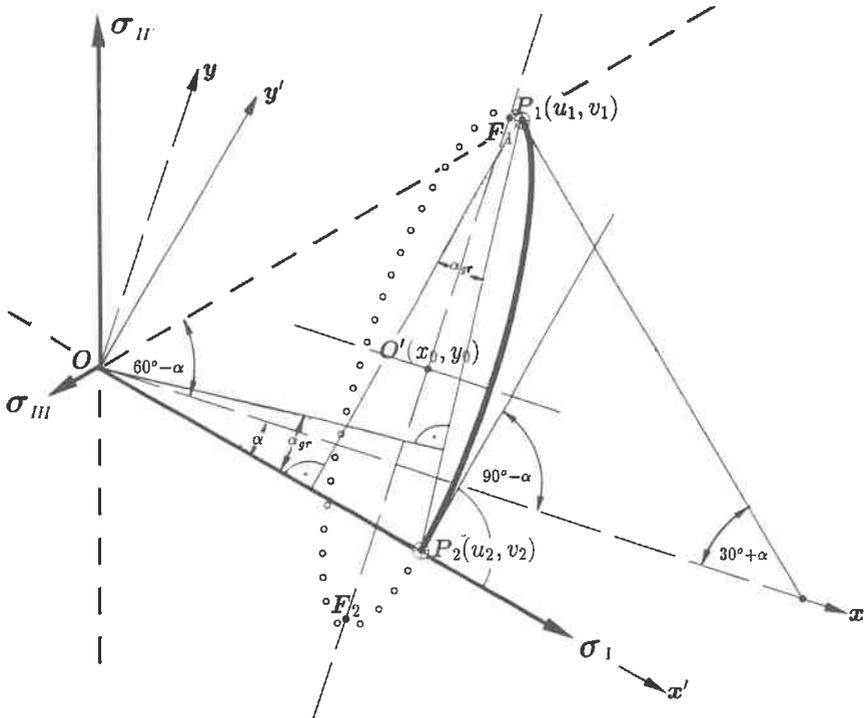
Zur vollständigen Beschreibung elastisch isotropen Materialverhaltens müssen zwei Parameter angegeben werden. Die Umrechnung zwischen den elastischen oder viskosen Parametern kann nach Tabelle 7.2 erfolgen, die in Anlehnung an die Tabelle bei SNEDDON/BERRY (1958), S. 26, erstellt wurde.

Konstante	$(\lambda, G)$	$(K, G)$	$(G, \nu)$	$(E, \nu)$	$(E, G)$
$\lambda$	$\lambda$	$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$G$	$G$	$G$	$G$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$G$
$K$	$\lambda + \frac{2}{3}G$	$K$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
$E$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2(1+\nu)G$	$E$	$E$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	$\nu$	$\nu$	$\frac{E-2G}{2G}$
$E_s$	$2G+\lambda$	$\frac{4}{3}G+K$	$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$G\frac{4G-E}{3G-E}$

**Tabelle 7.2:** Umrechnung der Stoffkonstanten für HOOKEsches und NEWTONsches Gesetz

## 7.2 Die geometrischen Elemente der Fließkurven

### 7.2.1 Fließkurve in der Deviatorebene



$$\overline{OP_1} = r_1 \qquad \overline{OP_2} = r_0$$

$$\tan \alpha_{gr} = \frac{r_0 - r_1 \cos 60^\circ}{r_1 \sin 60^\circ} \qquad (7.1)$$

$$\tan \alpha_{gr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2r_0}{r_1} - 1 \right) \qquad (7.2)$$

$$c_p = 1 - \frac{\alpha}{\alpha_{gr}} \qquad (7.3)$$

**Bild 7.1:** Lage der Ellipsen in der Deviatorebene

Koordinaten von  $P_1$  im  $x, y$ -System:

$$u_1 = r_1 \cos(60^\circ - \alpha), \quad v_1 = r_1 \sin(60^\circ - \alpha). \quad (7.4)$$

Koordinaten von  $P_2$ :

$$u_2 = r_0 \cos \alpha, \quad v_2 = -r_0 \sin \alpha. \quad (7.5)$$

Steigungen  $m_1$  und  $m_2$ :

$$m_1 = -\tan(30^\circ + \alpha), \quad m_2 = \tan(90^\circ - \alpha). \quad (7.6)$$

Die „Größe“ der Fließkurve ergibt sich aus  $r_1$  bzw.  $r_0$ , das durch die Fließkurve in der hydrostatischen Ebene (siehe Abschnitt 7.2.2) bestimmt wird.

### Ermittlung der Elemente der Ellipse

Die Gleichung einer Ellipse, deren Hauptachsen parallel zu den Achsen des Koordinatensystems sind, lautet:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7.7)$$

Für den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $u$  und  $v$ , der auf der Ellipse liegt, lautet die Gleichung:

$$\frac{(u - x_0)^2}{a^2} + \frac{(v - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7.8)$$

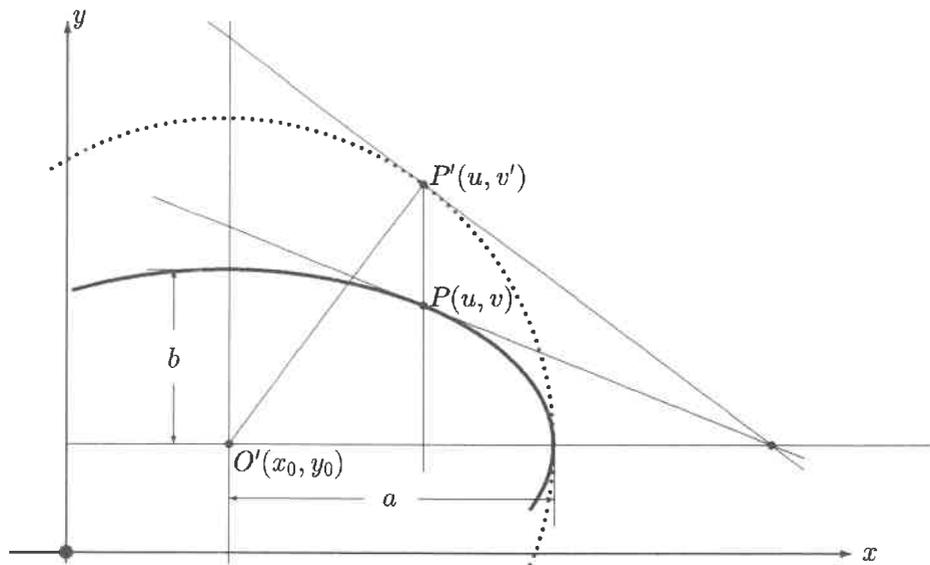
Die Gerade vom Ellipsenmittelpunkt zum Punkt  $P'$  auf dem Kreis mit dem Radius  $a$  hat die Steigung  $\bar{m} = \frac{v' - y_0}{u - x_0}$ . Die Steigung der Tangente an diesen Kreis beträgt somit:

$$m' = -\frac{u - x_0}{v' - y_0}. \quad (7.9)$$

Da  $v' = y_0 + (v - y_0) \frac{a}{b}$ , ergibt sich die Steigung  $m$  der Ellipsentangente.

$$m = -\frac{u - x_0}{y_0 + (v - y_0) \frac{a}{b} - y_0} \frac{b}{a},$$

$$m = -\frac{u - x_0}{v - y_0} \frac{b^2}{a^2}. \quad (7.10)$$

**Bild 7.2:** Kreis und Ellipse mit Tangente

Aus (7.10) ergibt sich:

$$b^2 = -m a^2 \frac{v - y_0}{u - x_0}. \quad (7.11)$$

(7.11) in (7.8) eingesetzt ergibt:

$$\frac{(u - x_0)^2}{a^2} - \frac{(u - x_0)(v - y_0)}{m a^2} = 1. \quad (7.12)$$

Aufgrund von Gleichung (7.10) ergibt sich für die Tangenten in  $P_1$  und  $P_2$ :

$$m_1 = -\frac{u_1 - x_0}{v_1 - y_0} \frac{b^2}{a^2}, \quad m_2 = -\frac{u_2 - x_0}{v_2 - y_0} \frac{b^2}{a^2}.$$

Daraus folgt:

$$m_1 \frac{v_1 - x_0}{u_1 - y_0} = m_2 \frac{v_2 - x_0}{u_2 - y_0}. \quad (7.13)$$

Somit ergibt sich die Gleichung für  $y_0$ :

$$y_0 = \frac{m_1 v_1 (u_2 - x_0) - m_2 v_2 (u_1 - x_0)}{m_1 (u_2 - x_0) - m_2 (u_1 - x_0)} \quad (7.14)$$

Für  $v_1 - y_0$ :

$$v_1 - y_0 = \frac{m_2 (v_2 - v_1)(u_1 - x_0)}{m_1 (u_2 - x_0) - m_2 (u_1 - x_0)}. \quad (7.15)$$

Für  $v_2 - y_0$ :

$$v_2 - y_0 = \frac{m_1 (v_2 - v_1)(u_2 - x_0)}{m_1 (u_2 - x_0) - m_2 (u_1 - x_0)}. \quad (7.16)$$

(7.15) in (7.12) für  $P_1$  eingesetzt ergibt:

$$(u_1 - x_0)^2 - \frac{u_1 - x_0}{m_1} \frac{m_2 (v_2 - v_1)(u_1 - x_0)}{m_1 (u_2 - x_0) - m_2 (u_1 - x_0)} = a^2. \quad (7.17)$$

(7.16) in (7.12) für  $P_2$  eingesetzt ergibt:

$$(u_2 - x_0)^2 - \frac{u_2 - x_0}{m_2} \frac{m_1 (v_2 - v_1)(u_2 - x_0)}{m_1 (u_2 - x_0) - m_2 (u_1 - x_0)} = a^2. \quad (7.18)$$

Aus (7.17) und (7.18) folgt:

$$\begin{aligned} & [(u_1 - x_0)^2 - (u_2 - x_0)^2] [m_1 (u_2 - x_0) - m_2 (u_1 - x_0)] \\ & + (v_2 - v_1) \left[ \frac{m_1}{m_2} (u_2 - x_0)^2 - \frac{m_2}{m_1} (u_1 - x_0)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.19)$$


---

$$\begin{aligned} & [u_1^2 - u_2^2 + 2(u_2 - u_1)x_0] [(m_2 - m_1)x_0 + m_1u_2 - m_2u_1] \\ & + \frac{v_2 - v_1}{m_1m_2} [m_1^2(u_2^2 - 2u_2x_0 + x_0^2) - m_2^2(u_1^2 - 2u_1x_0 + x_0^2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$


---

$$\begin{aligned} & [2(u_2 - u_1)(m_2 - m_1) + \frac{v_2 - v_1}{m_1m_2} (m_1^2 - m_2^2)] x_0^2 \\ & + [(u_1^2 - u_2^2)(m_2 - m_1) + 2(u_2 - u_1)(m_1u_2 - m_2u_1) \\ & + 2\frac{v_2 - v_1}{m_1m_2} (u_1m_2^2 - u_2m_1^2)] x_0 \\ & + (u_1^2 - u_2^2)(m_1u_2 - m_2u_1) + \frac{v_2 - v_1}{m_1m_2} (m_1^2u_2^2 - m_2^2u_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$


---

Da in (7.21) nur  $x_0$  unbekannt ist, erhält man durch Anwendung der Auflösungsformel die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Brauchbar ist nur die Lösung, bei der die beiden Tangenten nicht Tangenten verschiedener Hyperbelbögen sind. Dieses Kriterium ergibt die gewünschte Lösung. Bei den praktisch vorkommenden Fällen ist die gesuchte Kurve eine Ellipse. Durch Einsetzen in (7.14) erhält man  $y_0$ ; aus (7.11) und (7.12) die Halbachsen  $a$  und  $b$ .

### Koeffizienten für die allgemeine Gleichung 2. Grades

In dem gegenüber dem  $x', y'$ -Koordinatensystem um den Winkel  $\alpha$  gedrehten

$x, y$ -Koordinatensystem sind die Achsen des Kegelschnitts parallel zur  $x$  bzw.  $y$  Achse. Die Gleichung des Kegelschnitts lautet also:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7.22)$$

Mit den Gleichungen für die Koordinatentransformation

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \quad (7.23)$$

$$y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad (7.24)$$

ergibt sich für den Kegelschnitt im  $x', y'$ -System die Gleichung:

$$\frac{(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - x_0)^2}{a^2} + \frac{(-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7.25)$$

Wenn man die allgemeine Gleichung 2. Grades in der Form

$$a_1 x^2 + 2 a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0 \quad (7.26)$$

schreibt, ergibt sich für die Koeffizienten  $a_i$ :

$$a_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}, \quad (7.27)$$

$$a_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{b^2}, \quad (7.28)$$

$$a_3 = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}, \quad (7.29)$$

$$a_4 = -\frac{x_0 \cos \alpha}{a^2} + \frac{y_0 \sin \alpha}{b^2}, \quad (7.30)$$

$$a_5 = -\frac{x_0 \sin \alpha}{a^2} - \frac{y_0 \cos \alpha}{b^2}, \quad (7.31)$$

$$a_6 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1. \quad (7.32)$$

## 7.2.2 Fließkurve in der hydrostatischen Ebene

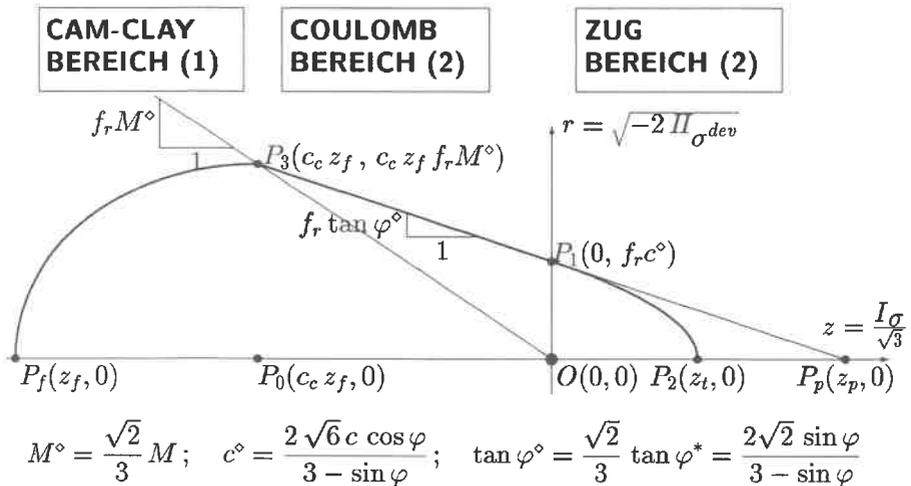


Bild 7.3: Bereiche und Bezeichnungen in der hydrostatischen Ebene

### Kappe im Druckbereich (Camclay-cap)

In dem modifizierten Camclay-Modell (SCHAD 1979) ergibt sich für die Ellipse:

$$z_0 = c_c z_f, \quad (7.33)$$

$$a = (1 - c_c) z_f, \quad (7.34)$$

$$b = f_r M^\circ c_c z_f. \quad (7.35)$$

Der Korrekturparameter zur Anpassung an Versuchsergebnisse wird bei SCHAD (1979) mit  $c_r$  bezeichnet. Um deutlich zu machen, daß sich dieser Parameter auf die Camclay-Kappe bezieht, wird in dieser Arbeit die Bezeichnung  $c_c$  verwendet.

Da der Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse liegt und die Ellipsenachsen parallel zu den Achsen des Koordinatensystems sind, ergibt sich für die Koeffizienten der allgemeinen Gleichung 2. Grades:

$$a_1 = \frac{1}{[(1 - c_c) z_f]^2},$$

$$a_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{1}{(f_r M^\circ c_c z_f)^2}, \\
 a_4 &= -\frac{c_c}{(1 - c_c)^2 z_f}, \\
 a_5 &= 0, \\
 a_6 &= \left(\frac{c_c}{1 - c_c}\right)^2 - 1.
 \end{aligned}$$

Somit lautet die Kegelschnittgleichung in der allgemeinen Form:

$$\frac{z^2}{(1 - c_c)^2} + \frac{r^2}{(f_r M^\circ c_c)^2} + \frac{c_c z_f z}{(1 - c_c)^2} + \left[\left(\frac{c_c}{1 - c_c}\right)^2 - 1\right] z_f^2 = 0. \quad (7.36)$$

Die Ableitungen nach  $r$ ,  $z$  und  $z_f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2r}{(f_r M^\circ c_c)^2}, \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z - c_c z_f}{(1 - c_c)^2}, \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_f} = 2 \left[ \left(\frac{c_c}{1 - c_c}\right)^2 - 1 \right] z_f. \quad (7.39)$$

### Bereich des Kegels (Coulomb-Bereich)

Da es für die Programmierung wichtig ist, die Fließkurve in allen Bereichen einheitlich darzustellen, wird die Gerade in diesem Bereich formal wie eine Kurve 2. Ordnung dargestellt.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0, \\
 a_2 &= 0, \\
 a_3 &= 0, \\
 a_4 &= f_r M^\circ, \\
 a_5 &= 1, \\
 a_6 &= (f_r M^\circ - \tan \varphi^\circ) c_c z_f.
 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Somit lautet die Kegelschnittgleichung in der allgemeinen Form:

$$f_r M^\circ z + r + (f_r M^\circ - \tan \varphi^\circ) c_c z_f = 0. \quad (7.41)$$

Die Ableitungen nach  $r, z$  und  $z_f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_r M^\circ, \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_f} = (f_r M^\circ - \tan \varphi^\circ) c_c. \quad (7.44)$$

### Kappe im Zugbereich (Tension-cut-off-cap)

In diesem Bereich gilt auf Grund der Festlegungen von Bild 7.3:

$$\begin{aligned} z_f &= \overline{OP_f}, \\ c^\circ &= \overline{OP_1} = c_c z_f f_r (M^\circ - \tan \varphi^\circ), \\ z_p &= \overline{OP_p} = -\frac{c^\circ}{\tan \varphi^\circ} = c_c z_f \left(1 - \frac{M^\circ}{\tan \varphi^\circ}\right), \\ z_t &= \overline{OP_2} = z_p (1 - c_t). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Da eine Achse des Kegelschnitts parallel zur  $r$ -Achse ist und eine auf der  $z$ -Achse liegt, werden  $a_2 = 0$  und  $a_5 = 0$ . Somit lautet die Gleichung für die Kurve 2. Ordnung:

$$a_1 z^2 + a_3 r^2 + 2 a_4 z + a_6 = 0. \quad (7.46)$$

Mit den Koordinaten von  $P_1(0, c^\circ)$  und  $P_2(0, z_t)$ :

$$a_3 c^{\circ 2} + a_6 = 0, \quad (7.47)$$

$$a_1 z_t^2 + 2 a_4 z_t + a_6 = 0, \quad (7.48)$$

und den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 a_1 z + 2 a_4 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 2 a_3 r$$

ergibt sich die Steigung  $M^\circ$  bei  $P_1$  zu

$$-\frac{a_1 z + a_4}{a_3 r} = -\frac{a_4}{a_3 c^\circ} = M^\circ \quad \longrightarrow \quad a_4 = -a_3 c^\circ M^\circ. \quad (7.49)$$

Wählt man  $a_6 = -1$ , ( $a_6$  ist bewußt negativ gesetzt, damit der sich aus  $\partial f/\partial z$  und  $\partial f/\partial r$  ergebende Normalenvektor nach „außen“ gerichtet ist), ergeben sich aus den Gleichungen (7.47), (7.49) und (7.48) folgende Gleichungen für  $a_3$ ,  $a_4$  und  $a_1$ :

$$a_3 = \frac{1}{c^{\circ 2}}, \quad (7.50)$$

$$a_4 = -\frac{M^\circ}{c^\circ}, \quad (7.51)$$

$$a_1 = -\frac{2a_4}{z_t} + \frac{1}{z_t^2}. \quad (7.52)$$

Ausgedrückt in  $z_p$ ,  $z_t$  und  $c_t$  folgt:

$$a_4 = \frac{1}{z_p},$$

$$a_1 = \frac{-2(1-c_t) + 1}{z_t^2} = \frac{2c_t - 1}{z_t^2},$$

$$a_1 = \frac{2c_t - 1}{[(1-c_t)z_p]^2},$$

---


$$\frac{2c_t - 1}{(1-c_t)^2 z_p^2} z^2 + \frac{r^2}{c^{\circ 2}} + 2\frac{z}{z_p} - 1 = 0. \quad (7.53)$$


---

Da  $a_1 = 0$ , wenn  $c_t = 1/2$ , wird die Fließkurve in diesem Fall zu einer Parabel; für  $c_t < 1/2$  eine Hyperbel und für  $c_t > 1/2$  eine Ellipse. Drückt man  $z_p$  und  $c^\circ$  über  $z_f$ ,  $f_r$  und die Materialparameter aus, erhält man:

$$a_4 = \frac{\tan \varphi^\circ}{c_c z_f (\tan \varphi^\circ - M^\circ)}, \quad (7.54)$$

$$a_1 = \frac{a_4^2 (2c_t - 1)}{(1-c_t)^2}, \quad (7.55)$$

$$a_3 = \frac{1}{[c_c z_f f_r (M^\circ - \tan \varphi^\circ)]^2}. \quad (7.56)$$

$$(7.57)$$

Bringt man Gleichung der Fließkurve auf die Form

$$\frac{(z - z_0)^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1,$$

ergibt sich:

$$\left(z + \frac{a_4}{a_1}\right)^2 + \frac{a_3}{a_1} r^2 = \frac{1}{a_1} + \left(\frac{a_4}{a_1}\right)^2.$$

Somit erhält man:

$$a^2 = \frac{a_1 + a_4^2}{a_1^2}, \quad (7.58)$$

$$b^2 = \frac{a_1}{a_3} a^2, \quad (7.59)$$

$$z_o = -\frac{a_4}{a_1}. \quad (7.60)$$

### Ableitung der Fließkurve im Zug-Bereich nach $z_f$

Aufgrund der Kettenregel kann man schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial z_f} = \frac{\partial f}{\partial z_p} \frac{\partial z_p}{\partial z_f} + \frac{\partial f}{\partial c^\circ} + \frac{\partial c^\circ}{\partial z_f}.$$

Aus den Gleichungen (7.45) und (7.53) ergeben sich die erforderlichen Gleichungen zur Ermittlung von  $\partial f / \partial z_f$  als Funktion von  $z_f$  und den Materialparametern:

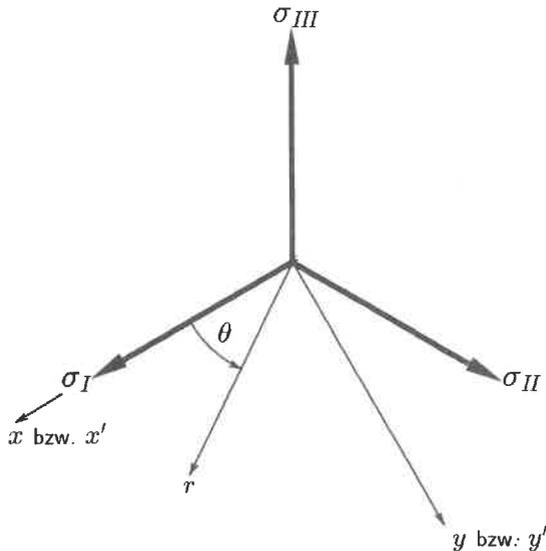
$$\frac{\partial c^\circ}{\partial z_f} = c_c f_r (M^\circ - \tan \varphi^\circ), \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial z_f} = c_c \left(1 - \frac{M^\circ}{\tan \varphi^\circ}\right), \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c^\circ} = -2 \frac{r^2}{c^{\circ 3}}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_p} = -\frac{2z}{z_p^2} \left( \frac{2c_t - 1}{(1 - c_t)^2} \frac{z}{z_p} + 1 \right). \quad (7.64)$$

### 7.2.3 Ermittlung der Normalen auf die Fließfläche



**Bild 7.4:** Normale auf die Fließfläche und Transformation

Aus den Ableitungen der Fließkurven in der deviatorischen bzw. der hydrostatischen Ebene wird zunächst die Flächennormale im  $x, y, z$ -Koordinatensystem berechnet und dann in das  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ -System transformiert. Für die Deviatorebene wird berechnet:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{dev} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad (7.65)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{dev} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta. \quad (7.66)$$

Mit der Einführung von  $f_n = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{hyd} / \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{dev}$  (7.67)

ergibt sich der Normalenvektor  $n' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} f_n \\ \frac{\partial f}{\partial y} f_n \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$  (7.68)

Die Länge des Normalenvektors ist

$$l = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} f_n\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} f_n\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \quad (7.69)$$

$$l = f_n \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_n} \frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}_{l'}. \quad (7.70)$$

Somit ergibt sich der Einheitsnormalenvektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} / l' \\ \frac{\partial f}{\partial y} / l' \\ \frac{\partial f}{\partial z} / (f_n l') \end{pmatrix}. \quad (7.71)$$

und entsprechend die normierte Ableitung nach  $z_f$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_f}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) / (f_n l'). \quad (7.72)$$

Die Matrix  $\mathbf{Q}$  für die Transformation in das System der Hauptspannungen lautet:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (7.73)$$

### 7.3 Hinweise zur Programmierung der Fließfläche

Die Materialdaten werden auf einem Feld PROP gespeichert.

Nr.	Abkürzung	Bedeutung	im Code
1 – 16	$C$	Komponenten des Elastizitätstensors in Matrixform (4,4)	CMAT
17	$E$	Elastizitätsmodul	EMOD
18	$\nu$	Querdehnungszahl (Poisson's ratio)	ANUE
19	$c$	Kohäsion	COHES
20	$\varphi$	Reibungswinkel	PHI
21	$c_r$	Korrekturwert (Extensions-/Kompressionsversuch)	CR
22	$c_p$	Fülligkeitsbeiwert	CP
101 – 124		Koordinaten der Brennpunkte in der Deviatorebene	FOCUSA(2,2,6)
125	$a$	großer Halbmesser der Ellipse	AELLI
126	$b$	kleiner Halbmesser der Ellipse	BELLI
127	$c$	Brennweite der Ellipse	FELLI

**Tabelle 7.3:** Datenorganisation für das elastoplastische Stoffgesetz

# Mitteilungen des Instituts für Geotechnik

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. U. Smolczyk

---

- |       |  |                     |  |                   |
|-------|--|---------------------|--|-------------------|
| Nr. 1 | Thamm, B.R.                                  | (1974)              | Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wassergesättigten Tones | DM 10,--          |
| Nr. 2 | Gußmann, P.                                  | (1975)              | Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch  | DM 5,--           |
| Nr. 3 | Feeser, V.                                   | (1975)              | Die Bedeutung des Kalziumkarbonats für die bodenphysikalischen Eigenschaften von Löß               | DM 10,--          |
| Nr. 4 | Du Thinh, K.                                 | (1976) <sup>4</sup> | Standsicherheit von Böschungen: Programm-Dokumentation   | <b>vergriffen</b> |
| Nr. 5 | Smolczyk, U./<br>Pertschi, O./<br>Hilmer, K. | (1976)              | Messungen an Schleusen in der UdSSR. Schleusennorm der UdSSR (SN 303-65)                           | <b>vergriffen</b> |
| Nr. 6 | Hilmer, K.                                   | (1976)              | Erddruck auf Schleusenkammerwände  | DM 18,--          |
| Nr. 7 | Laumans, Q.                                  | (1977)              | Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens | DM 18,--          |
| Nr. 8 | Lächler, W.                                  | (1977)              | Beitrag zum Problem der Teilflächenpressung bei Beton am Beispiel der Pfahlkopfanschlüsse          | DM 15,--          |

- |        |                                |        |  |          |
|--------|--------------------------------|--------|--|----------|
| Nr. 9  | Spotka, H.                     | (1977) | Einfluß der Bodenverdichtung mittels Oberflächen-Rüttelgeräten auf den Erddruck einer Stützwand bei Sand     | DM 15,-- |
| Nr. 10 | Schad, H.                      | (1979) | Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben | DM 20,-- |
| Nr. 11 | Ulrich, G.                     | (1980) | Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden                           |          |
|        | Gußmann, P.                    | (1980) | Zum Modellgesetz der Konsolidation   | DM 20,-- |
| Nr. 12 | Salden, D.                     | (1980) | Der Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten  | DM 25,-- |
| Nr. 13 | Seeger, H.                     | (1980) | Beitrag zur Ermittlung des horizontalen Bettungsmoduls von Böden durch Seitendruckversuche im Bohrloch       | DM 25,-- |
| Nr. 14 | Schmidt, H.H.                  | (1981) | Beitrag zur Ermittlung des Erddrucks auf Stützwände bei nachgiebigem Baugrund                                | DM 25,-- |
| Nr. 15 | Smolczyk, U.<br>Schweikert, O. | (1981) | Vorstudie über bauliche Alternativen für Durchgangsstraßen in Siedlungen                                     | DM 12,-- |
| Nr. 16 | Malcharek, K.<br>Smolczyk, U.  | (1981) | Vergleich nationaler Richtlinien für die Berechnung von Fundamenten  | DM 15,-- |

- |        |  |        |  |                   |
|--------|--|--------|--|-------------------|
| Nr. 17 | Gruhle, H.-D.                              | (1981) | Das Verhalten des Baugrundes unter Einwirkung vertikal gezogener Ankerplatten als räumliches Problem des Erdwiderstandes | DM 30,--          |
| Nr. 18 | Kobler, W.                                 | (1982) | Untersuchungen über Böschungs- und Grundbruch bei begrenzten Lastflächen   | DM 25,--          |
| Nr. 19 | Lutz, W.                                   | (1983) | Tragfähigkeit des geschlitzten Baugrunds neben Linienlasten  | DM 25,--          |
| Nr. 20 | Smoltczyk, U.                              | (1983) | Studienunterlagen "Bodenmechanik und Grundbau"; überarbeitete Ausgabe (1990)   | DM 40,--          |
| Nr. 21 | Schweikert, O.                             | (1984) | Der Einfluß des Böschungswinkels $\beta$ auf die Berechnung des aktiven Erd-drucks                                       | DM 20,--          |
| Nr. 22 | Vogt, N.                                   | (1984) | Erdwiderstandsermittlung bei monotonen und wiederholten Wandbewegungen in Sand   | <b>vergriffen</b> |
| Nr. 23 | Buchmaier, R.                              | (1985) | Zur Berechnung von Konsolidationsproblemen bei nichtlinearem Stoffverhalten  | DM 25,--          |
| Nr. 24 | Schad, H.                                  | (1985) | Möglichkeiten der Böschungssicherung bei kleinen Baugruben   |                   |
|        | Smoltczyk, U./<br>Schad, H./<br>Zoller, P. |        | Sonderkonstruktionen der Böschungssicherung  | DM 35,--          |
| Nr. 25 | Gußmann, P.                                | (1985) | Die Methode der Kinematischen Elemente   | DM 20,--          |

Nr. 26	Steinmann, B.	(1985)	Zum Verhalten bindiger Böden bei monotoner einaxialer Beanspruchung	DM 25,--
Nr. 27	Lee, S.D.	(1987)	Untersuchungen zur Standsicherheit von Schlitzten im Sand neben Einzel- fundamenten	DM 25,--
Nr. 28	Kolb, H.	(1988)	Ermittlung der Sohlreibung von Gründungskörpern unter horizon- talem kinematischen Zwang	DM 25,--
Nr. 29	Ochmann, H.	(1988)	Ebene Grenzzustände von Erd- böschungen im stochastischen Sicherheitskonzept	DM 25,--
Nr. 30	Breinlinger, F.	(1989)	Bodenmechanische Stoffgleichungen bei großen Deformationen sowie Be- und Entlastungsvorgängen	DM 30,--
Nr. 31	Smolczyk, U./ Breinlinger, F./ Schad, H./ Wittlinger, M.	(1989)	Beitrag zur Bemessung von Tunneln in offener Bauweise	DM 25,--
Nr. 32	Gußmann, P./ Schanz, T./ Smolczyk, U./ Willand, E.	(1990)	Beiträge zur Anwendung der KEM (Erddruck, Grundbruch, Stand- sicherheit von Böschungen)	DM 30,--
Nr. 33	Gruhle, H.-D.	(1990)	Der räumliche Erdwiderstand vor überwiegend horizontal belasteten Ankerplatten	DM 30,--
Nr. 34	Henne, J.	(1992)	Zur Bewehrung von verformten Bodenschichten durch Einsatz zugfester Geokunststoffe	

**in Vorbereitung**

- |        |                |        |  |
|--------|----------------|--------|--|
| Nr. 35 | Wittlinger, M. | (1992) | Ebene Verformungsuntersuchungen zur Weckung des Erdwiderstandes bindiger Böden<br><br><b>in Vorbereitung</b>                               |
| Nr. 36 | Schad, H.      | (1992) | Zeit- und geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten in der Geotechnik - Experimentelle Erfassung und numerische Analyse<br><br>DM 30,-- |
| Nr. 37 | Belz, I.       | (1992) | Zur Ermittlung dynamischer Bodenkennwerte in situ aus der Systemantwort des Erregers<br><br>DM 30,--                                       |

## Weitere Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik und seiner Mitarbeiter

---

- [1] Smolczyk, U. (1971) Studienunterlagen "Bodenmechanik und Grundbau".  
s.a. Mitteilungen des Instituts für Geotechnik  
Stuttgart (überarbeitete Ausgaben 1983, 1988)
- [2] Smolczyk, U. (1972) Über die kritische Höhe elastisch gebetteter  
Türme.  
Der Bauingenieur 47, S. 59-60.
- [3] Smolczyk, U. (1972) Bodenmechanik zwischen Naturwissenschaft  
und Technik.  
Der Bauingenieur 47, S. 73-80.
- [4] Smolczyk, U. (1972) Der Zugwiderstand von Pfählen.  
Der Bauingenieur 47, S. 144-145.
- [5] Smolczyk, U. (1972) Keupermechanik.  
Votr. Baugrundtagung, Stuttgart, S. 407-419.
- [6] Smolczyk, U./  
Gußmann, P. (1972) Zum Stellenwert der theoretischen  
Bodenmechanik.  
Votr. Baugrundtagung, Stuttgart, S. 551-579.
- [7] Gußmann, P. (1973) Ausgleichsvorgänge eindimensionaler  
Strömungen bei beliebiger Anfangsbedingung  
unter besonderer Berücksichtigung der Kon-  
solidation einseitig drainierter Tonschichten.  
Die Bautechnik 50, S. 20-25.
- [8] Thamm, B.R. (1973) Die "Cam-Clay"-Theorie und das "Critical-  
State"-Konzept.  
Der Bauingenieur 48, S. 311-314.
- [9] Gußmann, P./  
Spotka, H. (1973) Eindimensionale Konsolidation mehrschich-  
tiger Tonböden.  
Die Bautechnik 50, S. 265-272.
- [10] Thamm, B.R. (1973) Anwendung der Finite-Element-Methode zur  
Berechnung von Spannungen in wassergesät-  
tigten Böden.  
Der Bauingenieur 48, S. 370-374.

- [11] Gußmann, P. (1974) Different methods of evaluating the influence of seepage forces on slope stability. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 61-73.
- [12] Gußmann, P./Schad, H. (1974) Practical considerations in the application of finite element techniques to soil problems. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 74-90.
- [13] Gußmann, P./Spotka, H. (1974) One-dimensional consolidation of multi-layered clays. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 91-102.
- [14] Gußmann, P./Thamm, B.R. (1974) Two-dimensional consolidation of triaxial test specimen. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 103-117.
- [15] Schad, H. et al. (1974) Stresses in concrete caisson bells. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 118-121.
- [16] Smolczyk, U. (1974) Improved technique for foundations on slopes. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 122-129.
- [17] Smolczyk, U./Diem, P./Spotka, H. (1974) Pressure cell for the measurement of normal and shear stress. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 130-136.
- [18] Smolczyk, U./Ljöterud, L. (1974) Stabilizing sand grains by overhead water pressure in bell bottoms of caisson piles. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, S. 137-141.

Die Nummern 11 bis 18 enthält das o.g. Heft Geotechnik Nr. 2, das von der DEUTSCHEN GESELLSCHAFT FÜR ERD- UND GRUNDBAU E.V., Essen, zum Preis von DM 20.- verkauft wird.

- [19] Smolczyk, U. et al. (1975) Die Anwendung der Finiten Elemente in der Grundbaupraxis. CAD-Berichte Heft 1 der Gesellschaft für Kernforschung Karlsruhe.

- [20] Gußmann, P./  
Thamm, B.R. (1974) Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer  
Versuchsproben.  
Der Bauingenieur 49, S. 293-298.
- [21] Gußmann, P. (1974) Über den Einfluß unterschiedlicher Wasser-  
druckansätze auf die Standsicherheit von  
durchströmten Böschungen.  
Der Bauingenieur 49, S. 298-301.
- [22] Smolczyk, U./  
Gußmann, P./  
Schulz, H. (1974) DIN 4084 Beiblatt, Erläuterungen und  
Berechnungsbeispiele.  
20 S., Beuth-Verlag Berlin/Köln.
- [23] Laumans, Q. (1975) Die Anwendung der Methode finiter Elemente  
auf Flächengründungen.  
Technische Akademie Wuppertal, Heft 14.
- [24] Smolczyk, U. (1975) Graving Dock Foundation on Deep Fill.  
Proc. 1th Baltic Conf. SMFE, Gdansk,  
Vol. III, S. 213-222.
- [25] Smolczyk, U./  
Du Thinh (1975) Zur Bebaubarkeit von vorbelasteten Verwitte-  
rungsböden.  
Fortschritts-Berichte VDI-Z., Reihe 4, Nr. 25,  
70 S.
- [26] Smolczyk, U. (1975) Anmerkungen zum Gleitkreisverfahren.  
in: Festschrift Lorenz, TU Berlin, S. 203-218.
- [27] Smolczyk, U. (1975) Wie kann man Baugruben verbilligen?  
Der Architekt 2, S. 94-103.
- [28] Smolczyk, U. (1975) Schwierigkeiten beim Bauen im entfestigten  
Tonstein.  
Veröff. Inst. Felsmech. Bodenmech. Univer-  
sität Karlsruhe 63, S. 21-50.
- [29] Smolczyk, U. (1976) Pfahlgründung eines Eisenbahndammes.  
Proc. 6th Europ. Conf. SMFE, Wien,  
Vol. 1.2, S. 561-566.
- [30] Smolczyk, U./  
Hilmer, K. (1976) Erddruck auf Schleusenkamerwände.  
Votr. Baugrundtagung, Nürnberg, S. 245-265.
- [31] Smolczyk, U. (1976) Bau eines Großdocks; Baugrundverbesserung  
in tiefem Wasser.  
Votr. Baugrundtagung, Nürnberg, S. 575-592.

- [32] Laumans, Q./  
Schad, H. (1976) Calculation of Raft Foundations on Clayey Silts.  
Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. in Geomechanics, Blacksburg, Vol. 1, S. 475-488.
- [33] Smolczyk, U./  
Hilmer, K./  
Franke, E./  
Schuppener, B. (1977) Earth Pressure Variations Due to Temperature Change.  
Proc. 9th ICSMFE, Tokyo, Vol. 2, S. 225-233.
- [34] Smolczyk, U./  
Seeger, H. (1977) Lateral Deformation Testing in Keuper Marl Boreholes.  
Int. Symp. The Geotechnics of Structurally Complex Formations, Capri, Vol. 1, S. 443-447.
- [35] Smolczyk, U. (1978) Wagnis Baugrund.  
Deutsche Architekten- u. Ingenieurzeitschrift 8/9, S. 12-16.
- [36] Schad, H. (1978) Die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben.  
Vortr. Baugrundtagung, Berlin, S. 141-161.
- [37] Schulz, H./  
Smolczyk, U. (1978) Zur Ermittlung der Scherparameter überkonsolidierter Böden für Erddruckberechnungen.  
Vortr. Baugrundtagung, Berlin, S. 275-296.
- [38] Smolczyk, U. (1978) DFG-Schwerpunktprogramm Bodenmechanik.  
Geotechnik 1, S. 29-42.
- [39] Gußmann, P. (1978) Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von äußeren Kräften.  
Geotechnik 1, S. 68-74.
- [40] Hilmer, K./  
Vogt, N. (1978) Der Einfluß der Temperatur auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden.  
Geotechnik 1, S. 75-84.
- [41] Schmidt, H.H. (1978) Entwicklung einer Eignungsprüfung für Maßnahmen zum mittelfristigen Schutz des Erdplanums unter besonderer Berücksichtigung des von oben eindringenden Wassers.  
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.033 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Geotechnik Stuttgart.

- [42] Schmidt, H.H. (1978) Erprobung von Versiegelungen fein- und gemischtkörniger Böden auf bituminöser Basis unter Verwendung von Handelsprodukten. Forschungsbericht F.A. Nr. 5.034 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr.
- [43] Gußmann, P. (1979) Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus unterschiedlich drainierten Zeitsetzungs-Versuchen. Geotechnik 2, S. 148-154.
- [44] Smolczyk, U. (1979) Bestimmung der Baugrundfestigkeit mit der Seitendrucksonde. Vortragsband zum Pfahlsymposium, München 1977, S. 77-80.
- [45] Schmidt, H.H. (1979) Erddruck auf Widerlager und Stützmauern in Abhängigkeit von Untergrundbewegungen durch Dammschüttungen. Forsch.ber. FA 5.042 G 77 H, B. f. Verkehr.
- [46] Smolczyk, U. (1979) Zur Berechnung von Bodenreaktionskräften. Berichte Bundesvereinigung Prüfungenieure Baustatik, Arbeitstagung 4, S. 23-51.
- [47] Smolczyk, U./ Vogt, N./ Hilmer, K. (1979) Lateral Earth Pressure Due to Surcharge. Proc. 7th ECSMFE, Brighton, Vol. 2, S. 131-140.
- [48] Smolczyk, U. (1979) Influence of foundation depth on raft analyses. Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, Vol. 4, S. 1503-1512.
- [49] Smolczyk, U. (1979) Dammschüttung in Baggerseen beim Bau der Schnellbahnstrecke Mannheim-Stuttgart. 2. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, Fellbach, S. 113-119.
- [50] Smolczyk, U./ Gartung, E. (1979) Geotechnical Properties of a Soft Keuper Sandstone. Proc. 4th Int. Congr. Rock Mechanics, Montreux, S. 639-644.
- [51] Smolczyk, U./ Schmidt, H.H. (1979) Forschungsergebnisse von Erddruckuntersuchungen an Modellwänden. Tagung der Arbeitsgruppe Untergrund der Forschungsges. f. d. Straßenwesen, Koblenz.

- [52] Smoltczyk, U. (1980) Internationale Vereinbarungen; Klassifizierung des Fachschrifttums und Symbole. Baugrundgutachten. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.1, 1.2, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [53] Gußmann, P./Schad, H. (1980) Numerische Verfahren in der Bodenmechanik. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.7, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [54] Smoltczyk, U./Gußmann, P. (1980) Berechnung von Zeitsetzungen. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.10, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [55] Smoltczyk, U. (1980) Untersuchung von Gründungsschäden unter Hinzuziehung von mineralogischen Untersuchungen. VDI-Seminar "Erkenntnisse aus Schäden im Tiefbau".
- [56] Smoltczyk, U. (1980) Erfahrungen mit der Stuttgarter Seitendrucksonde. III. Int. Symp. DDR-Komitee Bodenmechanik Grundbau Dresden, S. 22-28.
- [57] Smoltczyk, U. (1980) Beitrag zu den Thesen zu Problemen der lastbedingten Baugrundverformungen. III. Int. Symp. DDR-Komitee Bodenmechanik Grundbau Dresden, S. 58-61.
- [58] Buchmaier, R./Smoltczyk, U./Schad, H. (1980) Einfluß einer Mudde-Linse auf die Verschiebungen einer hinterfüllten Uferwand. Proc. 6th Donaueurop. CSMFE, Varna, Vol. 1a, S. 65-74.
- [59] Malcharek, K. (1981) Unterwasser-Sprengverdichtung - Polnische Praxis. Geotechnik 3, S. 190-192.
- [60] Smoltczyk, U./Malcharek, K. (1981) Lebendverbau von Steilböschungen. Tiefbau, Ingenieurbau, Straßenbau 23, S. 396-400.
- [61] Smoltczyk, U. (1981) Saving cities and old buildings. State-of-the-art Report, 10th ICSMFE, Stockholm, Vol. 4, S. 441-465.

- [62] Gußmann, P./ Lutz, W. (1981) Schlitzstabilität bei anstehendem Grundwasser. Geotechnik 4, S. 70-81.
- [63] Kunz, B. (1981) Methodenbank im Grundbau (MIG). Schlußbericht S-SMO/103 des Instituts für Geotechnik Stuttgart, CAD-Projekt Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- [64] Salden, D. (1981) Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten. Geotechnik 4, S. 137-144.
- [65] Melzer, K.-J./ Smoltczyk, U. (1982) Dynamic penetration testing. State-of-the-art Report, Proc. 2nd ESOPT, Amsterdam, Vol. 1, S. 191-202.
- [66] Smoltczyk, U./ Malcharek, K. (1982) Living Sheets on Steep Slopes. Proc. 2nd Int. Conf. Geotextiles, Las Vegas, Vol. 1, S. 253-257.
- [67] Steinmann, B. (1982) Consolidation testing of Opalinuston with different types of drainage. Proc. Int. Symp. Num. Models Geomechanics, Zürich, S. 280-285.
- [68] Smoltczyk, U. (1982) Use of non-linear constitutive soil models in engineering practice. Some personal experiences. Proc. Int. Symp. Num. Models Geomechanics, Zürich, S. 535-548.
- [69] Vogt, N. (1982) Large scale model tests with partial mobilization of the passive earth pressure and cyclic movements of the wall. Proc. IUTAM Conf. Deformation Failure Granular Materials, Delft, S. 643-652.
- [70] Smoltczyk, U. (1982) Verkantung von Brückenpfeilern infolge Baugrund-Elastizität. Proc. 10. Geotechn. Konferenz, Brünn, CSSR, S. 408-415.
- [71] Smoltczyk, U./ Netzel, D. (1982) Flachgründungen. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.1, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.

- [72] Smolczyk, U. (1982) Unterfangungen und Unterfahrungen. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.3, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [73] Smolczyk, U./ Hülmer, K. (1982) Baugrundverbesserung. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.5, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [74] Schenck, W./ Smolczyk, U./ Lächler, W. (1982) Pfahlroste, Berechnung und Konstruktion. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.12, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [75] Schenck, W./ Smolczyk, U. (1982) Gründungen im offenen Wasser. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.17, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [76] Gußmann, P. (1982) Kinematical Elements for Soil and Rocks. Proc. 4th Conf. Num. Meth. Geomechanics, Edmonton, Canada, Vol. 1, S. 47-52.
- [77] Gußmann, P. (1982) Application of the Kinematical Element Method to Collapse Problems of Earth Structures. Proc. IUTAM Symp. Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, S. 545-550.
- [78] Smolczyk, U. (1983) Deep Compaction. General Report: 8th ECSMF, Helsinki, Vol. 3, S. 1105-1116.
- [79] Smolczyk, U. (1983) Axiale Pfahl-Probebelastung: Empfehlungen für die Durchführung. Geotechnik 6, S. 174-195.
- [80] Gußmann, P. (1983) Stabilität von suspensionsgestützten Schlitzten unter statischen Lasten. Proc. 7th Donaueurop. CSMFE, Kishinev, UdSSR, Vol. III, S. 55-60.
- [81] Smolczyk, U./ Malcharek, K. (1984) Naturgerechte Sicherung von Steilböschungen. Geotechnik 7, S. 117-129.
- [82] Smolczyk, U. (1984) Wie sicher müssen Altbauten sein? Geotechnik 7, S. 174-181.
- [83] Smolczyk, U. (1984) Zur Berechnung der rückverhängten Erdwand. Geotechnik 7, S. 214.

- [84] Smolczyk, U. (1984) Neues Verfahren zur Sicherung von Steilböschungen mit Hilfe von Geotextilien. Proc. 23. Int. Chemiefasertagung, Dornbirn, S. 551-569.
- [85] Gußmann, P./ Ochmann, H. (1985) Probabilistic Theory and Kinematical Element Method. Proc. 11th ICSMFE, San Francisco, U.S.A., Vol. 2, S. 825-829.
- [86] Smolczyk, U./ Salden, D./ Majchrzyk, K. (1985) Determination of the Shear Strength of Partially Decomposed Mudstone. Proc. 11th ICSMFE, San Francisco, U.S.A., Vol. 2, S. 1055-1059.
- [87] Smolczyk, U./ Malcharek, K. (1985) Slope protection by membrane structures. Geotextiles and Geomembranes, Vol. 2, S. 323-336.
- [88] Smolczyk, U. (1985) Axial Pile Loading Test - Part 1: Static Loading. Geotechnical Testing Journal, Vol. 8, S. 79-90.
- [89] Schad, H. (1985) Computing Costs for FEM Analysis of Foundation Engineering Problems and Possible Ways of Increasing Efficiency. Int. Journ. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 9, S. 261-275.
- [90] Smolczyk, U. (1985) Neue Erfahrungen mit der Seitendrucksonde. Geotechnik 8, S. 109-114.
- [91] Smolczyk, U. (1985) Vor 100 Jahren: Reynolds beschreibt die Dilatanz. Geotechnik 8, S. 208-209.
- [92] Gußmann, P. (1986) Kinematical Element Method for 3D-Problems in Geomechanics. Proc. ECONMIG 86, Stuttgart, Vol. 2.
- [93] Smolczyk, U./ Schad, H. (1986) Steigerung der Arbeitssicherheit und Umweltfreundlichkeit bei der Böschungssicherung. Die Bautechnik 63, S. 289-294.
- [94] Smolczyk, U. (1986) Zur Bewehrung des Bodens mit Geotextilien und Drahtgeweben. Proc. 14. Geotechn. Konferenz, Brünn, CSSR, S. 118-125.

- [95] Baumann, J./ Ochmann, H. (1986) Erdstatische Sicherheitsbewertung von Erd-dämmen an Speicherbecken. Votr. Baugrundtagung, Nürnberg, S. 261-273.
- [96] Breinlinger, F. (1987) The finite element method as design aid for tunnels built in open cuts. Review 1st Young Geotechn. Engrs. Conf. YGEC '87, Copenhagen, Denmark, S. 1-9.
- [97] Gußmann, P. (1987) Kinematical Element Method in Soil Mechanics. Proc. NUMEG 87, Vysoke Tatry, CSSR, Vol. 1, S. 116-128.
- [98] Gußmann, P. (1987) Böschungsgleichgewicht im Lockergestein. Grundbautaschenbuch, Teil 3, Abschn. 3.2, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [99] Smolczyk, U. (1987) Stützmauern. Grundbautaschenbuch, Teil 3, Abschn. 3.7, 3. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [100] Smolczyk, U. (1987) Underpinning, Part 54 in: Ground Engineers Reference Book. Butterworths, London.
- [101] Smolczyk, U. (1987) Zum Einfluß der Einbindetiefe auf den rechnerischen Nachweis der Tragfähigkeit von Einzelfundamenten. Geotechnik 10, S. 153-155.
- [102] Schad, H./ Breinlinger, F. (1988) Experiences with the analysis of geotechnical problems solved by the FEM using different equation solvers on several computers. Proc. 6th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Vol. 1, S. 183-187.
- [103] Gußmann, P. (1988) KEM in Geomechanics. Proc. 6th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Vol. 2, S. 823-828.
- [104] Smolczyk, U. (1988) 10 Jahre 'Geotechnik'. Geotechnik 11, S. 124-132.
- [105] Smolczyk, U. (1988) Quo vadis, DIN 1054 ? Geotechnik 11, S. 215-221.

- [106] Gußmann, P. (1989) Praktische Berechnungen mit KEM.  
in: Berichte zum Schlußkolloquium des  
DFG-Schwerpunktprogramms "Nichtlineare  
Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau".  
Springer-Verlag, S. 605-626.
- [107] Gußmann, P. (1989) Application of the KEM to different limit  
load problems.  
European Mechanics Colloquium/248:  
"Non Linear Soil-Structure Interaction".  
Grenoble, S. 86-89.
- [108] Henne, J. (1989) Versuchsgerät zur Ermittlung der Biegezug-  
festigkeit von bindigen Böden.  
Geotechnik 12, S. 96-99.
- [109] Salden, D. (1989) Bestimmung der Scherfestigkeit künstlich  
verdichteter Schüttungen aus Ton- und  
Schluffsteinen.  
7. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie,  
Bensheim, S. 99-106.
- [110] Smolczyk, U./  
Kolb, H. (1989) Analysis of ground friction mobilized by  
raft prestressing.  
Proc. 12th ICSMFE, Rio de Janeiro,  
Vol. 1, S. 723-726.
- [111] Gußmann, P./  
Schanz, T. (1989) KEM-Nachweise im Grundbau.  
Geotechnik 12, S. 127-133, sowie  
Mitteilungen des IGS, Heft 32; Teil 2.
- [112] Smolczyk, U. (1989) Einfluß des Bauverfahrens auf den  
Erkundungsumfang bei Tiefgründungen.  
Proc. 17. Geotechn. Konferenz, Brünn,  
CSSR, S. 8-13.
- [113] Gußmann, P. (1989) Vergleich von Böschungsbruch und Grund-  
bruch unter Einbeziehung der KEM.  
Vortrag Ohde-Kolloquium, TU Dresden,  
S. 41-64.
- [114] Smolczyk, U./  
Schad, H. (1990) Zur Diskussion der Teilsicherheitsbeiwerte  
für den Grundbruchnachweis.  
Geotechnik 13, S. 41-43.
- [115] Smolczyk, U. (1990) European Geotechnics in the Nineties.  
ISSMFE News, Vol. 17, No. 2, March 1990.

- [116] Smolczyk, U. (1990) Internationale Vereinbarungen; Baugrundgutachten. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.1, 1.2, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [117] Gußmann, P. (1990) Berechnung von Zeitsetzungen. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.9, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [118] Gußmann, P./ Schad, H. (1990) Numerische Verfahren. Grundbautaschenbuch, Teil 1, Abschn. 1.11, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [119] Smolczyk, U. (1990) Die DGEG in den neunziger Jahren. Geotechnik 13, S. 121-122.
- [120] Breinlinger, F./ Schad, H. (1990) Extension of an elastoplastic double hardening model to viscoplasticity within the frame of finite strains. Proc. 2nd Europ. Spec. Conf. on Num. Meth. in Geotechnical Engineering, Santander, S. 71-82.
- [121] Gußmann, P./ Lee, S.D. (1990) 3D - Bearing capacity of pad foundations next to slurry trenches. Proc. 2nd Europ. Spec. Conf. on Num. Meth. in Geotechnical Engineering, Santander, S. 599-609.
- [122] Smolczyk, U. (1990) Geotechnics - Research and Reality Proc. 9. Donaueurop. Konferenz, Budapest, S. 31-37.
- [123] Henne, J. (1990) Kriterien zur bodenmechanischen Bewertung der Basisabdichtung von Mülldeponien auf kompressiblem Untergrund. Proc. 9. Donaueurop. Konferenz, Budapest, S. 489-494.
- [124] Smolczyk, U./ Henne, J. (1990) Versuchsgerät zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit und Grenzdehnung von bindigen Böden. 3. Intern. KfK/TNO Kongress über Altlasten, Karlsruhe, Band II, S. 1383-1384.
- [125] Schad, H./ Breinlinger, F. (1991) Numerical analysis of visco-elastoplastic soil behaviour considering large deformations. Proc. 10th ECSMFE, Florenz, Italien, Vol. 1, S. 255-260.

- [126] Smolczyk, U./ Henne, J. (1991) Criteria for evaluating geotextile-reinforced clay liners supporting wastes on compressible foundations - Summary of an ongoing study. Proc. 10th ECSMFE, Florenz, Italien, Vol. 2, S. 563-567.
- [127] Smolczyk, U./ Wittlinger, M. (1991) Passive earth pressure of cohesive soils (mobilisation): Summary of an ongoing study. Proc. 10th ECSMFE, Florenz, Italien, Vol. 2, S. 749-752.
- [128] Smolczyk, U./ Hilmer, K. (1991) Baugrundverbesserung. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.1, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [129] Smolczyk, U. (1991) Unterfangungen und Unterfahrungen. Grundbautaschenbuch, Teil 2, Abschn. 2.3, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [130] Smolczyk, U. (1991) Probleme der Harmonisierung der europäischen Baugrundnormen. Ohde-Kolloquium Berlin, Vorträge, S. 1-13.
- [131] Smolczyk, U./ Schad, H./ Willand, E. (1991) Borehole-Jack investigations in frozen ground of high strength. Proc. 7th Int. Congress on Rock Mechanics, Aachen, S. 615-618.
- [132] Smolczyk, U. (1991) Einsatzmöglichkeiten der FEM in der Grundbaupraxis. Finite Elemente, Anwendungen in der Baupraxis, S. 35-45, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [133] Smolczyk, U. (1992) Sicherung und Sicherheit von Hängen und Böschungen. Wechselwirkungen: Jahrbuch 1991 der Universität Stuttgart.
- [134] Smolczyk, U. (1992) Chances and Limits of FEM. Civil Engineering European Course, Computational Geotechnics, Delft.
- [135] Gußmann, P. (1992) Safety analysis and computation of safety factors. Civil Engineering European Course, Computational Geotechnics, Delft.
- [136] Gußmann, P./ Brinkgreve, R.B.J. (1992) Slope stability problems. Civil Engineering European Course, Computational Geotechnics, Delft.

- [137] Smolczyk, U./  
Henne, J. (1992) Kriterien zur bodenmechanischen Bewertung der Basisabdichtung von Mülldeponien auf kompressiblem Untergrund. Abschlußbericht zu Projekt Wasser-Abfall-Boden, PD87.057, Kernforschungszentrum Karlsruhe, PWAB-Bericht 11, März 1992, 123 Seiten.
- [138] Stolle, D.F./  
Schad, H. (1992) An update reference configuration formulation for large-deformation problems. Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 16, S. 295-306.
- [139] Smolczyk, U./  
Netzel, D. (1992) Flachgründungen. Grundbautaschenbuch, Teil 3, Abschn. 1, 4. Auflage, Verlag W. Ernst & Sohn.
- [140] Lächler, W./  
Mangold, K./  
Schad, H. (1992) Deformation and seepage analysis in a waste deposit by FEM. 2nd Czechoslovak Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Prag.
- [141] Schad, H. (1992) Numerical analysis of multi-storey buildings founded on Frankfurt-Clay. Invited lecture for 2nd Czechoslovak Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Prag.
- [142] Smolczyk, U./  
Ma, J./  
Thaier, M. (1992) Untersuchung von Böschungs-Stützscheiben durch Zentrifugen-Modellversuche. Votr. Baugrundtagung, Dresden.

# Errata

Es ist zu setzen:

---

Seite 3, 4. Absatz, 1. Zeile: Theamas für *Theams*

Seite 4, 3. Absatz, 6. Zeile:  
humorvoll für *homorvoll*

Seite 4, 3. Absatz, 8. Zeile:  
Assistentenzeit für *Assistenzeit*

Seite 17, 5. Zeile:  
Karlsruhe für *Karlruhe*

Seite 48, 5. Absatz, 2. Zeile:  
Versuchsergebnissen für *Versuchergebnissen*

Seite 54, 2. Absatz, 4. Zeile:  
Phänomene für *Phänomens*

Seite 56, 2. Absatz, 4. Zeile: Bild 2.5 für *Bild ??*

Seite 57, letzte Zeile:  
Hyperfläche für *Hyperflache*

Seite 64, 3. Absatz, 4. Zeile:  
nichtassozierten für *nichtassozierten*

Seite 67, 1. Absatz, 3. Zeile:  
Festlegungen für *Festlegungungen*

Seite 81, 1. Absatz, 8. Zeile: jedoch für *jeoch*

Seite 112, letzte Zeile:  
zweckmäßig für *zweckäBig*

Seite 140, vorletzte Zeile: in-situ für *in in-situ*