



BAUGRUNDINSTITUT
STUTT GART

1986
MITTEILUNG 25

PETER GUSSMANN

DIE METHODE DER
KINEMATISCHEN ELEMENTE

Das Baugrundinstitut ist unter der Bezeichnung
"Institut für Grundbau und Bodenmechanik"
eine Einrichtung der Universität Stuttgart

ISBN 3-921837-25-1

Gegen Vervielfältigung und Übersetzung bestehen keine
Einwände, es wird lediglich um Quellenangabe gebeten.
Herausgegeben 1986 im Eigenverlag des Baugrundinstituts.

Vorwort des Herausgebers

Seit einigen Jahren ist die "Methode der Kinematischen Elemente" bei den Grundbauingenieuren im Gespräch, aber noch nicht so recht in der Anwendung. man sieht zwar ein, daß die Ausdehnung des Erddruckansatzes, wie ihn COULOMB vor 200 Jahren für ein Element entwickelte, auf mehrere Elemente im Zeitalter der elektronischen Datenverarbeitung geboten sei und sich dabei entscheidene Verbesserungen beim Nachweis der Tragfähigkeit von Gründungen und Stützbauwerken erzielen lassen müßten, doch fehlt es einfach an Erfahrung, wie man bei aus mehreren Elementen bestehenden Bruchmechanismen zu eindeutigen und prüfbaren Lösungen kommen kann.

Ich freue mich daher, daß Herr Professor Gußmann, der dieses Verfahren für zwei- und dreidimensionale Zustände bis zur praxisgerechten Programmreife aus ihren theoretischen Anfängen heraus entwickelt hat, mit der vorliegenden Zusammenstellung der Fachwelt eine Gelegenheit bietet, sich mit Theorie und Anwendung der KEM auseinanderzusetzen.

Smoltczyk

Vorwort des Autors

Die Methode der Kinematischen Elemente wurde von mir 1981 in den Grundzügen entwickelt, programmiert und auf verschiedene Grundbauprobleme angewandt. Sowohl die Theorie als auch die Programmierung waren zu diesem Zeitpunkt unvollständig. Durch zwei Forschungsaufträge der DFG (Nr. Gu 185/2-1 und Gu 185/5-1) wurde die Weiterentwicklung finanziell unterstützt durch Bereitstellung von Hardware (PC mit Periferie-Geräten) und Finanzierung von wissenschaftlichen Hilfskräften. Hierfür sei der DFG gedankt. Allen Mitarbeitern, die vor allem Beispiele erarbeiteten und auch Programmierarbeit leisteten sei an dieser Stelle mein Dank ausgesprochen. Besonders hervorheben möchte ich die in Form von Diplom-Arbeiten geleisteten Beiträge der Herren cand-Ing. M. Friese und M. Hertkorn, Frau cand-Ing. B. Herold und den Herren cand-Ing. S. Klenk und W. Hofer, sowie die sonstigen Beiträge der Herren cand-Ing. E. Schanz, G. Brümmel und T. Schanz.

Für die Mitarbeit meiner Kollegen Herrn Dipl.-Ing. O. Schweikert, Herrn Dipl.-Ing. S.D. Lee und Herrn Dipl.-Ing. H. Ochmann bedanke ich mich ebenfalls sehr herzlich.

Gußmann

Zusammenfassung

Nach Aufzeigen der Grundlagen und Beschreibung der prinzipiellen Vorgehensweise der Kinematischen Element-Methode wird im Abschnitt 3 zunächst das ebene Problem behandelt. Die anschaulichste und deswegen für die Praxis wohl wichtigste Version (keine Dilatanz beim Abscheren) wird im Abschnitt 3.1 abgeleitet. Nach der Beschreibung der Geometrie über die Element-Eckpunkte können sowohl die Kinematik als auch die Statik über jeweils ein lineares Gleichungssystem ermittelt werden. Durch eine geeignete Elementnumerierung kann alternativ eine Folge von jeweils 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten gelöst werden. Der gesuchte Grenzzustand ergibt sich nach Definition der Zielfunktion durch eine Variation der Geometrie.

Kapitel 3.2 zeigt die Erweiterung auf Böden mit Dilatanz oder Kontraktanz. Sie wird aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen abgeleitet. Es zeigen sich dabei verschiedene Lösungsvarianten.

Kapitel 4 zeigt die Lösung des räumlichen Problems. Im Unterschied zum ebenen Problem kann die Richtung einer Scherkraft bei Kenntnis der Scherfuge nicht mehr skalar sondern nur vektoriell beschrieben werden. Dies erfordert formal eine etwas andere Beschreibung der Geometrie, Kinematik und Statik.

Die Behandlung von Problemen ohne Dilatanz führt wieder auf lineare Gleichungssysteme für die Kinematik und die Statik. Die dafür erforderlichen Formeln sind kaum komplizierter als die des ebenen Problems. Die Einbeziehung der Dilatanz hingegen führt auf quadratische Gleichungen mit gemischten Gliedern, die möglicherweise für die Praxis zu kompliziert sein könnten.

Kapitel 5 behandelt die Optimierung des Problems zur Minimierung der Zielfunktion durch Variation der Geometrie. Dieser Abschnitt dürfte von manchen Lesern als schwierig empfunden werden, weil die genannten Methoden nicht zum Standard der Mathematikausbildung von Ingenieuren gehören.

Kapitel 6 zeigt die Anwendung auf unterschiedliche Probleme. Manche der Ergebnisse sind neu und klären bisher vorhandene Widersprüche. Andere Ergebnisse bestätigen, daß verschiedene Lösungen nach dem Statischen Satz jetzt als vollständige Lösungen eingestuft werden können.

Durch die Vielzahl der unterschiedlichen Beispiele wird nach Ansicht des Verfassers eindrucksvoll die Effizienz des Verfahrens und die Praxis-Qualität nachgewiesen.

Summary

The report gives an introduction into the Kinematical Elements Method and shows the underlying fundamentals. The plane problem with sliding elements for a Coulomb-material is derived at first; it is regarded as the simplest and most important part of the method for engineering problems.

The general procedure consists of the following steps: design of an admissible failure mechanism of straight-line bounded rigid elements, describing the geometry with its nodal coordinates, solving the kinematics and statics with a system of linear equations each, defining the objective function as an energy term, minimization of the objective function with respect to several restrictions through a variation of the initial geometry (optimization).

Then, the extension to dilatant behaviour is derived.

The solution of the 3D-problem requires a slightly different formulation, because the direction of the shear forces must be expressed by vectors now. Nevertheless, the solution follows the general procedure in case of non-dilatant material.

A short chapter deals with optimization methods with emphasis to the Kem-problem.

The last part shows the application of the KEM to 18 various geotechnical problems in comparison to other solutions. It is believed that the KEM is a powerful tool which hopefully will become a standard procedure for any type of geotechnical limit state analysis.

Inhalt

	Seite
Schrifttum	8
Bezeichnungen	14
1. Einleitung	17
2. Die Kinematische Elemente-Methode	19
3. Das ebene Problem	21
3.1 Fließregel ohne Dilatanz	21
3.2 Fließregel mit beliebiger Dilatanz und Kontraktanz	36
3.3 Diskretisierungsfehler und Momentenbedingung	45
4. Das räumliche Problem	49
4.1 Geometrie	49
4.2 Kinematik	51
4.3 Statik	55
5. Optimierung	58
5.1 Nebenbedingungen	58
5.2 Lokale Minima bei nicht-konvexen Problemen	62
5.3 Strategien	63
5.4 Verfahren von Davidon	65
6. Anwendung und Beispiele	68
6.1 Aktiver Erddruck	69
6.2 Passiver Erddruck	76
6.3 Grundbruch	83
6.4 Böschungsbruch	91
6.5 Räumlicher Erdwiderstand	94

Schrifttum

- Azzouz, A.S. and Baligh, M.M. 1976 : Design charts of three-dimensional stability of cohesive slopes subjected to surcharge loads, Publication Nr. R 76-19, Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge, Mass.
- Azzouz, A.S. and Baligh, M.M. 1978 : Discussion on "Three-dimensional slope stability analysis method" by H.J. Hovland, J.Geotechn.Eng.Div., ASCE 104, 1206-1208
- Baumann, J. und Ochmann, H. 1986 : Erdstatische Sicherheitsbewertung von Erddämmen und Speicherbecken, Vorträge Baugrundtagung 1986 in Nürnberg, DGEG
- Bazaara, M.S./ Shetty, C.M. 1979 : Nonlinear Programming, John Wiley and Sons, New York
- Bishop, A.W. 1954 : The use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Earth Slopes, Proceedings of the European Conference on Stability of Earth Slopes, Stockholm, Geotechnique 1955, 7-17
- Box, M.J. 1965 : A new method of constrained optimization and a comparison with other methods, Comp.J.8, 42-52
- Coulomb, C.A. 1776 : Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, Mém. acad. royal des sciences, Vol.7, Paris
- Davidon, W.C. 1975 : Optimally conditioned Optimization Algorithms without Line Searches, Math. Programming, 9, S.1-30
- Davidon, W.C./ Nazareth, L. 1977 : DRVOCR - A FORTRAN Implementation of Davidon's Optimally Conditioned Method, Argonne National Lab., III. (USA)
- Davidon, W.C./ Nazareth, L. 1977 : OCOPTR - A Derivative Free Implementation of Davidon's Optimally Cond. Method, Argonne National Lab., III. (USA)
- Dennis, J.E./ Moré, J.J. 1977 : Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory, SIAM Review, Vol. 19, No.1, S. 46-89

- DIN 4017, 1983 : DIN-Taschenbuch 36, Erd- und Grundbau, 6.Auflage, Beuth-Verlag, Berlin
- DIN 4084, 1983 : DIN-Taschenbuch 36, Erd- und Grundbau, 6.Auflage, Beuth-Verlag, Berlin
- Drucker D.C./Greenberg H.J./Prager W. 1952 : Extended Limit Design Theorems for Continuous Media, Qu. Appl. Math. 9, 381
- Frémond, M./ Salençon J. 1972 : Limit Analysis by Finite- Element Methods, Proc. of the Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mechanics, Cambridge
- Gallagher, R.H./Zienkiewicz, O.C. 1973 : (Edit.) Optimum Structural Design, Wiley, London
- Goldscheider, M./Gudehus, G. 1974 : Verbesserte Standsicherheitsnachweise Vorträge Baugrundtagung, Frankfurt, S. 99-127
- Goldscheider, M. 1979 : Standsicherheitsnachweis mit zusammengesetzten Starrkörper- Bruchmechanismen, Geotechnik 2, H.3, S. 130-139
- Goldscheider, M./ Kolymbas, D. 1980 : Berechnung der Standsicherheit verankerter Stützwände, Geotechnik 3, H. 3, S. 93-105
- Gudehus, G. 1972 : Lower and Upper Bounds for Stability of Earth Retaining Structures, Proc. 5. ECSMFE Madrid, 1, S. 21-28
- Gudehus, G. 1980 : Erddruckermittlung - In : Smolczyk, U.(Hrsg), Grundbautechnische 3. Aufl., (Abschn. 1.12), Verlag W.Ernst u. Sohn Berlin
- Gußmann, P. 1978 : Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von äußeren Kräften, Geotechnik 1, S. 68-74
- Gußmann, P. 1982 : Kinematical Elements for Soils and Rocks, Proc. 4. Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech., Edmonton, S. 47-52
- Gußmann, P. 1982 : Application of the Kinematical Element Method to Collapse Problems of Earth Structures, IUTAM Conf. on Deform. and Failure of Granular Materials, Delft, S. 545-550

- Gußmann, P. 1983 : Kinematische Methoden - In: Smoltczyk, U., Studien-
unterlagen Bodenmechanik u. Grundbau, Univ. Stuttgart, Abschn. E3.06/07,
S. 135-143
- Gußmann, P. and Ochmann, H. 1985 : Probabilistic Theory and Kinematical
Element Method, Proc.11, Int.Conf. on Soil Mech. and Found.Eng., Vol.2,
Balkema, Rotterdam
- Gußmann, P. 1986 : Kinematical Element Method for 3-D-Problems in Geo-
mechanics, Proc. ECONMIG 86, Stuttgart 1986, Vol.2
- Gußmann, P. 1986 : Böschungsgleichgewicht im Lockergestein, in: Smoltczyk, U.
(Hrsg.), Grundbautaschenbuch 3.Aufl., Band 3, Abschn.3.2, Verlag Ernst u.
Sohn Berlin
- Hertkorn, M. 1984 : Diplomarbeit Nr.162 am Institut für Grundbau u. Boden-
mechanik der Universität Stuttgart
- Herzog, M. 1981 : Die Standsicherheit von Erd- und Felsbüschungen bei be-
liebiger Form der Rutschfläche, Bauingenieur 56, 89-95
- Hoek, E. and Bray, J.W. 1977 : Rock slope engineering, Revised second
edition, Stephen Austin and Sons Limited, Hertford
- Holzner, K.D. 1984 : Diplomarbeit Nr.168 am Institut für Grundbau u. Boden-
mechanik der Universität Stuttgart
- Hovland, H.J. 1977 : Three-dimensional slope stability analysis method,
J.Geotechn.Eng.Div., ASCE 103, 971-986
- Janbu, N. 1954 : Application of Composite Slip Surface for Stability Ana-
lysis, Proc. of the Europ.Con. on Stab. of Earth Slopes, Stockholm, 43-49
- Journal of Optimization - Theory and Application, Plenum Publishing Corp.
New York London
- Karal, K. 1977 : Application of Energy Method, ASCE Jnl. of the Geotech.
Eng. Div., S. 381-397

- Karal, K. 1977 : Energy Method for Soil Stability Analysis, ASCE Jnl. of
the Geotechn. Eng. Div., S. 431-445
- Kimura, T. and Kusakabe, O., Saitoh, K. 1985 : Geotechnical model tests of
bearing capacity problems in a centrifuge, Geotechnique 35, No.1, 33-45
- Künzi, H.P./Krelle, W./Randow, R.v. 1979 : Nichtlineare Programmierung,
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage
- Mathematical Programming - North Holland Amsterdam
- Nelder, J.A. and Mead, R. 1965 : A Simplex method for function minimization,
The Computer Journal 7, 308-313
- Ochmann, H. in Vorbereitung: Teilbeitrag der "Sicherheitsstudie auf probabi-
listischer Grundlage für Staudämme" des BMFT.
- Optimization - Akademie-Verlag Berlin
- Prandtl, L. 1920 : Über die Härte plastischer Körper, Nachr.Ges.wiss. Göttin-
gen
- Pregl, O. und Talmann 1978 : Tafeln zur Berechnung des passiven Erddrucks
und der Tragfähigkeit von Flachgründungen, Reihe Geotechnik, Heft 6
- Pregl, O. und Kristöfl, R. 1983 : Tragfähigkeitsbeiwerte, Reihe Geotechnik,
Heft 9
- Pregl, O. und Kristöfl, R. 1983 : Beiwerte für den passiven Erddruck, Geo-
technik 8
- Rechenberg, I. 1977 : Evolution Strategy: Optimization of technical systems
by virtue of principles of biological evolution, Fromann-Holzboog Verlag,
Stuttgart, (in German)
- Salden, D. 1980 : Der Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Funda-
menten, Mitt. Baugrundinst. Stuttgart Nr. 12
- Schittkowski, K. 1980 : Nonlinear Programming Codes - Lecture Notes in
Economics and Mathematical Systems, No. 183, Springer-Verlag Berlin

Schwefel, H.P. 1977 : Numerische Optimierung von Computer- Modellen mittels der Evolutionsstrategie, Verlag Birkhäuser

Schweikert, O. 1984 : Der Einfluß des Böschungswinkels auf die Berechnung des aktiven Erddrucks, Mitt. Baugrundinst. Stuttgart, H. 21

SIAM Journal on Control and Optimization

Smoltczyk, U. 1960 : Ermittlung eingeschränkt plastischer Verformungen im Sand unter Flachfundamenten, Verlag W. Ernst u. Sohn Berlin

Sokolovski, V.V. 1955 : Theorie der Plastizität, VEB Verlag Technik Berlin, Übersetzung aus dem Russischen (1.Aufl. 1946)

Sokolovski, V.V. 1960 : Statics of Soil Media, Butterworths Scientific Publications

Sturm, U./Mikota, H. 1983 : Anwendung der Statistischen Sicherheitstheorie am Beispiel der Grundbruchberechnung, Mitt. des Grundbauinstituts Berlin, H. 13

Sturm, U. 1983 : Persönlicher Kommentar

Terzaghi, K. 1943 : Theoretical Soil Mechanics, Verlag J. Wiley and Sons, New York

Vollenweider, U.G. 1970 : Beitrag zur Behandlung bodenmechanischer Grenzwertprobleme nach der Plastizitätstheorie, Diss. 4333 ETH Zürich, Julius-Druck + Verlag Zürich

Weißbach, A. 1962 : Der Erdwiderstand vor schmalen Druckflächen, Die Bau-technik 39, 204-211

Weißbach, A. 1961 : Der Erdwiderstand vor schmalen Druckflächen, Mitteilungen der Hannover'schen Versuchsanstalt für Grund- und Wasserbau, Franziusinstitut Hannover, 220-338

Weißbach, A. 1983 : Beitrag zur Ermittlung des Erdwiderstands, Bauingenieur 161-173, Springer-Verlag

Woldt, J. 1977 : Beitrag zur Standsicherheitsberechnung von Erddämmen, Schriftenreihe des Otto-Graf-Instituts, Heft 72, Universität Stuttgart.

Xiang Jiannan, 1985 : Three dimensional stability for rock slopes, Proceedings of the NUMETA'85 Conference/Swansea

ZOR Zeitschrift für Operation research, Physica-Verlag Würzburg, Wien

Bezeichnungen

Die verwendeten Bezeichnungen werden an der Stelle des ersten Auftretens im Text erläutert. Die wichtigsten, an mehreren Stellen auftretenden Bezeichnungen sind nachfolgend aufgeführt.

Die Gliederung folgt der inhaltlichen Einteilung.

Die Kenntnis der gebräuchlichen Bezeichnungen für den Abschnitt 6 (Anwendungen) wird vorausgesetzt.

KEM-ebenes Problem

A	Fläche
A	kinetische Arbeit/Energie
$\hat{A}$	äußere Arbeit
b	Vektor der Belastung pro Element
c	Kohäsion (Spannung)
C	Kohäsion (Kraft)
c,d,e,f	Element-Nummern
D	Dissipation in den Fugen
D	Determinante
E_a, E_p	aktiver, passiver Erddruck
f	Zielfunktion
F_s	Sicherheit nach Fellenius
F	Lastvektor
k	Reibungsmatrix im Element
K	Matrix für Gesamtstruktur, Reibungsmatrix in der Statik, Richtungskosinus in der Kinematik
l	Länge
m	Anzahl der Elemente
n	Anzahl der Unbekannten in der Kinematik bzw. in der Statik
N	Normalkomponente von S
N'	effektive Normalkraftkomponente
P	eingeprägte Kraft
Q	Resultierende von N' und R, Hauptunbekannte der Statik
q	Kräfte Q_i pro Element
Q	Vektor der unbekannten Kräfte Q_i pro Struktur
N_b, N_c	Tragfähigkeitsbeiwerte

R	Reibungskraft
R	Resultierende
S	Gesamtkraft in der Fuge
T	Tangentialkomponente von S
v	Verschiebung (virtuell)
$\hat{v}$	vorgegebene Randverschiebung
$\mathbf{v}$	Vektor der unbekannten Verschiebungen
$\hat{\mathbf{v}}$	Vektor der bekannten Randverschiebungen
x,z	kartesische Koordinaten, Komponenten
s	Seite, Kante
u	Porenwasserdruck (Spannung)
U	Porenwasserdruck (Kraft)
α	Neigung einer Strecke gegen +x-Achse
β	Böschungswinkel
γ	Wichte des Bodens
$\bar{\delta}$	Richtungsvorzeichen
δ	Wand oder Sohlreibungswinkel
φ, Φ	Reibungswinkel
ψ	Dilatanzwinkel
σ	Normalspannung
σ'	effektive Normalspannung
τ	Schubspannung

Indices

e/f	zwischen Element e und f
f	bezogen auf Element f
h,i,j,k	Knoten-Nummern
i,j	zwischen Knoten i und j
s	Kanten-Nummer
v	bezogen auf Kinematik
N	normal
T	tangential
t	transponiert

KEM-räumliches Problem

A, B, C, D	Parameter einer Ebenengleichung
x, y, z	kartesische Koordinaten
α, β, γ	Richtungswinkel der Normalen $\{n\}$
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$	Richtungswinkel des Relativverschiebungsvektors
l, m, n	Richtungskosinus der Normalen
$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$	Richtungskosinus des Relativverschiebungsvektors
p	Abstand einer Ebene vom Nullpunkt
$\{n\}$	Normale

Optimierung

A	Fläche
a, b, c, β	skalare Größen für das Optimierungsverfahren von Davidon
d	Vektor der Schrittweitenrichtungen
D	Korrekturmatrix von M
f	Zielfunktion
$\bar{f}$	Ersatzfunktion
g_j	Nebenbedingung
g	Gradient
g	Gradientenvektor
H	Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen
λ	skalarer Schrittweiten-Multiplikator
M	Näherungsmatrix zu H^{-1}
R	Resultierende
s	Schrittweiten-Vektor
x	Vektor der Optimierungsvariablen
y	Vektor der Gradienten-Änderungen
ω	Richtungswinkel von R

1. Einleitung

Zur Bestimmung der Traglast von Grundbauproblemen gibt es gemäß den klassischen Grenzwertsätzen der Plastizitätstheorie von Drucker/Greenberg/Prager (1952) die beiden Sätze:

Statischer Satz (unteres Schrankentheorem)

Jedes Belastungssystem, zu dem sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben läßt, der in keinem Punkte des Kontinuums die Plastizitätsbedingung verletzt, ist stabil.

Kinematischer Satz (oberes Schrankentheorem)

Jedes Belastungssystem, zu dem sich ein kinematisch zulässiger Verschiebungszustand angeben läßt, bei dem die äußere Arbeit größer oder gleich der Dissipationsarbeit ist, ist instabil.

(Die Sätze sind hier gemäß der Formulierung von Vollenweider (1970) zitiert).

Die Lösung wird vollständig genannt, wenn die Spannungen und Verzerrungen verträglich sind und die Lösungen zusammenfallen. (Es gibt bisher erst sehr wenige vollständige Lösungen). Lösungen nach dem statischen Satz nähern sich der vollständigen Lösung von "unten", nach dem kinematischen Satz von "oben". Die Bezeichnung unten und oben bezieht sich dabei i.a. auf die Traglast bei sogenannten "passiven" Problemen.

Eine präzisere Kennzeichnung wählen Frémond/Salengon (1973), indem sie der statischen Lösung den Begriff "innen", der kinematischen Lösung "außen" zuordnen.

Teilweise werden die Grenzwertsätze an das Drucker'sche Postulat der Normalität von Spannungen und Verzerrungen gebunden.

Ursprünglich galt dieses Postulat als Voraussetzung für die Gültigkeit des zweiten Grenzwertsatzes. Heute wird allerdings die Normalität meist nur als Klassifizierung eines bestimmten Materialverhaltens interpretiert.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein allgemeines Verfahren zur Entwicklung

der vollständigen Lösung von "außen" her bereitzustellen, die vom Verfasser Kinematische Elemente-Methode (KEM) genannt wird.

Die KEM eignet sich sowohl zur Lösung von Problemen mit diskreten Scherfugen als auch zur Modellierung von Problemen mit Zonenbrüchen. Sie kann somit entweder als direktes physikalisches Modell oder auch als mathematisches Modell interpretiert werden.

Die Methode ist allgemein anwendbar auf Bruchprobleme der Boden- und Felsmechanik bzw. des Grundbaus und des Felsbaus, teilweise anwendbar auf Probleme der Schnee- und Eismechanik und teilweise auch auf bestimmte Traglastprobleme des Massivbaus.

Auf den vorteilhaften Einsatz der KEM im Zusammenhang mit der statistischen Sicherheitstheorie sei hingewiesen. Sturm/Mikota (1983), Gußmann/Ochmann (1985).

Die KEM kann verstanden werden als eine Erweiterung des allgemeinen Lamellenverfahrens von Gußmann (1978), bzw. als eine analytische Weiterentwicklung der von Gudehus (1972), (1980), Goldscheider (1974), (1979), (1980), Karal (1977a), (1977b) u.a. entwickelten Kinematische Verfahren, die ihren gemeinsamen Ursprung in der Extremalmethode von Coulomb (1776) haben. Methodisch ist die KEM jedoch eine eigenständige Entwicklung auf breiter Grundlage. Die Grenzen der zukünftigen Entwicklungsmöglichkeiten sind noch nicht abzuschätzen.

2. Die Kinematische Elemente-Methode

Das im folgenden dargestellte, vom Verfasser entwickelte Verfahren zur Berechnung von Bruchzuständen wird, in Anlehnung an die Finite Elemente-Methode, als Kinematische Elemente-Methode bezeichnet.

Das Kontinuum wird dabei diskretisiert durch endliche, aber kinematisch verschiebbliche Bruchkörper: die Elemente. Die Unterteilung kann prinzipiell beliebig fein durchgeführt werden. Die Elemente selbst werden als starr betrachtet.

In den Begrenzungen der Elemente gegeneinander bzw. nach außen soll die Coulombsche Bruchbedingung

$$\tau = (\sigma - u) \tan \varphi + c \quad (2.1)$$

mit den Stoffparametern Reibungswinkel φ und Kohäsion c gelten.

Die Gesamtheit der kinematischen Elemente eines Problems wird als Bruchmechanismus bezeichnet; er muß die jeweiligen geometrischen Randbedingungen befriedigen.

Als Elementformen werden im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich durch Geraden (bzw. bei räumlichen Problemen durch ebene Flächen) begrenzte Elemente betrachtet.

Im Zusammenhang mit der für eine Bruchfuge angenommenen Fließregel - im allgemeinen Fall beliebige, aber konstante Dilatanz oder Kontraktanz - folgt daraus, daß die Elemente nur translatorische Bewegungen durchführen können: also keine Rotationen.

Sowohl die ebene Begrenzung als auch der jeweils konstante Dilatanzwinkel einer Fuge sind nicht zwingend. Das Verfahren wird jedoch durch diese Voraussetzungen wesentlich vereinfacht und erfordert keine weiteren Annahmen; z.B. wäre bei einer gekrümmten Bruchfuge eine Annahme hinsichtlich der Spannungsverteilung erforderlich.

Vom numerischen Standpunkt können diese Vereinfachungen mit den einfachsten

Finiten Elementen mit linearem Verschiebungsansatz verglichen werden. Es bietet sich der Analogieschluß an zu vermuten, daß "höhere" kinematische Elementformen und Elementbeschreibungen ggfs. vorteilhaft sein können.

Auf die Elemente wirken eingeprägte Kräfte (wie Eigengewicht und quasi-statische Erdbebenkräfte) und äußere Kräfte einschließlich Wasserdruck.

Die Berechnung folgt dem Rechenschema :

- Entwicklung bzw. Wahl eines geeigneten Bruchmechanismus
- Beschreibung der Geometrie einschließlich geometrischer und bodenmechanischer Zuordnung (Topologie)
- Ermittlung der Kinematik für vorgegebene virtuelle Randverschiebungen
- Ermittlung der Statik (alternativ: der virtuellen Arbeiten)
- Definition und Ermittlung einer geeigneten Zielfunktion (mehrere Alternativen)
- Optimierung der Ausgangsgeometrie im Hinblick auf die Zielfunktion.

Als Zielfunktion wird die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte am sogenannten "nachgiebigen Rand" (für den die die Bewegung auslösenden virtuellen Verschiebungen vorgegeben sind) definiert. Daraus abgeleitet können alternativ die Traglast (z.B. Grundbruchlast oder Erddruck) bzw. die Sicherheit (bei Stand sicherheitsproblemen) als Zielfunktion gewählt werden. Die abgeleiteten Zielfunktionen sind teilweise an gewisse einschränkende Voraussetzungen gebunden (s. Abschnitt 3.2). Die maßgebende Zielfunktion ergibt sich durch Variation der Geometrie des betrachteten Bruchmechanismus bzw. übergeordnet aus dem ungünstigsten aller denkbaren und zulässigen Bruchmechanismen.

Während die Variation der geometrischen Parameter eines Bruchmechanismus durch Optimierungsprogramme gelöst werden kann, ist für die Variation der möglichen Bruchmechanismen nur eine Strategie anzugeben.

Die Ableitung des Verfahrens erfolgt auf der physikalischen Ebene an einem Bruchmechanismus mit endlichen Elementen und nicht mathematisch aus der Diskretisierung der Kontinuums-Differentialgleichungen.

3. Das ebene Problem

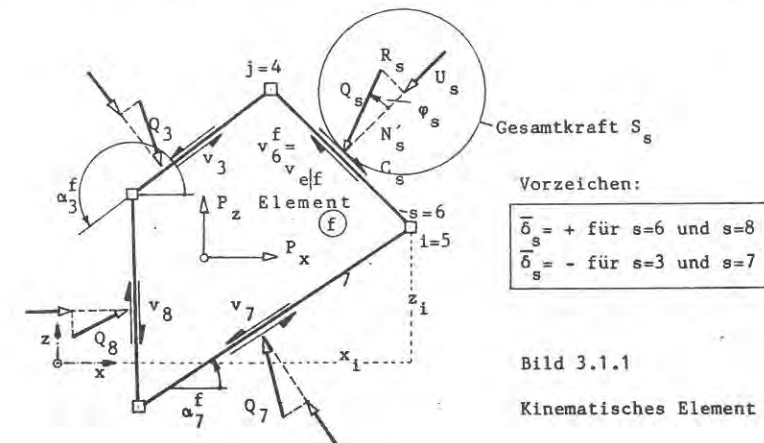
In der vorliegenden Untersuchung wird das ebene Problem einschließlich Programmierung und Anwendung vollständig gelöst.

3.1 Fließregel ohne Dilatanz

Die von Gußmann (1982a), (1982b) und (1983) beschriebene Methode sei hier zunächst vorangestellt. Sie gilt für den Sonderfall einer dilatanzfreien Fließregel, d.h. beim Abscheren in einer Fuge tritt keine Normalverschiebungskomponente auf. Dieser Fall ist physikalisch und mathematisch besonders einfach und sehr anschaulich.

3.1.1 Geometrie

Zur Beschreibung der Geometrie eines beliebigen, hier durch Geraden begrenzten, kinematischen Elements f nach Bild 3.1.1 mit n Ecken bzw. Seiten werden die kartesischen Koordinaten (x_i, z_i) der Eckpunkte eingeführt. Die lokale Numerierung der Eckpunkte eines Elements erfolge im Gegenuhrzeigersinn.



Die Neigung einer Strecke s am Element f - mit Nachbarerelement e - vom Knoten i zum Knoten j wird mit $\alpha_s^f = \alpha_{i,j} = \alpha_{e|f}$ bezeichnet. α ist positiv definiert im Gegenuhrzeigersinn von $+x$ zum äußeren Rand hin. Die unterschiedliche und stets eindeutige Zuordnung des Winkels α zu Knoten, Strecken und

Elementen erweist sich im Hinblick auf die Programmierung als zweckmäßig.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} z_{j,i} &= z_j - z_i ; \quad z_{i,j} = -z_{j,i} \\ x_{j,i} &= x_j - x_i ; \quad x_{i,j} = -x_{j,i} \\ l_{i,j} &= l_{j,i} = \sqrt{(x_{i,j}^2 + z_{i,j}^2)} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

ergeben sich die Winkelfunktionen

$$\sin \alpha_{i,j} = z_{j,i} / l_{i,j} ; \cos \alpha_{i,j} = x_{j,i} / l_{i,j} \quad (3.1.3)$$

Zu beachten ist, daß sich bei umgekehrter Reihenfolge (= Numerierung beim Nachbarelement e) das Vorzeichen der obigen Winkelfunktionen ändert, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \sin \alpha_s^e &= -\sin \alpha_s^f ; \cos \alpha_s^e = -\cos \alpha_s^f \\ \text{bzw.} \\ \sin \alpha_{j,i} &= -\sin \alpha_{i,j} ; \cos \alpha_{j,i} = -\cos \alpha_{i,j} \\ \text{bzw.} \\ \sin \alpha_{f|e} &= -\sin \alpha_{e|f} ; \cos \alpha_{f|e} = -\cos \alpha_{e|f} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Der zur Ermittlung des Eigengewichts erforderliche Flächeninhalt eines n-Ecks ergibt sich zu

$$A = 0.5 \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_{i-1}) x_i \quad (3.1.5)$$

mit $z_0 = z_n$ und $z_{n+1} = z_1$. Die positive Numerierung der Eckpunkte ist dabei einzuhalten.

3.1.2 Kinematik

Ausgangspunkt der Ableitung sei die 4-Element-Kinematik des aktiven Erddruckproblems nach Bild 3.1.2. Die Bewegung werde durch eine horizontale Verschiebung der nachgiebigen Stützwand ausgelöst. Um die Durchbiegung der Wand näherungsweise zu berücksichtigen, wird im oberen Teil eine größere Verschiebung angenommen als im unteren. Da alle Begrenzungen gradlinig sind, können nur Translationen der als starr anzusehenden Elemente (das verschobene Element ist formtreu und volumentreu zu seiner Ausgangslage) auftreten. Die Untersuchung beginnt mit demjenigen Element, das einerseits an die nachgiebige Wand, andererseits an die starre und unverschiebliche Umgebung (Element 0) angrenzt, hier also Element f. Es kann sich nur parallel zum starren Rand verschieben, und zwar so weit, bis es wieder am verschobenen, nachgiebigen Rand nf anliegt (Dilatanzwinkel = 0). Es folgt Element e, das sich ebenfalls nur parallel zu seinem starren und unverschieblichen Rand bewegt, bis es wieder an f anliegt.

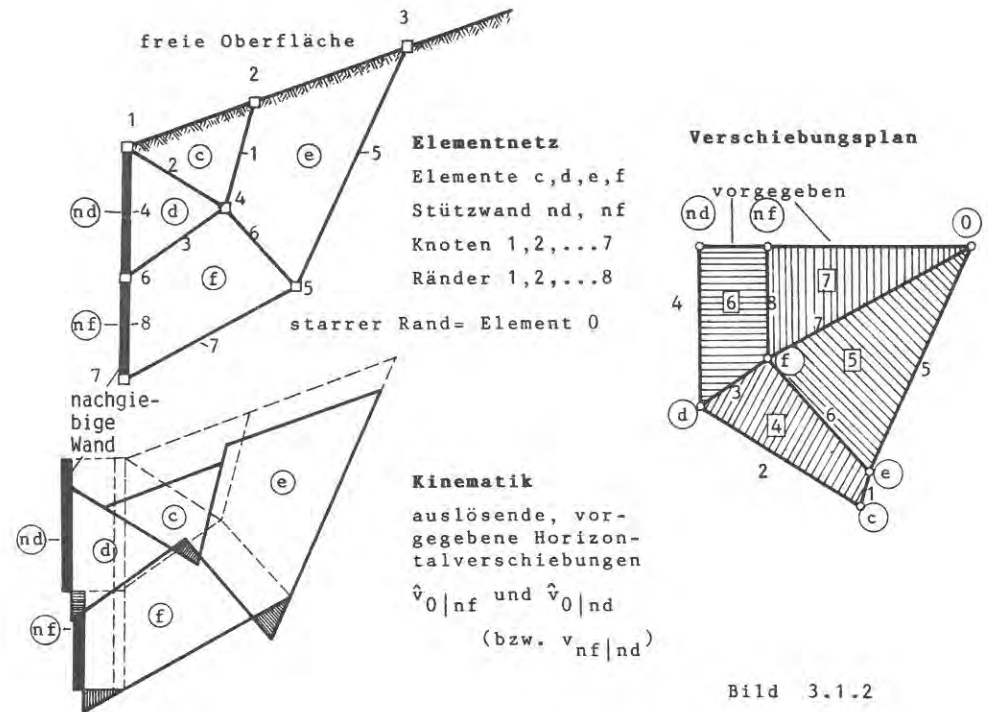


Bild 3.1.2

Anmerkung: Die singuläre Verletzung der Kompatibilität im Punkt 5, wo das starre Element e die starre Umgebung "durchdringt", wird zugelassen, (virtuelle Verschiebungen). Die absolute Größe der vorgegebenen Randverschiebungen ist für die Lösung des Problems ohne Bedeutung.

Werden die Verrückungen als wirkliche Verschiebungen interpretiert, so muß folgendes beachtet werden:

- Die Verschiebungen müssen so groß sein, daß die Scherfestigkeit voll bzw. bei Böschungen bis zur durch die Sicherheit dividierten Scherfestigkeit mobilisiert wird.
- Im strengeren Sinne handelt es sich um Verschiebungsänderungen, die auch Geschwindigkeiten oder Raten genannt werden. Diese Bezeichnungen haben mit einer echten Geschwindigkeit nichts zu tun.
- Bei Anwendung auf Lockerböden ist die Verletzung der Kompatibilität in den Eckpunkten bei kleinen Verschiebungen physikalisch durch lokale Plastifizierung, bei Fels nur durch Klüfte erklärbar.

Dabei bewegen sich f und e relativ zueinander: entweder f gegenüber e nach links oben oder e gegenüber f nach rechts unten. Element d bewegt sich parallel zum gemeinsamen Rand des verschobenen Elements f, bis es am verschobenen, nachgiebigen Rand nd anliegt. Als letztes folgt c, das sich relativ zu e und d nur nach unten bewegen kann. Die kinematische Kette ist hier f-e-d-c.

Zeichnerisch lassen sich die Verschiebungsvektoren aus dem Verschiebungsplan (Hodograph) bestimmen, der die geometrischen Durchdringungen bzw. Klaffungen der Ecken abbildet.

Ein Punkt im Verschiebungsplan kennzeichnet die Absolutverschiebungen eines Elements, bezogen auf den unverschobenen Ausgangszustand. Der Numerierung der kinematischen Kette folgend kann stets ein neuer Punkt von zwei bekannten angeschlossen werden, da die Richtungen durch die Trennflächenneigungen vorgegeben sind.

Bezeichnet man mit $v_{e|f} = v_s^f$ die Verschiebung des Elements f relativ zum Element e, so ergeben sich die kartesischen Komponenten des relativen Verschiebungsvektors zu

$$v_{e|f,x} = v_{e|f} \cos \alpha_{e|f} \quad (3.1.6)$$

$$v_{e|f,z} = v_{e|f} \sin \alpha_{e|f}$$

Da $v_{e|f}$ und $v_{f|e}$ dasselbe Vorzeichen besitzen, folgt mit (3.1.4)

$$v_{e|f,x} = v_x^f - v_x^e = -v_{e|f,x} \quad (3.1.7)$$

$$v_{e|f,z} = v_z^f - v_z^e = -v_{e|f,z}$$

Wegen der in diesem Abschnitt vorausgesetzten Fließregel (keine Dilatanz in der Bruchfuge) ist der relative Verschiebungsvektor zweier Elemente parallel zur Trennfläche. Damit bietet sich folgende Vorzeichendefinition an: Eine Relativverschiebung $v_s^f = v_{e|f}$ sei dann positiv, wenn der Vektor im betrachteten Element f im Gegenuhrzeigersinn dreht (bzw. auch der Vektor $v_s^e = v_{f|e}$ im Element e)

Die Kennung f oder e kann somit bei v_s entfallen, nicht aber - siehe oben - bei den Komponenten $v_{s,x}$ und $v_{s,z}$.

Mit diesen Definitionen läßt sich die Kinematik - bei vorgegebenen Verschiebungsvektoren $\hat{v}^{nf}$ und $\hat{v}^{nd}$ der (fiktiven) nachgiebigen Stützwandelemente - vollständig berechnen.

Die einfachste analytische Formulierung der Kinematik folgt der zeichnerischen Konstruktion des Verschiebungsplans gemäß der Numerierung der kinematischen Kette. Die fiktiven Elemente nf, nd und 0 werden dabei hinsichtlich der Kinematik formal wie echte Elemente behandelt.

Betrachtet man z.B. das lokale Element c, so werden zunächst die unbekannten Relativverschiebungsbeträge $v_1 = v_{e|c}$ und $v_2 = v_{c|d}$ samt "Richtungsvorzeichen" bestimmt und daraus anschließend die Komponenten (v_x^c ; v_z^c) des Elements c.

Man erhält durch Schließen des Verschiebungsplans die Vektorgleichung

$$\vec{v}_{e|c} + \vec{v}_{c|d} + \vec{v}_{d|f} + \vec{v}_{f|e} = 0 \quad (3.1.8)$$

bzw. für kartesische Koordinaten die beiden skalaren Gleichungen

$$v_{e|c} \cos \alpha_{e|c} + v_{c|d} \cos \alpha_{c|d} + v_{d|f} \cos \alpha_{d|f} + v_{f|e} \cos \alpha_{f|e} = 0 \quad (3.1.8)^1$$

$$v_{e|c} \sin \alpha_{e|c} + v_{c|d} \sin \alpha_{c|d} + v_{d|f} \sin \alpha_{d|f} + v_{f|e} \sin \alpha_{f|e} = 0$$

oder mit den Gln. (3.1.4), (3.1.6) und (3.1.7)

$$\cos \alpha_1^c v_1 - \cos \alpha_2^c v_2 = v_x^d - v_x^e \quad (3.1.8)^2$$

$$\sin \alpha_1^c v_1 - \sin \alpha_2^c v_2 = v_z^d - v_z^e$$

Das sind zwei lineare Gleichungen für die Unbekannten v_1 und v_2 . In abgekürzter Matrixschreibweise

$$K_v v = b$$

$$K_v = \begin{vmatrix} k_{1,x} & k_{2,x} \\ k_{1,z} & k_{2,z} \end{vmatrix} ; \quad v = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} ; \quad b = \begin{vmatrix} b_x \\ b_z \end{vmatrix} \quad (3.1.8)^3$$

$$k_{1,x} = \cos \alpha_1 ; k_{2,x} = -\cos \alpha_2$$

$$k_{1,z} = \sin \alpha_1 ; k_{2,z} = -\sin \alpha_2$$

$$b_x = v_x^d - v_x^e ; b_z = v_z^d - v_z^e$$

ergibt sich die Lösung zu

$$v_1 = D_1/D ; v_2 = D_2/D$$

mit

$$D = k_{1,x} k_{2,z} - k_{1,z} k_{2,x}$$

$$D_1 = b_x k_{2,z} - b_z k_{2,x}$$

$$D_2 = k_{1,x} b_z - k_{1,z} b_x$$

Daraus erhält man die Elementverschiebung $v^c = v_{0|c}$

$$v_{c,x} = v_{e,x} + k_{1x} v_1 = v_{d,x} + k_{2x} v_2 \quad (3.1.9)$$

$$v_{c,z} = v_{e,z} + k_{1z} v_1 = v_{d,z} + k_{2z} v_2$$

Die Gesamtkinematik kann hinsichtlich der Relativverschiebungen z.B. durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \vec{v}_7 + \vec{v}_8 + \hat{v}_{nf} &= 0 \\ \vec{v}_5 + \vec{v}_6 + \vec{v}_7 &= 0 \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_8 + \hat{v}_{nd|nf} &= 0 \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

d.h. global durch

$$K_v v + \hat{v} = 0 \quad (3.1.10)^1$$

bestimmt werden. Darin bezeichnen

v den Vektor der unbekannten Relativverschiebungen

K_v eine unsymmetrische Koeffizientenmatrix für die Geometrie mit $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ -Komponenten

$\hat{v}$ den Vektor der vorgegebenen kartesischen Relativverschiebungskomponenten mit insgesamt m_r fiktiven Elementen der nachgiebigen Stützwand in globaler Darstellung.

Das kinematische System ist dann eindeutig lösbar, wenn für k innere Knoten genau

$$n = 2k \quad (3.1.11)$$

unbekannte Relativverschiebungen zu bestimmen sind.

Es ergibt sich nach Auflösung des linearen, nicht-symmetrischen Gleichungssystems - nach einem geeigneten Standard-Verfahren, z.B. Gauß-Seidel - bzw. formal durch Inversion

$$v = -K_v^{-1} \hat{v} \quad (3.1.10)^2$$

Der Vorteil dieser Methode - gegenüber der schrittweisen Auflösung - besteht

in der allgemeinen und beliebigen Numerierung der Strecken und Elemente; der Nachteil in größeren Rechenzeiten. Für viele Probleme lassen sich beide Vorteile vereinen - nämlich beliebige Zuordnung und schrittweises Auflösen nach stets 2 Unbekannten - durch Zwischenschaltung einer internen, mathematisch formulierbaren Umnummerierung.

Eine geringfügig abgeänderte Formulierung erhält man, wenn in (3.1.10) anstelle der dritten Gleichung

$$\vec{v}_4 + \vec{v}_3 + \vec{v}_7 + \vec{v}_{nd} = 0$$

gewählt wird; das globale lineare Gleichungssystem lautet dann

$$K_V^* \vec{v} + \hat{v}^* = 0 \quad (3.1.10)^*$$

wobei K_V^* teilweise andere Geometriekoeffizienten enthält und $\hat{v}^*$ den globalen Vektor der Absolutverschiebungskomponenten der vorgegebenen Stützwandelemente enthält.

Eine direkte Bestimmung der kartesischen Komponenten der Absolutverschiebungen $\vec{v}_s^f$ der (echten) Elemente ist ebenfalls durch Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$K_V^f \vec{v} + \hat{v}^N = 0 \quad (3.1.12)$$

möglich, s. Abschnitt 4.2.

Zusammenfassend kann die Kinematik durch eines der folgenden Verfahren

- Zeichnerisches Verschieben der Einzelemente
- Zeichnen des Verschiebungsplans
- elementweise Berechnung
- globales Gleichungssystem

bestimmt werden.

Die Untersuchung der Kinematik ist vorab erforderlich, um

- die Bewegungsfähigkeit und somit die Zulässigkeit des angenommenen

Systems nachzuweisen;

- die Richtung der in den Bruchflächen wirkenden Scherkräfte zu bestimmen; sie wirken als Reaktionskräfte den Relativverschiebungen entgegen.
- bei allgemeiner Betrachtung die innere Arbeit berechnen zu können.

3.1.3 Statik

Für einen Rand s eines beliebigen Elements f wird ein Vorzeichen $\bar{\delta}_s$ als positiv festgelegt, wenn die Relativverschiebung v_s im Gegenuhrzeigersinn wirkt, d.h. es gilt

$$\bar{\delta}_s = \text{sign} (v_s) \quad (3.1.13)$$

bzw. für den globalen Vektor

$$\bar{\delta} = \text{sign}(\vec{v}) \quad (3.1.13)^1$$

Analog erhalten auch Scherwinkel und Kohäsion ein "Richtungsvorzeichen" gemäß

$$\varphi_s = \bar{\delta}_s |\varphi_s| \quad ; \quad c_s = \bar{\delta}_s |c_s| \quad (3.1.14)$$

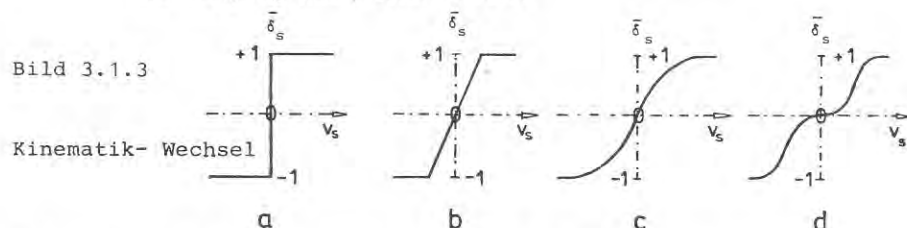
Danach ist eine Scherkraft T_s positiv, wenn sie auf ein Element im Uhrzeigersinn wirkt, s. Bild 3.1.1.

Zunächst werden die Kräfte betrachtet, die auf eine beliebige Seite s - ausgenommen die freien Ränder an der Oberfläche - eines Elements wirken. Die resultierende Kraft sei $S_s = (N_s; T_s)$. Die Normalkraft N_s sei als Druckkraft positiv, die Tangentialkraft T_s positiv oder negativ, je nach Richtung der Relativverschiebung. N_s setzt sich zusammen aus effektiver Normalkraft N'_s und Wasserdruck U_s ; T_s aus Reibungskraft R_s und Kohäsion C_s .

$$\begin{aligned} N_s &= N'_s + U_s = N'_s + u_s l_s \\ T_s &= R_s + C_s = R_s + c_s l_s \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Bei konsequenter Anwendung der Gln. (3.1.13) und (3.1.14) wird im Sonderfall verschwindender Relativverschiebung zweier benachbarter Elemente die resultierende Gesamtkraft $S_s = (N_s; 0)$ als reine Normalkraft festgelegt.

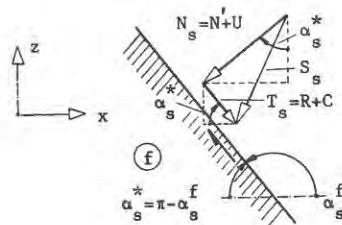
Anmerkung: Aus unterschiedlichen Gründen kann es zweckmäßig sein, von dieser Regel abzuweichen. Zum einen kann bei einem flexiblen Randelement eine von der Normalenrichtung abweichende Richtung der Traglast gesucht sein, obwohl die zugehörige Relativverschiebung Null ist. zum anderen kann eine sprunghafte Änderung der Scherkraftrichtung infolge eines Kinematiksprungs nach Bild 3.1.3a zu einem ungünstigen Konvergenzverhalten der Optimierung - s. Abschnitt 5 - führen. Die in Bild 3.1.3b bis d aufgezeigten Übergangskurven anstelle des Kinematiksprungs verbessern i.a. die Konvergenzeigenschaften (Sturm, 1983). Vom physikalischen Standpunkt aus kann dieses Vorgehen auch als Mobilisierung der Scherkraft in Abhängigkeit vom Verschiebungsweg interpretiert werden.



Unbekannt sind N'_S und R_S , deren Resultierende mit Q_S (als Druckkraft positiv) bezeichnet wird. Da Q_S um φ_S gegen die Normale geneigt ist, können N'_S und R_S durch Q_S nach Bild 3.1.1 ausgedrückt werden:

$$N'_S = Q_S \cos \varphi_S ; R_S = Q_S \sin \varphi_S \quad (3.1.16)$$

Bild 3.1.4
Kräftezerlegung



Die kartesischen Komponenten von S_S erhält man nach Bild 3.1.4 zu

$$\begin{aligned} S_{S,x} &= -N_S \sin \alpha_S - T_S \cos \alpha_S \\ S_{S,z} &= N_S \cos \alpha_S - T_S \sin \alpha_S \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Durch Einsetzen der Gln. (3.1.15) und (3.1.16) folgt nach Umformung

$$S_{S,x}^f = - (Q_S \sin(\alpha_S^f + \varphi_S) + C_S \cos \alpha_S^f + U_S \sin \alpha_S^f) \quad (3.1.17)^1$$

$$S_{S,z}^f = Q_S \cos(\alpha_S^f + \varphi_S) - C_S \sin \alpha_S^f + U_S \cos \alpha_S^f$$

Damit ist die auf die Seite s wirkende Kraft S_S nach Größe und Richtung auf die einzige noch unbekannte Kraft Q_S zurückgeführt. (Anstelle von Q_S hätte man alternativ auch N'_S als Hauptunbekannte wählen können).

Betrachtet man ein beliebiges Element f und faßt die Wirkungen des Eigengewichts sowie eventueller Horizontalkräfte aus Erdbeben und Auflasten in der Kraft P^f zusammen, so erfordert die Einhaltung des Kräftegleichgewichts

$$\sum S_{S,x} + P_x^f = 0 \text{ und } \sum S_{S,z} + P_z^f = 0 \quad (3.1.18)$$

Mit Glg. (3.1.17)¹ folgt daraus

$$-\sum (Q_S \sin(\alpha_S^f + \varphi_S) + C_S \cos \alpha_S^f + U_S \sin \alpha_S^f) + P_x^f = 0 \quad (3.1.19)$$

$$\sum (Q_S \cos(\alpha_S^f + \varphi_S) - C_S \sin \alpha_S^f + U_S \cos \alpha_S^f) + P_z^f = 0$$

Anmerkung: die Momentenbedingung liefert i.a. keine Information, da die Kräfte Q_S stets in solchen Punkten wirkend gedacht werden können, daß diese erfüllt ist. Nur wenn eine Elementseite sehr klein ist im Verhältnis zu einer anderen, ist hierbei Vorsicht geboten, s. Abschnitt 3.3.

Für m Elemente stehen somit $2m$ Gleichungen zur Lösung der n unbekannten Kräfte Q_S zur Verfügung. Das bedeutet - analog zur Kinematik - daß das Problem bei genau

$$n = 2m \quad (3.1.20)$$

Unbekannten Q_S statisch bestimmt ist.

Den einfachsten Lösungs-Algorithmus erhält man dadurch, daß die Elemente derart nummeriert werden, daß immer nur 2 neue unbekannte Kräfte Q_S pro Element erscheinen. Im Beispiel wird das durch die Reihenfolge c,d,e,f der Elemente erreicht.

Anmerkung: Man beachte, daß dies die umgekehrte Reihenfolge wie bei der kinematischen Betrachtung ist.

Für das Element c gilt

$$-\sin(\alpha_1^c + \varphi_1)Q_1 - \sin(\alpha_2^c + \varphi_2)Q_2 + p_x^c - C_1 \cos \alpha_1^c - U_1 \sin \alpha_1^c \quad (3.1.21)$$

$$- C_2 \cos \alpha_2^c - U_2 \sin \alpha_2^c = 0$$

$$\cos(\alpha_1^c + \varphi_1)Q_1 + \cos(\alpha_2^c + \varphi_2)Q_2 + p_z^c - C_1 \sin \alpha_1^c + U_1 \cos \alpha_1^c$$

$$- C_2 \sin \alpha_2^c + U_2 \cos \alpha_2^c = 0$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{k}^c \mathbf{q}^c + \mathbf{f}^c = \mathbf{0} \quad (3.1.21)^1$$

mit

$$\mathbf{k}^c = \begin{vmatrix} k_{1,x}^c & k_{2,x}^c \\ k_{1,z}^c & k_{2,z}^c \end{vmatrix}; \quad \mathbf{q}^c = \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{f}^c = \begin{vmatrix} f_x^c \\ f_z^c \end{vmatrix}$$

$$k_{1,x}^c = -\sin(\alpha_1^c + \varphi_1); \quad k_{2,x}^c = -\sin(\alpha_2^c + \varphi_2)$$

$$k_{1,z}^c = \cos(\alpha_1^c + \varphi_1); \quad k_{2,z}^c = \cos(\alpha_2^c + \varphi_2)$$

und

$$f_x^c = p_x^c - C_1 \cos \alpha_1^c - U_1 \sin \alpha_1^c - C_2 \cos \alpha_2^c - U_2 \sin \alpha_2^c$$

$$f_z^c = p_z^c - C_1 \sin \alpha_1^c + U_1 \cos \alpha_1^c - C_2 \sin \alpha_2^c + U_2 \cos \alpha_2^c$$

Die Auflösung nach den beiden Unbekannten liefert

$$Q_1 = D_1^c / D^c; \quad Q_2 = D_2^c / D^c \quad (3.1.22)$$

mit

$$D^c = k_{1,x}^c k_{2,z}^c - k_{1,z}^c k_{2,x}^c$$

$$D_1^c = -f_x^c k_{2,z}^c + f_z^c k_{2,x}^c$$

$$D_2^c = -k_{1,x}^c f_z^c + k_{2,z}^c f_x^c$$

Die globale Numerierung der Unbekannten erfolgt zweckmäßigerweise so, daß - beginnend mit dem 1. Element - dieses die Unbekannten Q_1 und Q_2 , das nächste die neuen Unbekannten Q_3 und Q_4 usw. zugewiesen bekommt. Von den m Elementen erhält somit das μ -te ($\mu = 1$ bis m) bei dieser Numerierung die Unbekannten $Q_{2\mu-1}$ und $Q_{2\mu}$.

Das globale Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} k_{1,x}^c Q_1 + k_{2,x}^c Q_2 &+ f_x^c = 0 \\ k_{1,z}^c Q_1 + k_{2,z}^c Q_2 &+ f_z^c = 0 \\ k_{2,x}^d Q_2 + k_{3,x}^d Q_3 + k_{4,x}^d Q_4 &+ f_x^d = 0 \\ k_{2,z}^d Q_2 + k_{3,z}^d Q_3 + k_{4,z}^d Q_4 &+ f_z^d = 0 \\ k_{1,x}^e Q_1 + k_{5,x}^e Q_5 + k_{6,x}^e Q_6 &+ f_x^e = 0 \\ k_{1,z}^e Q_1 + k_{5,z}^e Q_5 + k_{6,z}^e Q_6 &+ f_z^e = 0 \\ k_{3,x}^f Q_3 + k_{6,x}^f Q_6 + k_{7,x}^f Q_7 + k_{8,x}^f Q_8 &+ f_x^f = 0 \\ k_{3,z}^f Q_3 + k_{6,z}^f Q_6 + k_{7,z}^f Q_7 + k_{8,z}^f Q_8 &+ f_z^f = 0 \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Zu beachten ist dabei, daß am nachgiebigen Rand statt des Scherwinkels φ_s der Wandreibungswinkel δ_s verwendet werden muß. Eine Kohäsion wird man hier in der Regel nicht ansetzen können (nur bei extrem kleinen Relativverschiebungen intakt).

In Matrizendarstellung ergibt sich

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.1.23)^1$$

mit der formalen Lösung für die unbekannten Kräfte

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.1.23)^2$$

Die nicht-symmetrische Koeffizienten-Matrix $\mathbf{K}$ wird als Reibungs-Matrix bezeichnet, da sie neben den Neigungswinkeln α_s die Reibungswinkel φ_s enthält. $\mathbf{F}$ ist der Lastvektor, der die kartesischen Komponenten der eingepprägten Kräfte und äußeren Auflasten sowie der Kohäsion und der Wasserdrücke enthält.

Hinsichtlich der Lösungsmöglichkeiten bestehen somit wieder - analog zur Kinematik - folgende Alternativen:

- elementweise grafische Bestimmung der Kräfte (s. auch Gudehus (1972))

- elementweise rechnerische Bestimmung der Kräfte
- Auflösung des linearen, nicht-symmetrischen globalen Gleichungssystems.

Weiter gilt wieder in vielen Fällen, daß bei beliebiger Numerierung der Strecken und Elemente, durch geeignete interne Umnumerierung des globalen Systems, die rechengünstigere Lösung elementweise erreicht werden kann.

Die Kräfte Q_s müssen sich positiv als Druckkräfte ergeben. Wenn sich rechnerisch ein negativer Wert ergibt, also eine Zugkraft, ist das gewählte System für die angesetzte Scherfestigkeit statisch nicht zulässig und muß geändert werden, siehe hierzu Abschnitt 5.1.4. Durch Kohäsion aufnehmbare Zugkräfte können ggfs. zugelassen werden.

Im Vorgriff auf Abschnitt 3.3 läßt sich als Zielfunktion f (unterschiedliche Bedeutung zu f = Lastvektor beachten!) die Arbeit der äußeren Kräfte mit den vorgegebenen, die Bewegung des Bruchmechanismus auslösende nachgiebigen Randelementverschiebungen formulieren. Für das Erddruckbeispiel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f &= \hat{v}^{nd}_4 S_4 + \hat{v}^{nf}_8 S_8 \\ &= \hat{v}^{nd}_x S_{4,x} + \hat{v}^{nd}_z S_{4,z} + \hat{v}^{nf}_x S_{8,x} + \hat{v}^{nf}_z S_{8,z} \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

bzw. in globaler Darstellung

$$f = \hat{v}^t S = \hat{v}^t_x S_x + \hat{v}^t_z S_z \quad (3.1.24)^1$$

wobei der Vektor S die kartesischen Komponenten der Seitenkräfte enthält.

Im Sonderfall einer unter dem Winkel δ_v wirkenden Stützwandverschiebung

$$\hat{v}^{nd} = \hat{v}^{nf} = \hat{v} \quad ; \quad \hat{v}_x = \cos \delta_v \hat{v}_{res} \quad ; \quad \hat{v}_z = \sin \delta_v \hat{v}_{res}$$

ergibt sich mit der unter δ_s geneigten Resultierenden

$$S_{res} = S_4 + S_8 \quad ; \quad S_{x,res} = \cos \delta_s S_{res} \quad ; \quad S_{z,res} = \sin \delta_s S_{res}$$

die Zielfunktion

$$f = \cos(\delta_s - \delta_v) v_{res} S_{res} \quad (3.1.24)^2$$

Dies bedeutet, daß bei gleichmäßiger Wandverschiebung als Zielfunktion f - bis auf einen vorzeichenbehafteten konstanten Faktor - die Traglast gewählt werden kann.

Bei aktiven Erddruckproblemen, wo die Verschiebung der Stützwand entgegengesetzt zu der - auf das Erdreich wirkend angesetzten - Traglast $E_a = S_{res}$ gerichtet ist, folgt bei gleichmäßiger Wandverschiebung:

$$f = - | \text{const} | E_a$$

Im Falle passiven Erddrucks ergibt sich

$$f = + | \text{const} | E_p$$

Die maßgebende Bruchgeometrie erhält man durch Minimierung der Zielfunktion - wenn sie als Arbeit definiert ist- im Hinblick auf die kinematischen Freiheitsgrade. Für letztere können zweckmäßigerweise die Eckpunktskoordinaten der Elemente gewählt werden.

Bei gleichmäßiger Wandverschiebungen bedeutet dies:

- Maximierung des aktiven Erddrucks bzw. Minimierung des negativen aktiven Erddrucks
- Minimierung des passiven Erddrucks.

$$v_{s,z}^f = v_{e|f,z} = v_z^f - v_z^e = v_s \sin(\alpha_s + \phi_s) \quad (3.2.3)$$

Die Kinematik für jeden inneren Knoten ergibt sich aus den bisherigen Kompatibilitätsgleichungen (3.1.18) wieder zu

$$\begin{aligned} v_{e|c,x} + v_{c|d,x} + v_{d|f,x} + v_{f|e,x} &= 0 \\ v_{e|c,z} + v_{c|d,z} + v_{d|f,z} + v_{f|e,z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Anstelle von Glg. (3.1.6) sind hierin die Komponenten gemäß Glg. (3.2.3) zu berücksichtigen. Aus Bild (3.2.2) ist der Verschiebungsmechanismus und der Verschiebungsplan für das bisherige Beispiel eines aktiven Erddruckproblem mit Dilatanz ersichtlich.

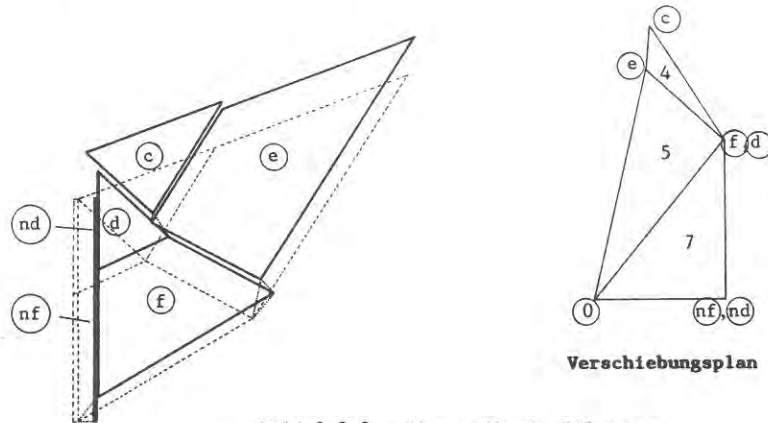


Bild 3.2.2 Kinematik mit Dilatanz

Das weitere Vorgehen folgt analog zu Abschnitt 3.1 und wird nicht weiter beschrieben.

Die Kinematik kann somit bei vorgegebenen, den Fugen zugeordneten Dilatanz- oder Kontraktanzwinkeln eindeutig bestimmt werden.

3.2.3 Statik

Die Kinematik war voraussetzungsgemäß derart vorgegeben, daß sich für die Tangential-Komponenten mit Dilatanz dieselben Drehsinn-Vorzeichen ergeben wie ohne. Damit wird die Statik nicht verändert, und eine weitere Beschreibung erübrigt sich.

3.2.4 Virtuelle Arbeit und Zielfunktion

Vorangestellt wird die mit D_s bezeichnete Arbeit in einer Scherfuge. Sie ergibt sich mit den kinematischen Beziehungen nach Glg. (3.2.3)

$$v_{s,x} = v_s \cos(\alpha_s + \phi_s) ; \quad v_{s,z} = v_s \sin(\alpha_s + \phi_s)$$

dem Drehsinn-Vorzeichen

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_s &= \text{sign}(v^T) = \text{sign}(v_s \cos \phi_s) = \text{sign}(v_s) \\ \phi_s &= +\bar{\delta}_s |\phi_s| \quad \dots \text{Dilatanz}; \quad \phi_s = -\bar{\delta}_s |\phi_s| \quad \dots \text{Kontraktanz} \end{aligned}$$

den vorzeichenbehafteten Scherfestigkeiten

$$\varphi_s = \bar{\delta}_s |\varphi_s| ; \quad c_s = \bar{\delta}_s |c_s|$$

und den Seitenkräften nach Glg. (3.1.17)

$$\begin{aligned} S_{s,x} &= -\sin(\alpha_s + \varphi_s) Q_s - \cos \alpha_s C_s - \sin \alpha_s U_s \\ S_{s,z} &= \cos(\alpha_s + \varphi_s) Q_s - \sin \alpha_s C_s + \cos \alpha_s U_s \end{aligned}$$

definitionsgemäß zu

$$D_s = -v_{s,x} S_{s,x} - v_{s,z} S_{s,z} \quad (3.2.5)$$

Nach Einsetzen und Umformen erhält man

$$D_s = v_s (\sin(\varphi_s - \phi_s) Q_s + \cos \phi_s C_s - \sin \phi_s U_s) \quad (3.2.5)^1$$

Eine Aufspaltung in Tangential- und Normalkomponenten -nach Glg. (3.2.2) für die Verschiebungen, nach (3.1.15) und (3.1.16) für die Kräfte- liefert

$$D_s = v_s^T (R_s + C_s) - v_s^N (N'_s + U_s) = v_s^T T_s - v_s^N N'_s \quad \text{bzw.} \quad (3.2.5)^2$$

$$\frac{D_s}{l_s} = [\sigma'_s (\tan \varphi_s - \tan \phi_s) + c_s - u_s \tan \phi_s] v_s^T$$

Für die Sonderfälle $\psi=0$ und $\psi=\varphi$ erhält man einfachere Beziehungen. Es ergibt sich

$$\psi_S = 0 ; \quad v_S^N = 0 ; \quad v_S^T = v_S$$

$$D_S = v_S^T (\sin \varphi_S Q_S + C_S) = v_S^T (R_S + C_S) = v_S^T T_S \quad (3.2.6)$$

$$\psi_S = \varphi_S ; \quad D_S = v_S (\cos \varphi_S C_S - \sin \varphi_S U_S) = v_S^T C_S - v_S^N U_S$$

$$v_S^T R_S - v_S^N U_S = 0 \quad (3.2.7)$$

Der letzte Fall ist von besonderer Bedeutung, da hier die Kraft Q_S wegen der senkrecht auf ihr stehenden Relativverschiebung v_S (Normalitätsbedingung) gemäß Bild 3.2.3 keine Arbeit leistet.

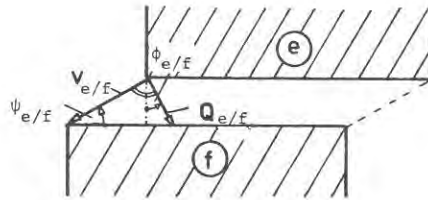


Bild 3.2.3 Kinematik für $\psi = \phi$

Im folgenden wird das gesamte System betrachtet.

Ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen nach Glg. (3.1.18) für ein beliebiges Element f erhält man nach zunächst formaler Multiplikation mit den kartesischen Absolutverschiebungskomponenten desselben Elements und anschließender Summation über alle echten Elemente f von 1 bis m

$$\sum_{f=1}^m ((-v_x^f)(P_x^f + \sum S_{s,x}^f) + (-v_z^f)(P_z^f + \sum S_{s,z}^f)) = 0 \quad (3.2.8)$$

Diese Gleichung ist gültig für alle beliebigen virtuellen oder wirklichen Verschiebung

Sind aber die Verschiebungen mit den kinematischen Randbedingungen am nachgiebigen Rand und weiterhin mit allen Scher- und Normalkräften kompatibel- dies ist voraussetzungsgemäß der Fall- so kann anders zusammengefaßt und interpretiert werden.

Aus den Gln. (3.1.4) und (3.1.17) folgt zunächst für zwei benachbarte Elemente e und f

$$S_{s,x}^e = -S_{s,x}^f ; \quad S_{s,z}^e = -S_{s,z}^f ;$$

und aus Glg. (3.2.3) für ein Element f mit Nachbarelement nf

$$v_x^f = v_x^{nf} + v_S \cos(\alpha_S^f + \psi_S)$$

$$v_z^f = v_z^{nf} + v_S \sin(\alpha_S^f + \psi_S)$$

Damit können die Summen der Kräfte S_S umgeformt werden, und man erhält aus Glg. (3.2.8)

$$-\sum_{f=1}^m (v_x^f P_x^f + v_z^f P_z^f) - \sum_{f=1}^n (v_{s,x} S_{s,x} + v_{s,z} S_{s,z}) - \sum_{f=1}^{m_r} (\hat{v}_x^{nf} S_x^f + \hat{v}_z^{nf} S_z^f) = 0 \quad (3.2.8)^1$$

Mit den Abkürzungen

$$A = \sum_{f=1}^m (v_x^f P_x^f + v_z^f P_z^f) = \sum_f A^f$$

$$D = -\sum_{f=1}^n (v_{s,x} S_{s,x} + v_{s,z} S_{s,z}) = \sum_{f=1}^n D_S \quad (3.2.9)$$

$$\hat{A} = \sum_{f=1}^{m_r} (\hat{v}_x^{nf} S_x^f + \hat{v}_z^{nf} S_z^f) = \sum_{f=1}^{m_r} \hat{A}^f$$

ergibt sich daraus schließlich die bekannte Gleichung

$$\hat{A} = D - A \quad (3.2.8)^2$$

die besagt, daß die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte am nachgiebigen Rand gleich der (negativen) inneren ist, die aus der Dissipation und der kinetischen Arbeit bzw. kinetischen Energie besteht.

Von allen möglichen Bruchmechanismen wird derjenige maßgebend, für den die Arbeit $\hat{A}$ zu einem Minimum wird.

Definiert man diese Arbeit $\hat{A}$ als Zielfunktion f , also

$$f = \hat{A} = \sum_{i=1}^{m_r} (\hat{v}_x^{nf} S_x^f + \hat{v}_z^{nf} S_z^f) = \hat{v}^t S \quad (3.2.10)$$

bzw. mit Glg.(3.2.8)²

$$f = D - A \quad (3.2.11)$$

so ergibt sich die maßgebende Bruchgeometrie mit den zugehörigen Kräften und den dazu kompatiblen Verschiebungen aus

$$f^* = \min f(x) \quad (3.2.12)$$

wobei die kartesischen Koordinaten der variablen Elementknoten die kinematischen Freiheitsgrade (x) darstellen.

Aus der Voraussetzung, daß trotz beliebig unterschiedlicher Dilatanzwinkel in der maßgebenden Bruchgeometrie stets gleiche Relativverschiebungsrichtungen auftreten sollen, resultiert auch stets dieselbe Statik.

Ein theoretischer Beweis für die Allgemeingültigkeit dieser Voraussetzung fehlt. (Die bisher vom Verfasser untersuchten Beispiele bestätigen sie allerdings. Eine gezielte Untersuchung erfolgte nicht). Sie wird im folgenden als Arbeitshypothese eingesetzt.

Bei Gültigkeit der Voraussetzung folgt unter Beachtung von Glg.(3.2.10), daß die Lösung von der Fließregel unabhängig sein muß. Daraus folgt weiter, daß die in Abschnitt 1. zitierte Normalität keine Voraussetzung für die Gültigkeit der Grenzwertsätze sein kann.

Auf jeden Fall sind diese Aussagen für eine große Problemklasse (ebene Probleme ohne kinematischen Zwang) haltbar, wenn möglicherweise auch nicht für alle.

Aus den unterschiedlichen Gln.(3.2.10) und (3.2.11) bieten sich im Zusammenhang mit der Fließregel unterschiedliche Rechenverfahren an.

a. Fließregel ohne Dilatanz, also $\phi=0$ (Volumenkonstanz)

Als Zielfunktion wird Glg.(3.2.10) gewählt. Die Berechnung der inneren Arbeiten ist nicht erforderlich. Ermittelt werden müssen die Kinematik, bzw. nur die Richtungsvorzeichen, die Statik und die äußere Arbeit.

b. Fließregel mit maximaler Dilatanz, also $\phi=\phi$

Wird als Zielfunktion Glg.(3.2.11) gewählt, so reduziert sich der Rechenaufwand sehr, da nach Glg.(3.2.7) zur Ermittlung der Dissipation die Berechnung der Q-Kräfte entfallen kann; d.h. es müssen wie sonst die Kinematik von der Statik jedoch nur die Kräfte P^f , C_s und U_s ermittelt werden, um daraus durch Multiplikation die innere Arbeit berechnen zu können.

So rechengünstig und optimal formuliert dieses Vorgehen zunächst erscheinen mag, es ist in Wirklichkeit problematisch. Wegen fehlender Ermittlung der vollständigen Statik kann die Zulässigkeit der zum Bruchmechanismus gehörigen Gleichgewichtskräfte - nämlich ohne Zugkräfte - nicht nachgewiesen werden. Damit kann die Lösung falsch sein.

Aufgrund der einfachen Statik eignet sich diese Fließregel zur Entwicklung von analytisch integrierbaren Lösungen, Vollenweider (1970).

c. Fließregel mit beliebiger Dilatanz oder Kontraktanz

Als Zielfunktion kann ohne besondere Vor- oder Nachteile Glg.(3.2.10) oder auch (3.2.11) verwendet werden.

d. Standsicherheitsprobleme

Für Standsicherheitsprobleme ohne bruchverursachende Randlasten ist $\hat{A}=0$, d.h. es muß gelten $D=A$. Dies kann nur dadurch erreicht werden, daß eine oder mehrere Bruchursachen angenommen werden, Goldscheider (1979). Nach Festlegung der Bruchursache(n) lassen sich dadurch zusätzliche Kräfte bestimmen, die das Gleichgewicht herstellen.

Gilt z.B. als Bruchursache eine gleichmäßige Reduktion der maximal möglichen Scherfestigkeit τ auf τ_{mob} in allen Fugen, so erhält man als

Sicherheitsdefinition die bekannte Fellenius-Regel

$$F_s = \tau_s / s_{s,mob} = T_s / T_{s,mob} = D_s / D_{s,mob} \quad (3.2.13)$$

Sie kann identisch aus der von Goldscheider (1979) für beliebige Bruchursachen eingeführten allgemeinen Sicherheitsdefinition

$$F_s = D/A \quad (3.2.14)$$

abgeleitet werden.

Da i.a. die Sicherheit nicht explizit ermittelt werden kann, ist eine - meist schnell konvergierende - Iterationsrechnung erforderlich. Als Zielfunktion wird dann zweckmäßigerweise die Sicherheit gewählt, die minimiert werden muß.

Wird hingegen als Bruchursache eine einzelne Lasterhöhung, z.B. eine Fundamentbelastung angenommen, so kann die Iteration entfallen, da diese Last stets explizit angegeben werden kann.

Das Fundament mit seiner dem Boden gegenüber relativ starren Konstruktion muß jedoch wirklich vorhanden sein, da sonst bei der Variation der Geometrie eine nur gedachte Fundamentbreite zur Breite 0 degeneriert (Ochmann).

3.3 Diskretisierungsfehler und Momentenbedingung

Die KEM gestattet die Berücksichtigung der Bruchformen Linienbruch und Zonenbruch. Im ersten Fall werden die möglicherweise real gekrümmten Bruchlinien durch Geraden approximiert, im zweiten Fall kann ein Zonenbruchbereich durch Feinunterteilung angenähert werden. Im allgemeinen wird sich die Aufteilung des Kontinuums in diskrete Elemente auf das Ergebnis, nämlich auf die maßgebende Bruchform und die zugehörige Kräfteverteilung auswirken. Inwieweit sich die Diskretisierungsfehler speziell auf die Statik auswirken können, soll im folgenden exemplarisch untersucht werden.

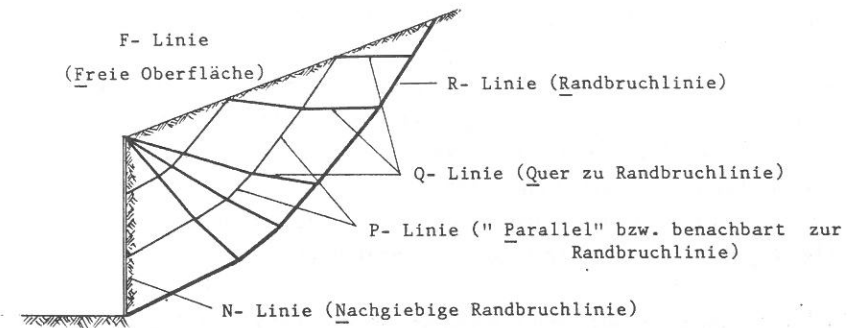


Bild 3.3.1 Priorität der Bruchlinien

Zunächst sei der Einfluß der Einteilung nur im Hinblick auf die Kräfte, erst anschließend im Hinblick auf die Momente betrachtet.

Unter Vorgriff auf die Ergebnisse der bisher untersuchten homogenen Traglastprobleme (s.a. Abschnitt 6) können folgende Schlußfolgerungen formuliert werden:

1. Dominierend ist stets der Einfluß der Form der äußersten durchgehenden Randbruchlinie R (s. Bild 3.3.1).
2. Den nächst größten Einfluß haben Anzahl und Lage der dazu quer verlaufenden Bruchlinien Q_i .
3. Untergeordneter dazu ist meist der Einfluß der zur Randbruchlinie "parallel" liegenden Bruchlinien P_i .
4. Der Grad der notwendigen Feinunterteilung ist abhängig von der Größe der Richtungsänderungen der inneren Kräfte, allgemeiner gesagt, der Hauptspannungen, und der Größe der Scher-, Wand- oder Sohlreibungswinkel.
5. Die feinste Unterteilung ergibt meist die kleinste Zielfunktion (sofern als äußere Arbeit definiert).

Daraus folgt für die praktische Anwendung bei überwiegend homogenen Problemen:

6. Aktive Erddruckprobleme mit i.a. geringen Hauptspannungsrichtungsänderungen können meist mit wenigen Elementen und ohne P- Linien diskretisiert werden (z.B. 1 bis 4 Elemente).
7. Passive Erddruckprobleme erfordern schon eine etwas feinere Diskretisierung (z.B. 2 bis 6 Elemente bei ggfs. einer P-Linie).
8. Grundbruchprobleme sollten noch feiner unterteilt werden (3 bis 8 Elemente bei ggfs. einer P- Linie).
9. Bei noch größeren Hauptspannungsrichtungsänderungen wie "Pfahlumströmung" infolge von horizontalem Kleisub ist eine weitere Verfeinerung erforderlich.
10. Bei freien Böschungsproblemen genügt i.a. eine Querunterteilung; wird eine vertikale Quereinteilung bei gleichzeitiger Vernachlässigung der Schubkräfte in den inneren Bruchlinien angenommen, entspricht das Ergebnis der Standsicherheitsberechnung nach Janbu (1954).
11. Bei großen Scherwinkeln ist i.a. eine feinere Einteilung erforderlich als bei kleinen, um die gleiche Genauigkeit zu erzielen.

Wenn diese Diskretisierungsempfehlungen eingehalten werden und wenn vor allem die Geometrie ausreichend vollständig variiert wird, ergibt sich ein Diskretisierungsfehler im Hinblick auf die Zielfunktion, der i.a. zwischen 20% und 2% liegen dürfte, allerdings auf der unsicheren Seite. Hinzugefügt werden soll der Hinweis, daß einer ausreichenden Variation eines nur grob diskretisierten Problems stets der Vorzug vor einer Feinunterteilung mit unzureichender Variation gegeben werden sollte.

Die bisherige statische Betrachtungsweise ging davon aus, daß die Momentenbedingung keine für das Ergebnis wesentliche Information leisten kann. Diese Aussage muß ergänzt werden, denn sie scheint an die bisher nicht explizit angegebene Voraussetzung gebunden zu sein, daß die einzelnen Bruchlinienkanten eines Elements einigermaßen vergleichbare Längen aufweisen. Nur dann nämlich können die Angriffspunkte der Normalkräfte stets so verschoben werden, daß das Momentengleichgewicht eines Elements und damit aller Elemente immer exakt eingehalten werden kann. Daß dies bei Mißachtung der Elementgrößen zu beachtlichen Fehlern führen kann, sei durch folgenden, allerdings etwas akademischen Vergleich demonstriert:

- Wenn als Randbruchlinie beim Grundbruchproblem eines gewichtslosen c_u -Bodens (also $\varphi_u=0$; $\gamma=0$) ein Halbkreis angenommen wird und dabei die innere Diskretisierung nur durch radiale Q- Linie gemäß Bild 3.3.2 erfolgt, so ergibt sich für die bezogene Grundbruchlast bzw. den Tragfähigkeitsbeiwert der bekannte Wert $N_c=2\pi$ als Grenzwert einer so vorgenommenen Feinunterteilung. (Den exakten Wert $N_c=2+\pi$ erhält man nur bei Diskretisierung der Randbruchlinie mit Geraden und Viertelkreis). Die Kontrolle des Ergebnisses über die globale Momentenbedingung liefert

$$\frac{1}{2} P_f B = \pi B c_u$$

bzw.

$$\sigma_f = \frac{P_f}{B} = 2\pi c_u = N_c c_u$$

(3.3.1)

also eine Übereinstimmung der Ergebnisse.

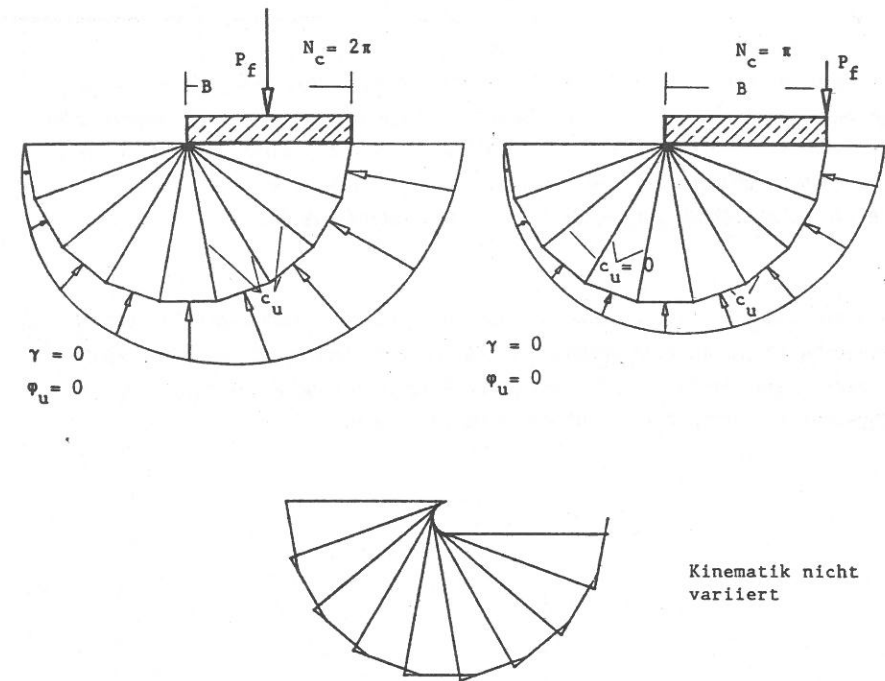


Bild 3.3.2

Normalspannungsverlauf beim Grundbruchproblem (c_u - Böden)

Die resultierende Bruchlast wurde hier stillschweigend als mittig stehend, bzw. die Spannungsverteilung auf die Fundamentsohle als symmetrisch angenommen. Wenn man aus dem KEM- Ergebnis der Kräfte die Normalspannungsverteilung in der Randbruchlinie konstruiert, so ergibt sich für ein beliebiges Element, daß die Momentenbedingung genau dann eingehalten ist, wenn die Normalkräfte auf die Elementseiten stets in Kantenmitte wirken.

Diesem realen Beispiel soll das fiktive Problem gegenüber gestellt werden, daß die Kohäsion nur in der Randbruchlinie, nicht aber in den Q- Linien wirke. Man erhält mit der KEM ein zunächst verblüffendes Ergebnis: der Tragfähigkeitsbeiwert N_c sinkt auf $N_c = \pi$, also auf den halben Wert wie beim vorherigen Problem. Die Kontrolle über die globale Momentenbedingung zeigt, daß die Bruchlast jetzt am Fundamentrand stehen müßte. Die Kontrolle über die Einzellemente ergibt entsprechend, daß zwar die Normalkräfte in der Randbruchlinie wie bisher mittig stehen, daß aber die Normalkräfte auf die Q- Linien ebenfalls am Rande stehen müssen, um überall das Momentengleichgewicht zu gewährleisten.

Unabhängig von den verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten dieser Ergebnisse zeigt es sich, daß hier die Momentenbedingung sehr wohl eine wesentliche Information liefern kann. Dieses Ergebnis wird gestützt durch Erfahrungen mit verschiedenen Lamellenverfahren beim Standsicherheitsnachweis von Böschungen, siehe z.B. Übersichten von Woldt (1977) und Gußmann (1978).

Nach Ansicht des Verfassers dürfte dieses Problem der ungünstigen Elementseitenverhältnisse im Zusammenhang mit der Momentenbedingung bzw. der "Spannungsverteilung" am Außenrand R und am nachgiebigen Rand N bei Variation der Bruchgeometrie noch nicht abschließend geklärt sein.

4. Das räumliche Problem

Das räumliche Problem der Ermittlung des maßgebenden Grenzzustandes in Böden ist bisher nur in einigen wenigen Sonderfällen bzw. nur mit zum Teil sehr weitreichenden Vereinfachungen gelungen; so gibt es z.B. Lösungen von Hoek/Bray (1977) und Jinnan (1985) für keilförmige Felsrutschungen, oder von Azzouz/Balligh (1976), Hovland (1977) und Herzog (1981) für Böschungen. Auf die Auswirkung der Vernachlässigung der Lamellenseitenkräfte - die beiden letzten Verfahren setzen dies voraus - weisen Azzouz/Balligh (1978) in einer Zuschrift hin. Eine befriedigende Lösung des räumlichen Problems gibt es meiner Kenntnis nach bis jetzt noch nicht.

Das bisher aufgezeigte Lösungsverfahren für ebene Probleme läßt jedoch erwarten, daß eine Erweiterung der KEM auf drei Dimensionen möglich sein sollte. Die Ergebnisse der folgenden Abschnitte 4.2 und 4.3 haben diese Erwartung bestätigt. Allerdings war eine formale Erweiterung der 2-D-Lösung zur 3-D-Lösung nicht durchführbar, sondern Geometrie, Kinematik und Statik mußten neu und teilweise anders formuliert werden.

Dabei führte die Berücksichtigung der Dilatanz in der Kinematik auf ein System von quadratischen Gleichungen mit gemischten Gliedern, das im allgemeinen Fall kaum effizient gelöst werden kann.

Ohne Dilatanz ist die Kinematik jedoch über ein lineares Gleichungssystem darstellbar und somit gut lösbar.

Die Statik läßt sich ebenfalls wieder auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückführen.

Damit ist die in diesem Abschnitt gewählte Formulierung auch für ebene Probleme geeignet. Eine alternative Darstellung des ebenen Problems - gegenüber der in Abschnitt 3 angegebenen Lösung - wird explizit nicht angeschrieben. Sie ist jedoch durch Weglassen aller Glieder der dritten Dimension sofort einfach ableitbar.

4.1 Geometrie

Die Beschreibung der Geometrie eines räumlichen Problems kann auf die Grundform Tetraeder des allgemeinen Elements reduziert werden, da sich dieses - als Polyeder - stets aus der Grundform zusammensetzen läßt.

Die Elemente werden beliebig nummeriert, ebenso die Eckpunkte. Die Lage der Eckpunkte wird durch ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen x, y und z festgelegt.

Die für Kinematik und Statik erforderlichen Formeln zur Ermittlung von Flächen eines Dreiecks, Volumen eines Tetraeders, Länge eines Vektors und die Gleichung einer Ebene werden im folgenden ohne Ableitung angegeben.

Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten $P_i (x_i, y_i, z_i)$:

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2} \quad (4.1.1)$$

Volumen eines Tetraeders :

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.1.2)$$

Ist $V=0$, so liegen alle vier Punkte in einer Ebene.

Länge eines Vektors:

$$d = |v_{1,2}| \text{ von } P_1 \text{ nach } P_2 : \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4.1.3)$$

Gleichung einer Ebene:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1.4)$$

bzw. nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassung :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4.1.4)^1$$

Zur Kennzeichnung der dreidimensionalen Polyederflächen ist die Einführung der äußeren Flächennormalen als Einheitsvektor $\{n_o\}$ mit den Richtungskosinus $\{l=\cos\alpha ; m=\cos\beta ; n=\cos\gamma\}$ zweckmäßig; die Winkel α, β und γ kennzeichnen hierbei die Winkel zwischen der Flächennormalen und der positiven x, y oder z-Achse.

Die Hesse'sche Normalform von Gleichung (4.1.4)¹ ergibt sich damit zu:

$$lx + my + nz - p = 0 \quad (4.1.4)^2$$

wobei gilt:

$$l = \frac{A}{W} ; m = \frac{B}{W} ; n = \frac{C}{W} \quad (4.1.5)$$

$$p = -\frac{D}{W} ; W = \text{sign}(-D) (A^2 + B^2 + C^2)^{0.5}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

p kennzeichnet den Abstand der Ebene vom Nullpunkt in positiver Normalenrichtung.

Die eindeutige Zuordnung der äußeren Flächennormalen zum Element erfordert eine weitere Kennzeichnung der Richtungswinkel. Sie wird durch Indices für die Elemente vorgenommen.

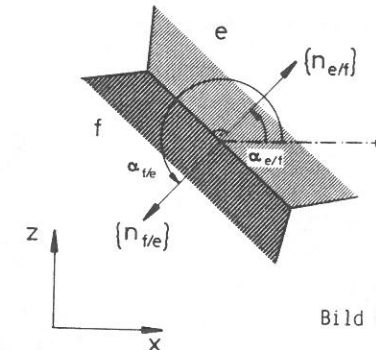


Bild 4.1 Äußere Flächennormale

Gemäß Bild 4.1 bezeichnet $\alpha_{e/f}$ den Winkel der äußeren Flächennormalen $\{n_{e/f}\}$ des Elements f mit angrenzendem Element e zur positiven x-Achse (entsprechendes gilt für die Winkel $\beta_{e/f}$ und $\gamma_{e/f}$).

Damit gilt :

$$\begin{aligned} \{n_{e/f}\} &= \{l_{e/f} ; m_{e/f} ; n_{e/f}\} = -\{n_{f/e}\} \\ &= \{-l_{f/e} ; -m_{f/e} ; -n_{f/e}\} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

4.2 Kinematik

Zunächst stellt die Diskretisierung des Kontinuums eines zu lösenden Randwertproblems in durch ebene Flächen begrenzte räumliche, kinematische Elemente (Polyeder) - oder einfacher: die Entwicklung eines geeigneten räumlichen Bruchmechanismus - eine nicht zu unterschätzende Aufgabe dar. Als Strategie kann vorerst nur vorgeschlagen werden, einen den kinematischen Randbedingungen angepaßten Bruchmechanismus aus wenigen Tetraedern zu entwerfen, ihn auf seine kinematische und statische Lösbarkeit zu überprüfen und ihn dann ggfs. zu verfeinern, durch Teilung und/oder Erweiterung in weitere Elemente. Ein solcher Mechanismus wird im folgenden vorausgesetzt.

Als Unbekannte werden die Absolutverschiebungskomponenten

$$\{v^{fi}\} = \{v_x^{fi}, v_y^{fi}, v_z^{fi}\}$$

der Elemente f_i eingeführt (und nicht mehr die Relativverschiebungen).

Die Gesamtkinematik läßt sich auf die Grundaufgabe reduzieren, die Absolutverschiebung $\{v^f\}$ eines Elements f zu ermitteln, wenn die Absolutverschiebungen $\{v^c\}$, $\{v^d\}$ und $\{v^e\}$ dreier angrenzender Elemente c , d und e als zunächst bekannt vorausgesetzt werden.

Aus der zeichnerischen Darstellung des ebenen Problems nach Bild (4.2) und (4.3) läßt sich ohne Schwierigkeit auch die entsprechende dreidimensionale Lösung ableiten.

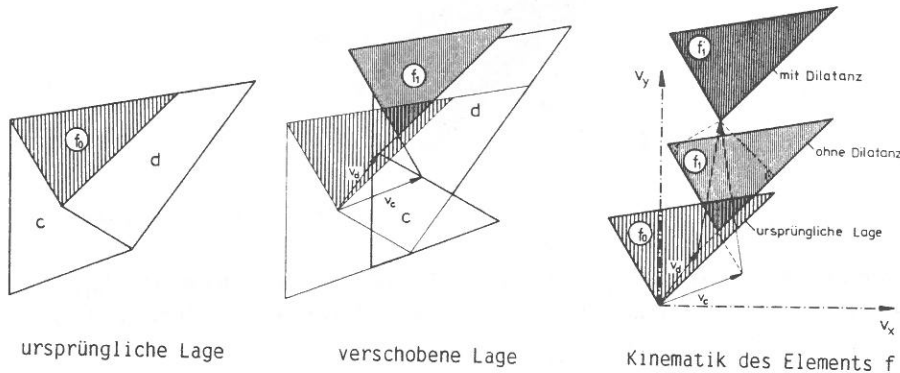


Bild 4.2 Kinematik

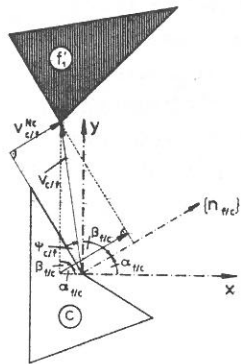


Bild 4.3 Kinematik - Beziehung bei Dilatanz

Der Grundgedanke der Lösung besteht darin, die kartesischen Komponenten der Relativverschiebungsvektoren $\{v_{c/f}\}$, $\{v_{d/f}\}$ und $\{v_{e/f}\}$ zunächst in ihre jeweiligen Normalenrichtungen $\{n_{c/f}\}$, $\{n_{d/f}\}$ und $\{n_{e/f}\}$ zu zerlegen, die Relativverschiebungskomponenten wieder in Absolutverschiebungskomponenten aufzuspalten und so drei Gleichungen für die drei Unbekannten v_x^f , v_y^f und v_z^f zu erhalten.

Für $\{v_{c/f}\}$ gilt nach Zerlegung in positiver $\{n_{c/f}\}$ -Richtung:

$$v_{c/f,x} \cos \alpha_{c/f} + v_{c/f,y} \cos \beta_{c/f} + v_{c/f,z} \cos \gamma_{c/f} = v_{c/f}^N \quad (4.2.1)$$

bzw. mit Glg. (4.1.6):

$$v_{c/f,x} \cos \alpha_{c/f} + v_{c/f,y} \cos \beta_{c/f} + v_{c/f,z} \cos \gamma_{c/f} = -v_{c/f}^N \quad (4.2.2)$$

Mit dem Dilatanzwinkel $\phi_{c/f}$ gilt:

$$v_{c/f}^N = |v_{c/f}| \sin \phi_{c/f} \quad (4.2.3)$$

woraus mit Glg. (4.1.2) folgt:

$$v_{c/f}^N = (v_{c/f,x}^2 + v_{c/f,y}^2 + v_{c/f,z}^2)^{0.5} \sin \phi_{c/f} \quad (4.2.4)$$

Nach Einsetzen von Glg. (4.2.4) in (4.2.2) ergibt sich nach Quadrierung und Umstellung:

$$\begin{aligned} &v_{c/f,x}^2 (\cos^2 \alpha_{c/f} - \sin^2 \phi_{c/f}) + v_{c/f,y}^2 (\cos^2 \beta_{c/f} - \sin^2 \phi_{c/f}) + \\ &+ v_{c/f,z}^2 (\cos^2 \gamma_{c/f} - \sin^2 \phi_{c/f}) + 2(v_{c/f,x} v_{c/f,y} \cos \alpha_{c/f} \cos \beta_{c/f} + \\ &+ v_{c/f,y} v_{c/f,z} \cos \beta_{c/f} \cos \gamma_{c/f} + v_{c/f,z} v_{c/f,x} \cos \gamma_{c/f} \cos \alpha_{c/f}) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Geometrisch interpretiert stellt diese Gleichung eine Kegelfläche mit dem Öffnungswinkel $(\pi - 2\phi_{c/f})$ und der Normalen $\{n_{c/f}\}$ als Achsen dar: dem geometrischen Ort aller - von c aus gesehen - möglichen Relativverschiebungsvektoren $\{v_{c/f}\}$.

Ohne die entsprechenden Gleichungen für $\{v_{d/f}\}$ und $\{v_{e/f}\}$ anzuschreiben, ist sofort ersichtlich, daß die gesuchte Lösung geometrisch als Schnitt von drei Kegelflächen bzw. mathematisch durch Lösen von quadratischen Gleichungen mit gemischten Gliedern gefunden werden kann. Weiter müssen die Schnittpunkte - bei vorgegebener Dilatanz - auf ihre Zulässigkeit überprüft werden.

Da diese Lösungsart äußerst aufwendig ist, wird im folgenden auf die Berücksichtigung einer Dilatanz verzichtet, wodurch sich die Lösung wieder vereinfacht.

Angemerkt sei noch, daß sich für das ebene Problem Glg.(4.2.5) als Produkt von zwei Klammerausdrücken mit linearen Gliedern umformen läßt, die sich nur durch Terme $(\alpha+\psi)$ und $(\alpha-\psi)$ usw. unterscheiden. Von den vier durch lineare Gleichungen zu ermittelnden Lösungspunkten ist stets nur einer im zulässigen Gebiet. Beim räumlichen Problem ist eine solche Aufspaltung nicht möglich.

Für $\psi=0$ erhält man aus Glg.(4.2.2) mit

$$\begin{aligned} v_{c/f,x} &= v_x^f - v_x^c; \\ v_{c/f,y} &= v_y^f - v_y^c; \\ v_{c/f,z} &= v_z^f - v_z^c. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

und unter Berücksichtigung von Glg.(4.1.6):

$$l_{c/f}v_x^f + m_{c/f}v_y^f + n_{c/f}v_z^f + l_{f/c}v_x^c + m_{f/c}v_y^c + n_{f/c}v_z^c = 0 \quad (4.2.7)$$

und entsprechend aus $\{v_{d/f}\}$ und $\{v_{e/f}\}$:

$$l_{d/f}v_x^f + m_{d/f}v_y^f + n_{d/f}v_z^f + l_{f/d}v_x^d + m_{f/d}v_y^d + n_{f/d}v_z^d = 0$$

$$l_{e/f}v_x^f + m_{e/f}v_y^f + n_{e/f}v_z^f + l_{f/e}v_x^e + m_{f/e}v_y^e + n_{f/e}v_z^e = 0$$

Liegt das Element f an einem starren Rand ($\equiv$ Element 0) an, so gilt:

$$v_x^0 = 0; v_y^0 = 0; v_z^0 = 0. \quad (4.2.8)$$

Für ein Element f an einem nachgiebigen Rand nf mit vorgegebenen Verschiebungsvektor $\{\hat{v}^{nf}\}$ gilt mit Glg.(4.2.1)

$$v_{o/nf}^N = \hat{v}^N = l_{f/nf}v_x^{nf} + m_{f/nf}v_y^{nf} + n_{f/nf}v_z^{nf} \quad (4.2.9)$$

Entsprechend der Zuordnung der einzelnen Polyeder zueinander läßt sich die Kinematik des globalen Systems durch das lineare Gleichungssystem

$$[K_v] \{v^f\} + \{\hat{v}^N\} = 0 \quad (4.2.10)$$

darstellen, wobei

$[K_v]$ die Richtungskosinus der äußeren Flächennormalen mit maximal 6 von Null verschiedenen Termen,

$\{v^f\}$ die unbekannten Absolutverschiebungskomponenten aller (echten) Elemente,

$\{\hat{v}^N\}$ die Normalkomponenten der jeweils vorgegebenen Randelement-Verschiebungen enthält.

Die Kinematik ist genau dann eindeutig lösbar - und damit zulässig - wenn für m Elemente

$$n=3m \quad (4.2.11)$$

unbekannte Absolutverschiebungskomponenten zu ermitteln sind.

Nach Auflösen des linearen Gleichungssystems (4.2.10) nach $\{v^f\}$ erhält man die Relativverschiebungskomponenten gemäß Glg.(4.2.6).

Die Richtungskosinus der Relativverschiebungskomponenten - gekennzeichnet durch Querstriche - ergeben sich mit Glg.(4.1.5) und (4.1.3) zu

$$\begin{aligned} \bar{l}_{c/f} &= \cos \bar{\alpha}_{c/f} = v_{c/f,x} / |v_{c/f}| \\ \bar{m}_{c/f} &= \cos \bar{\beta}_{c/f} = v_{c/f,y} / |v_{c/f}| \\ \bar{n}_{c/f} &= \cos \bar{\gamma}_{c/f} = v_{c/f,z} / |v_{c/f}| \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

mit

$$|v_{c/f}| = (v_{c/f,x}^2 + v_{c/f,y}^2 + v_{c/f,z}^2)^{0.5}$$

4.3 Statik

Die statische Lösung des räumlichen Problems ist an die Voraussetzung gebunden, daß die Richtungskosinus $\bar{l}_i, \bar{m}_i$ und $\bar{n}_i$ aller Relativverschiebungsvektoren, oder genauer, der Tangentialanteile der Relativverschiebungsvektoren im allgemeinen Fall der Dilatanz, bekannt sind. Nach Abschnitt 4.2 können diese für den Sonderfall $\psi=0$ ermittelt werden.

Ansatzpunkt der Lösung ist wie im ebenen Fall die Aufspaltung der auf eine Elementseitenfläche s des Elements f wirkende Kraft $\{S\}$ in ihre Komponenten $\{S_x, S_y, S_z\}$. Am einfachsten gelingt dies über die getrennte Ermittlung der kartesischen Komponenten der Normal- und Tangentialanteile

$$\{S\} = \{N\} + \{T\} \quad (4.3.1)$$

Die Normalkraft $\{N_{e/f}\} = \{N_s^f\}$, die auf ein Element f mit Nachbarelement e wirkt, sei als Druck wieder positiv definiert. Mit Bild 4.4 und den Richtungskosinus der äußeren Flächennormalen

$$\{n_{e/f}\} = \{n_s^f\} = \{l_s^f, m_s^f, n_s^f\} \quad \text{erhält man}$$

$$\begin{aligned} N_{e/f,x} &= -N_{e/f} l_{e/f} \\ N_{e/f,y} &= -N_{e/f} m_{e/f} \\ N_{e/f,z} &= -N_{e/f} n_{e/f} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

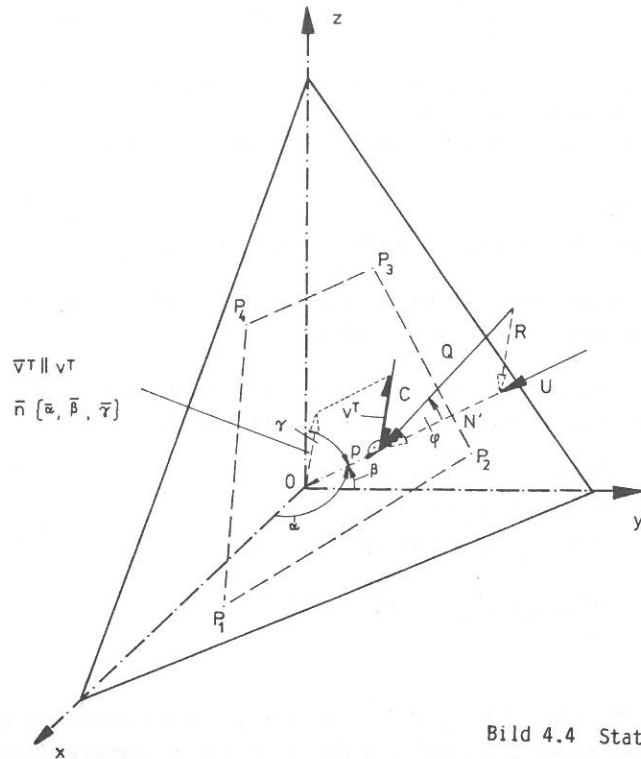


Bild 4.4 Statik

Da die Tangentialanteile als Scherkräfte dem Relativverschiebungsvektor $\{v_{e/f}\}$ entgegen wirken, ergibt sich hieraus mit seinen Richtungskosinus zunächst

$$\begin{aligned} T_{e/f,x} &= -T_{e/f} \bar{l}_{e/f} \\ T_{e/f,y} &= -T_{e/f} \bar{m}_{e/f} \\ T_{e/f,z} &= -T_{e/f} \bar{n}_{e/f} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Wie beim ebenen Problem werden N und T in

$$N = N' + U ; T = R + C \quad (4.3.4)$$

also in jeweils einen unbekannten und einen bekannten Anteil zerlegt. Die bekannten Anteile ergeben sich zu

$$C = c_m F ; U = u_m F \quad (4.3.5)$$

wobei c_m eine mittlere Kohäsion, u_m einen für die Fläche F mittleren Wasserdruck bezeichnen (Ein Richtungsvorzeichen wie im ebenen Fall wird hier nicht

betrachtet; c_m ist also stets positiv, u_m als Druck ebenfalls).

Die effektive Normalkraft N' und die Reibung R können wieder über die Resultierende Q und den Reibungswinkel φ (hier stets positiv) gemäß

$$N' = Q \cos \varphi ; R = Q \sin \varphi \quad (4.3.6)$$

ausgedrückt werden. Nach Einsetzen ergeben sich die Komponenten von $\{S_{e/f}\}$ zu

$$\begin{aligned} S_{e/f,x} &= -\{Q_{e/f}(l_{e/f} \cos \varphi_{e/f} + \bar{l}_{e/f} \sin \varphi_{e/f}) + C_{e/f} \bar{l}_{e/f} + U_{e/f} l_{e/f}\} \\ S_{e/f,y} &= -\{Q_{e/f}(m_{e/f} \cos \varphi_{e/f} + \bar{m}_{e/f} \sin \varphi_{e/f}) + C_{e/f} \bar{m}_{e/f} + U_{e/f} m_{e/f}\} \\ S_{e/f,z} &= -\{Q_{e/f}(n_{e/f} \cos \varphi_{e/f} + \bar{n}_{e/f} \sin \varphi_{e/f}) + C_{e/f} \bar{n}_{e/f} + U_{e/f} n_{e/f}\} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen für ein Element und mit den eingprägten Kräften $\{P\}$ erhält man nach auf drei Dimensionen erweiterter Glg. (3.1.18) für das globale System wieder ein lineares Gleichungssystem hinsichtlich $\{Q\}$

$$[K] \{Q\} + \{F\} = 0 \quad (4.3.8)$$

Die Reibungsmatrix $\{K\}$ enthält jetzt die Terme

$$\begin{aligned} k_x &= (l \cos \varphi + \bar{l} \sin \varphi) \\ k_y &= (m \cos \varphi + \bar{m} \sin \varphi) \\ k_z &= (n \cos \varphi + \bar{n} \sin \varphi) , \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

der Lastvektor $\{F\}$ die eingprägten Kräfte sowie die Kräfte aus Kohäsion und Wasserdruck. Das System ist genau dann eindeutig bestimmbar, wenn bei m Elementen wieder $n=3m$ unbekannte Kräfte zu bestimmen sind. Auf folgende interessante Überlegung sei hingewiesen: beim 3-D Problem liefert eine Kinematik mit Dilatanz andere Richtungskosinus als eine dilatanzfreie Kinematik; daraus resultiert wegen Glg. (4.3.9) auch eine andere Statik.

Trotz gleicher Voraussetzungen scheint dieses Ergebnis auf einen grundsätzlichen Unterschied zwischen dem 3D- und dem 2D-Problem hinzudeuten.

5. Optimierung

Ziel der - auf die KEM angewandten - Optimierung ist es, den maßgebenden Bruchmechanismus und die maßgebende Bruchgeometrie zu finden. Dabei ist die Zielfunktion unter Beachtung von Nebenbedingungen zu minimieren. Die Möglichkeit des Auftretens von lokalen Minima ist zu beachten.

5.1 Nebenbedingungen

Die mathematische Formulierung von Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen lautet:

$$f(x) \rightarrow \text{Minimum} \quad (5.1.1)$$

$$g_j(x) \geq 0$$

Die Lösung wird durch die Nebenbedingungen (Restriktionen) in Form der Ungleichungen g_j erschwert.

Bei der Kinematischen Element-Methode treten folgende, das Lösungsgebiet einschränkende Nebenbedingungen auf:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + c_i \geq 0 \quad (5.1.2)$$

$$A_j > 0 \quad (5.1.3)$$

$$Q_k \geq 0 \quad (5.1.4)$$

auf.

Die linearen Ungleichungen (5.1.2) beschreiben als Grenzgeraden z.B. Konstruktionselemente oder Randfelsschichten, die nicht geschnitten werden sollen. In der mathematischen Behandlung sind sie völlig unproblematisch, da sie einfach zu überprüfen und einzuhalten sind.

Die Ungleichungen der Form (5.1.3) bedeuten, daß die Elementflächen stets positiv bleiben müssen; hinsichtlich der Optimierungsvariablen x_i sind sie nicht linear. Aus Bild (5.1.1)

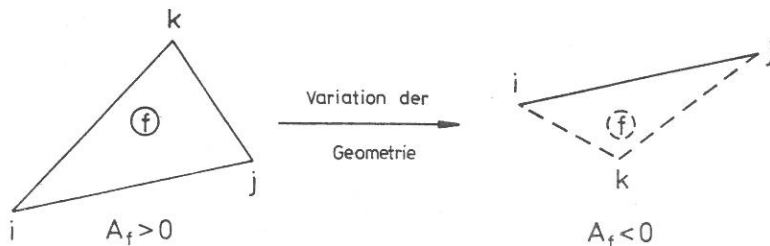


Bild 5.1.1 Positive und negative Elementflächen

ist ersichtlich, daß die Überprüfung der positiven Flächen durch Vergleich der Eckpunktnummerierung mit der ursprünglichen Reihenfolge bzw. mittels der Gauß'schen Flächenformel nach Glg. (3.1.5) erfolgen kann. Die ebenfalls nicht linearen Ungleichungen der Form (5.1.4) bedeuten, daß alle Kräfte Q_k als Druckkräfte positiv sein müssen.

Diese Form der Nebenbedingungen ist schwieriger zu behandeln, da nicht einmal für jede Startgeometrie eine zugkräftefreie Statik garantiert werden kann. Darüberhinaus zeigt die folgende genauere Untersuchung der Ursachen der Zugkräfte eine für die Optimierung unangenehme Eigenschaft.

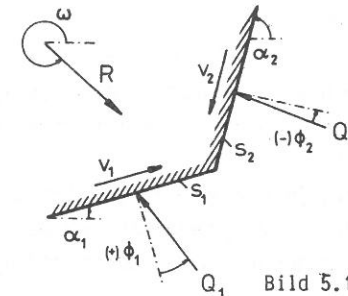


Bild 5.1.2 Kräfte R, Q1 und Q2

Betrachtet man nach Bild (5.1.2) ein Element mit zwei unbekannten Kräften Q_1 und Q_2 und der jetzt mit R bezeichneten Resultierenden aller sonst auf das Element wirkenden Kräfte, so gilt mit Glg. (3.1.19)

$$-\sin(\alpha_1 + \phi_1) Q_1 - \sin(\alpha_2 + \phi_2) Q_2 = -R \cos \omega \quad (5.1.5)$$

$$\cos(\alpha_1 + \phi_1) Q_1 + \cos(\alpha_2 + \phi_2) Q_2 = -R \cos \omega$$

und mit Glg. (3.1.22)

$$\frac{Q_1}{R} = \frac{D1/R}{D} ; \quad \frac{Q_2}{R} = \frac{D2/R}{D} \quad (5.1.6)$$

$$D = -\sin(\alpha_1 + \phi_1) \cos(\alpha_2 + \phi_2) + \sin(\alpha_2 + \phi_2) \cos(\alpha_1 + \phi_1) \\ = \sin(\alpha_2 - \alpha_1 + \phi_2 - \phi_1)$$

$$D1/R = -\cos \omega \cos(\alpha_2 + \phi_2) - \sin \omega \sin(\alpha_2 + \phi_2) \\ = -\cos(\alpha_2 + \phi_2 - \omega)$$

$$D2/R = \sin(\alpha_1 + \phi_1) \sin \omega + \cos(\alpha_1 + \phi_1) \cos \omega \\ = \cos(\alpha_1 + \phi_1 + \omega)$$

Wird zunächst $\alpha_2 > \alpha_1$ vorausgesetzt, so genügen folgende Untersuchungen zum Nachweis positiver (Druck-) Kräfte:

- Nennerdeterminante D ist positiv:

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1 + \phi_2 - \phi_1) > 0 \quad \text{oder} \quad 0 < (\alpha_2 - \alpha_1 + \phi_2 - \phi_1) < \pi \quad (5.1.7)$$

- Zählerdeterminante D_1/R ist positiv:

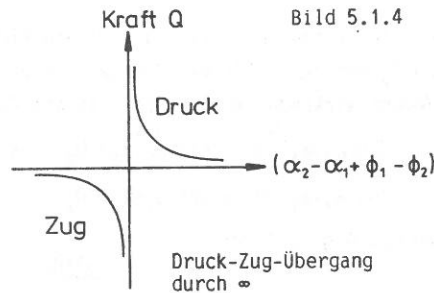
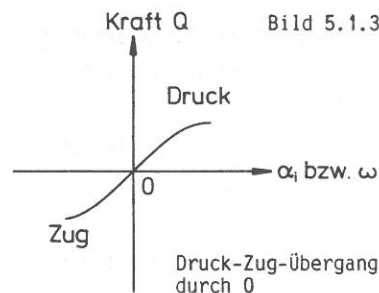
$$\cos(\alpha_2 + \phi_2 - \omega) \leq 0 \quad \text{oder} \quad \pi/2 \leq \alpha_2 + \phi_2 - \omega \leq 3\pi/2 \quad (5.1.8)$$

- Zählerdeterminante D_2/R ist positiv:

$$\cos(\alpha_1 + \phi_1 - \omega) \geq 0 \quad \text{oder} \quad 0 \leq (\alpha_1 + \phi_1 - \omega) \leq \pi/2 \quad \text{bzw.} \quad 3\pi/2 \leq (\alpha_1 + \phi_1 - \omega) \leq 2\pi \quad (5.1.9)$$

Relativ unproblematisch ist die Verletzung der Ungleichungen (5.1.8) bzw. (5.1.9): der Übergang einer Druckkraft (+) in eine Zugkraft (-) geht durch Null gemäß Bild 5.1.3.

Wird hingegen die Ungleichung (5.1.6) verletzt, so erfolgt der Übergang von einer positiven, aber endlich großen Druckkraft in eine Zugkraft gemäß Bild 5.1.4 über eine Polstelle, an der die Kraft "unendlich" groß wird.



Dieser Sachverhalt kann durch Bild 5.1.5 verdeutlicht werden: die Kraftrichtungen der Kräfte Q_1 und Q_2 sind hier parallel, damit kann das Krafteck nur durch unendlich große Kräfte "geschlossen" werden.

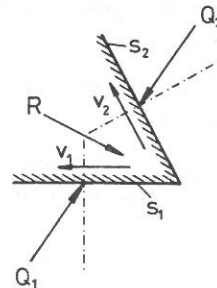
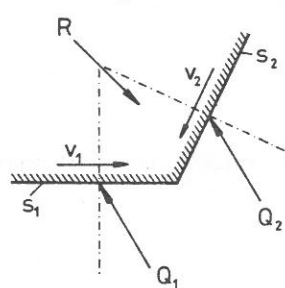


Bild 5.1.5 Kraftrichtungen bei ∞ großen Kräften

Von den unterschiedlichen Möglichkeiten zur Behandlung von nicht-linearen Restriktionen wird im folgenden die Methode der Straffunktionen beschrieben. Die Nebenbedingungen nach den Glg.(5.1.3) und (5.1.4) werden als gewichtete Straffunktionen zur physikalischen Zielfunktion gemäß

$$\bar{f} = f + \lambda_a \sum \delta_{ai} |A_i| + \lambda_q \sum \delta_{qk} |Q_k| \quad (5.1.10)$$

$$\delta_{aj} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ wenn } \begin{cases} A_j < 0 \\ A_j > 0 \end{cases} \quad \delta_{qk} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ wenn } \begin{cases} Q_k < 0 \\ Q_k > 0 \end{cases}$$

addiert; dann kann die Ersatzfunktion $\bar{f}$ anstelle der Zielfunktion f minimiert werden. Das Minimum der Zielfunktion $f_{\min}$ kann nur dann mit dem Minimum der Ersatzfunktion $\bar{f}_{\min}$ zusammenfallen, wenn für den zugehörigen Lösungsvektor $\{x^*\}$ keine Nebenbedingung verletzt ist. Diese Art der Behandlung von Nebenbedingungen ist einfach und häufig erfolgreich.

Treffen jedoch schon bei der Ermittlung der Statik für die Startgeometrie $\{x_0\}$ Zugkräfte mit einer Polstelle auf, so wird diese Strategie mit Sicherheit versagen. Nach meiner Kenntnis gibt es nur wenige Möglichkeiten, solche durchaus realistischen Probleme erfolgreich anzugehen: entweder mit Hilfe der Evolutionsstrategie, b.z.w. einer direkten Suchmethode, bei der alle Geometrien eliminiert werden, für die auch nur eine Nebenbedingung verletzt wird, oder aber die Anwendung der anderen Optimierungsverfahren (s. Abschnitt 5.3) auf die Ersatzfunktion nach Glg.(5.1.10), sofern gewährleistet ist, daß die Startgeometrie keine Zugkräfte jenseits einer Polstelle enthält. Letzteres muß somit geprüft werden und im negativen Fall eine neue Startgeometrie untersucht werden.

Die Abprüfung auf Druckkräfte kann generell durch

$$\text{sign}\{\sin(\alpha_2 - \alpha_1 + \phi_1 - \phi_2)\} = \text{sign}\{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\} \quad (5.1.11)$$

für jeweils zwei Elementseiten durchgeführt werden. Ein Vergleich von Glg. (5.1.11) mit den Glg.(5.1.6) und (3.1.8) zeigt, daß gemäß

$$\begin{aligned} \text{sign}(D_{\text{Statik}}) + \text{sign}(D_{\text{Kinematik}}) &= 0 \dots \text{keine Polstelle} \\ &= \pm 2 \dots \text{Polstelle} \end{aligned} \quad (5.1.11)^1$$

das Vorzeichen der Nennerdeterminanten aus der Statikberechnung demjenigen der entsprechenden Determinante aus der Kinematikberechnung entgegengesetzt sein muß, um Kräfte mit einer Polstelle auszuschließen.

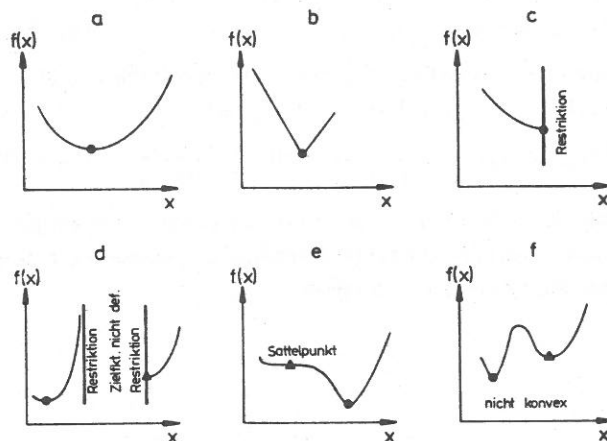
5.2 Lokale Minima bei nicht-konvexen Problemen

Bei Optimierungsaufgaben der Kinematischen Element-Methode nach Glg.(5.1.1) können verschiedene Formen des Minimums auftreten. Eine Darstellung des ein-dimensionalen Problems (Bild 5.2.1) zeigt 5 verschiedene Typen:

- ein Minimum mit $df/dx = 0$;
- ein V-förmiges Minimum mit $df/dx \neq 0$;
- ein Minimum liegt am Rande einer Restriktion $df/dx \neq 0$;
- mehrere lokale Minima sind abgetrennt durch ein Gebiet mit nicht-definierter Zielfunktion ;
- mehrere lokale Minima, eines mit Sattelpunkt ;
- mehrere lokale Minima mit dazwischen liegenden Maximum (nicht konvexes Problem).

Probleme der Klasse a. sind durch Gradientenverfahren, Probleme der Klasse b. und c. sind mit Hilfe des Quasi-Newton-Verfahrens lösbar.

Für die restlichen Probleme mit mehreren lokalen Minima sind die Quasi-Newton-Verfahren nur dann geeignet, wenn von verschiedenen Startwerten ausgegangen werden kann. Eine Überprüfung des kleinsten gefundenen Minimum ist nicht möglich. Die bisherigen Untersuchungen des Verfassers zeigten, daß die einfacher zu lösenden Minimumsaufgaben der Klassen a. bis c. bei Problemen mit relativ wenig Elementen und überwiegend homogener Struktur auftraten, bzw. dann, wenn der Startwert im Einflußbereich des globalen Minimums lag. Je komplizierter der Bruchmechanismus, je inhomogener (Schichtung) das physikalische Problem und je schlechter die Startgeometrie ist, desto schwieriger wird auch die Minimumsuche, da dann Minima-Formen der Klassen d. bis f. in Verbindung mit den Formen b. und c. auftreten können.



Probleme bei der 1-D-Minimierung

Bild 5.2.1

5.3 Strategien

Es gibt kein generelles mathematisches Verfahren, welches das gestellte Problem stets optimal löst, wohl aber gibt es unterschiedliche Strategien, das Ziel zu erreichen. Die beste Strategie ist mit Sicherheit mehrstufig, beginnend mit wenig empfindlichen, stabilen Verfahren bis zur Endstufe der nicht-linearen Optimierungsprogramme.

Die durch einen Grafik-Bildschirm unterstützte Dialog-Optimierung mit der Möglichkeit eines interaktiven Direkteingriffs in ein mehrstufiges Programmpaket wird vom Verfasser als die effizienteste Optimierungsstrategie angesehen.

Man kann die für das Problem in Frage kommenden Verfahren in drei Gruppen einteilen, die - wie folgt - kurz kommentiert werden. Die Gruppierung und Zusammenstellung ist weder zwingend noch vollständig. Im übrigen sei auf die Fachliteratur verwiesen, wovon stellvertretend die Fachbücher:

Bazaara/Shetty (1979), Künzi/Krelle/Randow (1979), Schittkowski (1980), Schwefel (1977)

und die Schriftenreihen:

Mathematical Programming, Journal of Optimization, Optimization, SIAM Journal on Control and Optimization, ZOR

zitiert seien.

1. "Stabile" Verfahren

1.1 Probier-Methode: Nur bei einfachen Problemen bzw. nur im Zusammenhang mit anderen Verfahren als Start bzw. Vorstufe geeignet.

1.2 Dialog-Optimierung: Als Korrektur-Eingriff innerhalb einer Berechnung geeignet, sofern ein Grafik-Bildschirm vorhanden ist. (Damit leider maschinenabhängig). Korrekturen über ein Digitalisierungstablett erwiesen sich als nicht besonders geeignet, da die Prozedur zu umständlich war.

1.3 An Bruchbilder aus Versuchen angepaßte Bruchmechaniken: geeignet als Start. Im besonderen sei auf die Variante der Schneebeli-Modelle hingewiesen.

- 1.4 An Lösungen gemäß anderen Theorien angepaßte Bruchmechanismen: geeignet als Start. Auf die numerischen Lösungen nach der " Statischen Methode" sei hingewiesen.
- 1.5 Netz-Verfeinerung: durch ständige Verfeinerung optimierter, einfacher Bruchmechanismen gewonnene, kompliziertere Bruchmechanismen: geeignete Strategie. Konvergenz zum maßgebenden Mechanismus jedoch- wie eigent- überall- nicht gesichert.
- 1.6 Makro-Elemente bzw. eingeschränkte Variation: Werden mehrere Elemente zu einem Makro-Element zusammengefaßt, das durch einige wenige geome- trische Parameter beschrieben werden kann, so reduziert sich die Anzahl der kinematischen Freiheitsgrade und damit - ggfs. - die Anzahl der er- forderlichen Gradientenberechnungen. Die Kinematik und die Statik blei- ben davon unberührt. Das Verfahren ist geeignet zur Erzeugung kompli- zierter und statisch zulässiger Bruchmechanismen (nach der Optimie- rung), die dann als günstige Startwerte für Verfahren der Gruppe 2 und 3 genommen werden können.
- 1.7 Transformation der Veränderlichen bzw. Auswahl anderer Veränderlicher: möglicherweise eine geeignete Strategie (vom Verfasser nicht unter- sucht). Evtl. im Zusammenhang mit der Kovarianz-Matrix generell mög- lich; durch andere Überlegungen evtl. im Einzelfall erreichbar.
- 1.8 Evolutionsstrategie, nach Rechenberg (1977) : geeignet als Vor- und Mittel- stufe; rechenintensiv, aber sehr stabil.
- 1.9 Direkte Suchverfahren, mathematische Version der Probiervverfahren mit ei- ner Suchstrategie (Simplex und Complex-Methode nach Nelder/Mead (1965) bzw. Box (1965)), geeignet als Vor- und Mittelstufe.
2. Gradienten-Verfahren: Alle unterschiedlichen Gradienten- Verfahren sind als Mittelstufe geeignet; als Endstufe nur bedingt geeignet.
3. "Höhere" Verfahren
 - 3.1 Quasi-Newton-Verfahren: Als Endstufe der Optimierung geeignet. Von den unterschiedlichen Update-Formeln zur Approximation der inversen Hesse- Matrix wird vom Verfasser das Verfahren von Davidon (1975) für beson- ders geeignet gehalten.
 - 3.2 Quadratische bzw. höhere Approximation: für Endstufe geeignet. Evtl. bei manchen Problemen zu empfindlich.

5.4 Verfahren von Davidon

Das Verfahren von Davidon (1975) gehört zur Gruppe der Quasi-Newton-Verfahren; es enthält darüber hinaus einige verfahrens- und programmtechnische Gesichts- punkte, die das Verfahren noch effizienter machen.

In dem zitierten Aufsatz ist das Verfahren vollständig abgeleitet und be- schrieben, einschließlich einer Programmieranweisung, die einem Flußdiagramm entspricht.

Weiter sei auf zwei Veröffentlichungen von Davidon/Nazareth (1977a). (1977b) verwiesen, die FORTRAN-Programme des Verfahrens enthalten.

Die folgende, verkürzte Darstellung wird ohne Ableitung angegeben. Dem eigentlichen Verfahren wird eine einfache Einführung vorangestellt.

Gesucht sei zunächst das Minimum $f_{\min}$ einer impliziten Funktion $f(x)$ der einen Variablen x und der zugehörige x -Wert x^* . Ist das Problem konvex (nur ein - nicht am Rande liegendes - Minimum vorhanden), so findet man die Lösung durch Nullsetzen der Ableitung $g(x)$, (sofern die zweite Ableitung größer als Null ist), d.h. es gilt

$$g(x^*) = f_{,1}(x^*) = df(x^*)/dx = 0 \quad (5.4.1)$$

Die Ableitung kann näherungsweise durch einen Differenzenquotienten

$$g(x) \approx (f(x+\Delta x) - f(x)) / \Delta x \quad \text{oder} \quad (f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)) / 2\Delta x$$

ermittelt werden.

Approximiert man den Gradienten (= Ableitung) an der Stelle $x=a$ durch eine Taylor-Entwicklung

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a)/1! + \dots \quad (5.4.2)$$

so kann das Minimum aus

$$g(x) = 0 = g(a) + (x-a)g'(a) \quad (5.4.3)$$

als Näherungslösung

$$x = a - g(a)/g'(a) = a - (d^2f(a)/dx^2)^{-1} * g(a) \quad (5.4.3)^1$$

bzw. als fortschreitende Näherungslösung

$$x^{k+1} = x^k - (d^2f(x^k)/dx^2)^{-1} * g(x^k) \quad (5.4.3)^2$$

erreicht werden.

Ist die Funktion f hingegen von den m Variablen x_i abhängig, die im Vektor x zusammengefaßt werden, so ergibt sich mit

$$g = \text{Gradienten-Vektor der 1.ten Ableitungen } g_i = df/dx_i$$

$$H = \text{Hessematrix der 2.ten Ableitungen } h_{ij} = d^2f/dx_i dx_j$$

die fortschreitende Näherungslösung

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k) * g(x^k) \quad (5.4.3)^3$$

Die Bildung der inversen Hessematrix ist erstens sehr aufwendig, zweitens nur selten analytisch möglich, so daß auch hierfür eine Näherungslösung zweckmäßig ist. In der Literatur gibt es unterschiedliche Formeln, die fast alle nach dem gleichen Prinzip aufgebaut sind: durch ständige Korrekturen D^k wird die Näherung M^k zur inversen Hessematrix H^{-1} fortschreitend verbessert:

$$M^{k+1} = M^k + D^k$$

$$D^k = D^k(M^k, s, y)$$

$$s^k = x^{k+1} - x^k = -\lambda * M^k g^k = -\lambda * d^k \quad (5.4.4)$$

$$y^k = g^{k+1} - g^k$$

Die Schrittweite wird bestimmt über λ durch die Ungleichung

$$f(x^k - \lambda * d^k) < f(x^{k-1}) \quad (5.4.5)$$

Als Ausgangsmatrix M^0 wird die Einheits-Matrix oder eine anders gewonnene Matrix angesetzt. Dadurch ist das Verfahren im Startbereich ein Gradientenverfahren.

Die einzelnen Formeln unterscheiden sich im Aufbau des Korrekturglieds D^k . Mit den Abkürzungen

$$a = y^t M y ; b = s^t y = y^t s ; c = s^t M^{-1} s$$

$$r = \sqrt{a}(s/b - M y/a)$$

$$\beta = 0 \text{ bis } 1$$

ergibt sich die sogenannte Broydensche β -Klasse von Update-Formeln im Zusammenhang mit Umformungen von Dennis/Moré (1977) zu

$$\begin{aligned} D &= D_{DFP} + \beta (D_{BFGS} - D_{DFP}) \\ &= (ss^t/b - M y y^t M/a) + \beta r r^t \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

und den speziellen Update-Formeln von Davidon/Fletcher/Powell (DFP) und Broyden/Fletcher/Goldfarb/Shanno (BFGS)

$$D_{DFP} = ss^t/b - M y y^t M^t/b$$

$$D_{BFGS} = (1 + a/b)ss^t/b - (M y s^t + s y^t M^t)/b \quad (5.4.7)$$

Das von Davidon (1975) entwickelte Verfahren bestimmt nun auf der Grundlage der Eigenwert-Ermittlung in Abhängigkeit der jeweiligen Zahlenwerte a, b und c in jedem Iterationsschritt den freien Wert β derart, daß stets eine optimal konditionierte (numerisch stabile) symmetrische Matrix M errechnet wird:

$$\begin{aligned} b \geq 2ac/(a+c) ; \beta &= b(c-b)/(ac - b*b) \\ b \leq 2ac/(a+c) ; \beta &= b/(b-a) \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Für die Effizienz des Verfahrens von Davidon ist außer der speziellen Update-formel noch wesentlich, daß es keine - exakte - "Line-Search" benötigt. Stattdessen wird durch Halbieren oder Verdoppeln der Schrittweite λ ein neuer Punkt x^{k+1} gesucht, für den die Ungleichung (5.4.5) befriedigt ist. Ein nicht konvergierender Zick-Zack-Kurs wird so im Endbereich der Minimumsuche vermieden.

6. Anwendungen und Beispiele

In diesem Abschnitt soll die breite Anwendungsmöglichkeit der KEM auf unterschiedliche Probleme des Grundbaus anhand von insgesamt 18 Beispielen aufgezeigt werden.

Im Hinblick auf eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit anderen (theoretischen oder experimentellen) Lösungen werden überwiegend "klassische" Beispiele gewählt. Aus dieser Gruppe werden sowohl repräsentative Einzelbeispiele als auch Beispiele unter Einbeziehung einer Variation der Bodenparameter und der Diskretisierungsparameter untersucht.

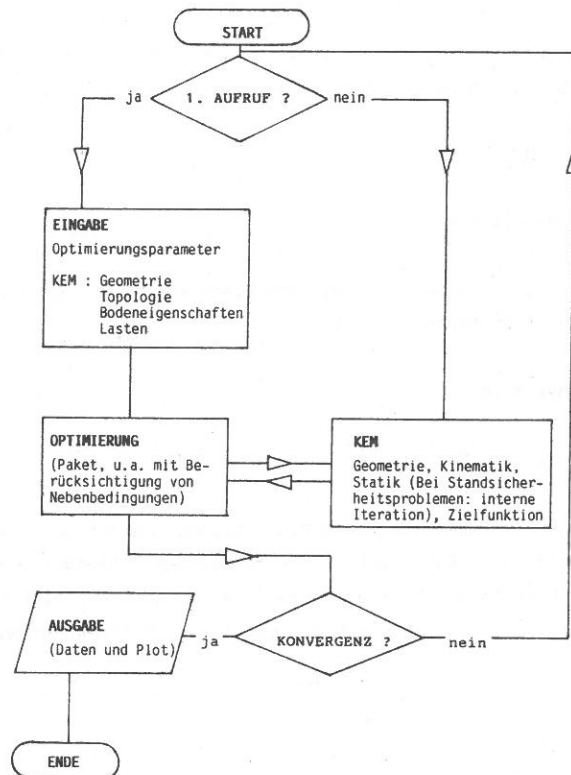


Bild 6.0 Flußdiagramm

Für zwei spezielle Probleme (symmetrischer Grundbruch und Erdwiderstand bei großem Reibungswinkel), für die bekannte Lösungen extrem unterschiedliche Ergebnisse liefern, konnten die Widersprüche mit Hilfe der KEM geklärt und durch eigene experimentelle Untersuchungen sowohl "statisch" als auch "kinematisch" bestätigt werden. Als räumliches Beispiel wurde ein Erdwiderstandsproblem gewählt, für das sowohl experimentelle Untersuchungen als auch eine empirische theoretische Lösung vorliegen, Weißenbach (1962).

Die Beispiele wurden mit unterschiedlichen Rechenprogrammen (zunächst in Basic, später in Fortran) auf unterschiedlichen Computern (Micro-Computer und Großrechenanlagen Cyber, IBM, Cray) berechnet. Als weitere Unterscheidungsmerkmale sind zu nennen: verschiedene Optimierungsverfahren, Art der Behandlung von Nebenbedingungen, Rechengenauigkeit und Konvergenzkriterien, mit oder ohne Dilatanz, Wahl der Zielfunktion, homogenes oder Schichtproblem, mit oder ohne Wasserdruck, eben oder räumlich. Vor allem stellt die räumliche Programm-Version, gemäß der speziellen mathematischen Formulierung, eine völlig neue Programm-Entwicklung dar. Wegen dieser Programm-Vielfalt wird vorerst von einer Programmbeschreibung Abstand genommen.

Unabhängig von diesen Programmen wird im Augenblick an der Entwicklung eines einheitlichen Programm-Pakets samt Dokumentation gearbeitet, über das nach Fertigstellung an geeigneter Stelle berichtet werden wird.

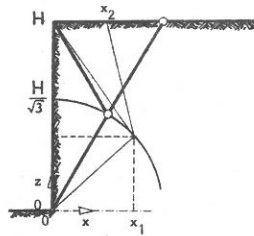
Stellvertretend für die unterschiedlichen Programm-Versionen ist aus Bild 6.0 der prinzipielle Programm-Ablauf ersichtlich.

6.1 Aktiver Erddruck

Als Zielfunktion wurde für sämtliche Erddruckbeispiele im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich die resultierende Erddruckkraft und nicht die resultierende äußere Arbeit gewählt. Dies hängt u.a. mit der zeitlichen Entwicklung der Berechnung der Beispiele und der erst späteren Weiterentwicklung der Theorie zusammen. Die Ergebnisse sind somit nur für rein translatorische Wandverschiebungen streng gültig. Für unterschiedliche Wandverschiebungen, mit denen z.B. Fußpunkt- oder Kopfpunktdrehung der Wand approximiert werden können, sind dementsprechend andere Ergebnisse zu erwarten.

Mit aufgenommen werden auch einige Beispiele, die zusammen mit Schweikert (1984) erarbeitet wurden.

In einem 1. Beispiel wird zunächst die Qualität der Optimierung (nach Davidon) überprüft und veranschaulicht.

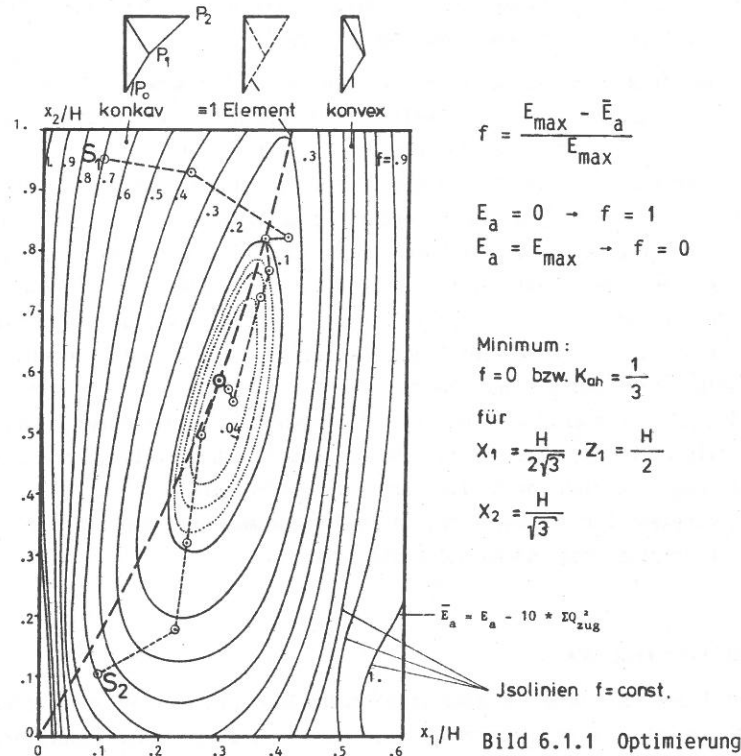


Beispiel 1

$$\phi = 30^\circ; c=0; \delta=0^\circ$$

$$E_{\max} = 0.5 \gamma H^2 K_{ah}$$

$$K_{ah} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \frac{1}{3}$$



Der aktive Erddruck ergibt sich für die in Bild 6.1.1 dargestellten Verhältnisse nach Coulomb zu

$$E_{\max} = 0.5 \gamma H^2 K_{ah} \quad \text{mit } K_{ah} = 1/3.$$

Diese Lösung stellt eine der wenigen vollständigen Lösungen dar und sollte sich somit auch mit der KEM ergeben. Für nur ein Element ist die Lösung mit der KEM fast trivial und identisch. Aber auch für zwei oder mehr Elemente sollte sich diese Lösung ergeben, wobei die Gesamtzahl der Elemente äußerlich nur einen Keil darstellen und die Relativverschiebungen zwischen den Elementen verschwinden sollten. Bild 6.1.1 zeigt für zwei Elemente mit den beiden Freiheitsgraden

x_1 und x_2 (der dritte Freiheitsgrad z_1 wurde wegen der besseren Darstellbarkeit der Ergebnisse bewußt unterdrückt; als Zwangsführung wurde willkürlich ein Kreis für Punkt P_1 angenommen) ein Höhenlinienbild für die dimensionslose Zielfunktion

$$f = (E_{\max} - E_a) / E_{\max}$$

mit den Extremwerten

$$f = 0 \quad (\text{bzw. } E_a = E_{\max})$$

$$f = 1 \quad (\text{bzw. } E_a = 0).$$

Wegen bisweilen auftretender Zugkräfte wurde der Erddruck durch eine gewichtete Straffunktion gemäß Abschnitt 5.1 ersetzt. Ausgehend von den beiden willkürlich gewählten Startwerten S_1 und S_2 sind die unterschiedlichen Berechnungswege zum Minimum dargestellt.

Der Verlauf zeigt deutlich, daß das Optimierungsverfahren zu Beginn der Falllinie folgt, im späteren Verlauf jedoch von der jeweiligen Fallrichtung abweicht und daß das korrekte Minimum mit wenigen Schritten ohne wesentliches "Zig-Zagging" gefunden wird.

Weiter ist erkennbar, daß die Trennungslinie des linken Bereichs vom rechten mit jeweils konkaver bzw. konvexer äußeren Form der Bruchlinie -die physikalisch einen Kinematiksprung mit daraus resultierender Umkehr der Krafrichtung in der Quer-Bruchlinie bewirkt - zwar keinen Knick, aber doch eine deutliche Talausprägung im Höhenlinienbild des normierten Erddrucks verursacht.

Wenn man jedoch anstelle der zwei Elemente m Elemente gemäß Bild 6.1.2 unter Berücksichtigung von jeweils $(2m-1)$ geometrischen Freiheitsgraden untersucht, so

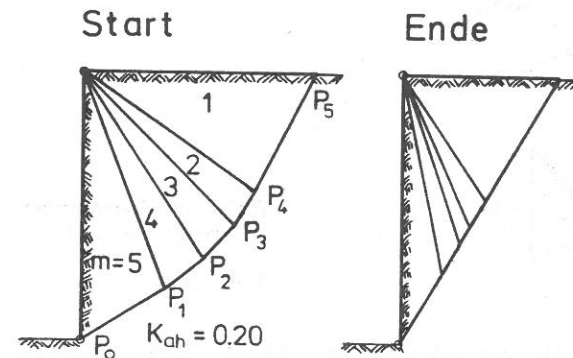


Bild 6.1.2 Optimierungstest

Beispiel 1

$$\phi = 30^\circ; \delta = 0$$

$$c = 0$$

$$K_{ah} = 0.33$$

wird diese Talform mit zunehmender Elementzahl immer enger und eine sichere Konvergenz der Optimierung mit Hilfe eines Quasi-Newton-Verfahrens wird zunehmend schwieriger. Durch eine Ausrundung des Kinematiksprungs gemäß Abschnitt 3.1.3 wird jedoch auch die Talform ausgerundet und die Optimierung wieder erleichtert.

Ohne Nachweis sei hier erwähnt, daß für das vorliegende Beispiel durch diese Technik bei vier bis fünf Elementen, auch bei bewußt ungünstig gewählten Startgeometrie, noch eine ausreichende Konvergenz erreicht werden konnte. Bei der Annahme von mehr als sieben Elementen war eine Konvergenz nur dann erreichbar, wenn entweder die Endpunkte P_0 bis P_n der Startgeometrie einigermaßen auf einer monotonen Kurve lagen oder aber eine mehrstufige Optimierungsstrategie angewandt wurde.

Das 2. Beispiel zeigt den Einfluß der Elementzahl auf die Größe des Erddrucks. Aus Bild 6.1.3 ist ersichtlich, daß die Berücksichtigung von zwei statt nur

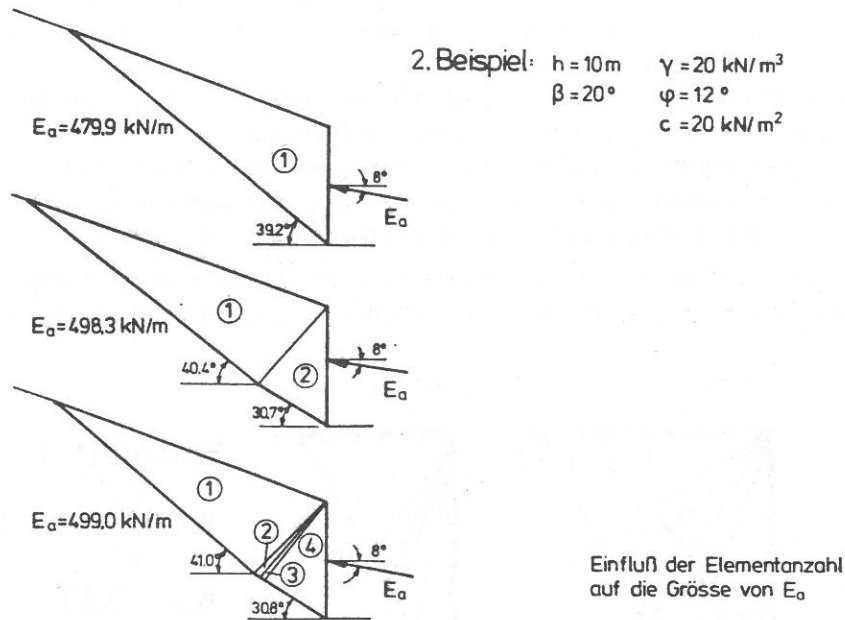


Bild 6.1.3

einem Element eine deutliche Steigerung des Erddrucks bewirkt, während die weitere Erhöhung auf vier Elemente praktisch wirkungslos bleibt. Eine Parallelumterteilung erfolgte allerdings nicht.

Aus Bild 6.1.4 ist für das 3. Beispiel die Steigerung des Erddrucks von 331,0 kN/m (1 Element) über 354,4 kN/m (2 Elemente) bis 359,3 kN/m bei 18 Elementen erkennbar. Eine Vergleichsberechnung nach der statischen Methode von Sokolovski ergab einen Erddruck von $E_a = 361,6 \text{ kN/m}$, womit praktisch die Vollständigkeit der Lösung nachgewiesen werden konnte.

Bild 6.1.5 zeigt ein Bemessungsdiagramm (Beispiel 4) für den aktiven Erddruck bei einem Reibungswinkel von $\varphi = 25^\circ$ in Abhängigkeit vom Böschungswinkel β und normierter Kohäsion. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß hier erstmals Erddrücke für Böschungswinkel $\beta > \varphi$ berechnet werden können, s. Schweikert (1984).

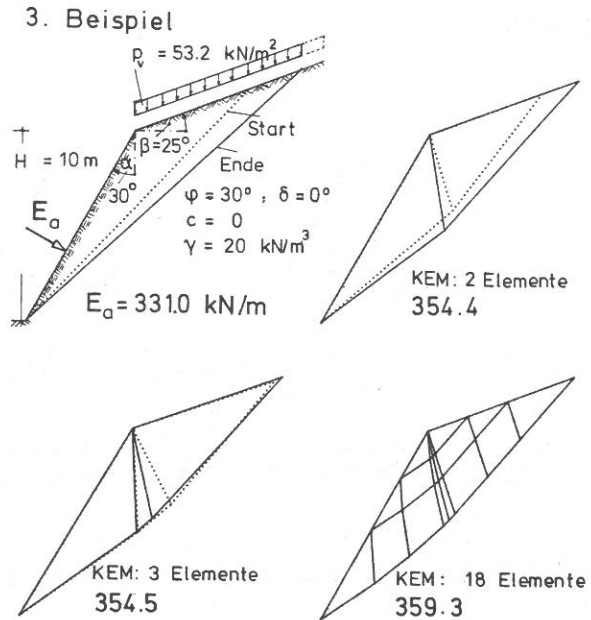
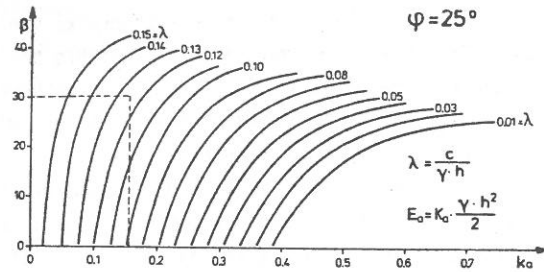


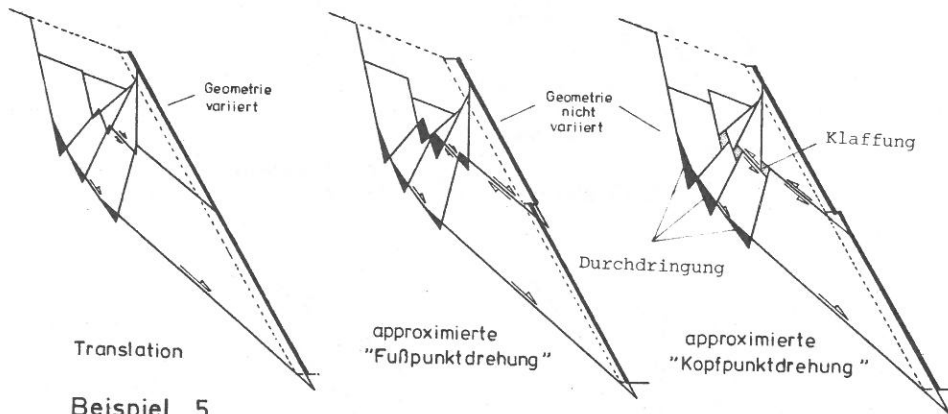
Bild 6.1.4 Aktiver Erddruck

Im 5. Beispiel wird der Einfluß einer unterschiedlichen Wandverformung auf die Kinematik eines aktiven Erddruckbeispiels bei acht Elementen untersucht. Während die Translation und die Fußpunktdrehung nur singuläre Durchdringungen der Elementknoten gemäß Bild 6.1.6. aufweisen, sind bei der approximierten Kopfpunktdrehung Klaffungen zu erkennen. Die damit verbundene Umkehr der Relativverschiebungen ist ebenfalls dargestellt.



4. Beispiel: Bemessungsdiagramm für den aktiven Erddruck mit $\varphi = 25^\circ$ (2 Elemente)

Bild 6.15



Beispiel 5

Bild 6.16 Kinematik bei unterschiedlicher Wandverformung

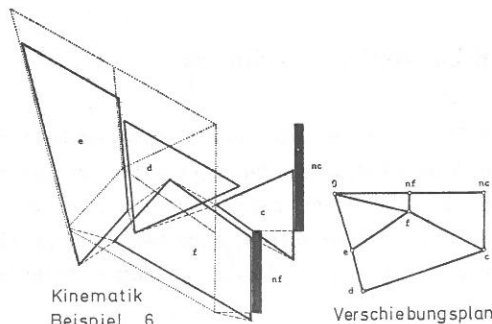


BILD 6.1.7 KINEMATIK BEI DILATANZ

Bild 6.1.7 zeigt die Kinematik für das 6. Beispiel unter Berücksichtigung einer Dilatanz in den Fugen für ein Erddruckbeispiel bei Fußpunktdrehung der Wand.

Bei der Behandlung von Schichtproblemen mit Hilfe der KEM gemäß Bild 6.1.8 sind die Scherfestigkeiten für eine von einer Schichtgrenze unterteilte Bruchfuge zu ermitteln. Hinsichtlich der Kohäsion ist die gewogene Mittelung gemäß

$$c_m = (d_1/d) c_1 + (d_2/d) c_2 \quad (6.1.1)$$

physikalisch exakt, während die entsprechende Mittelung hinsichtlich des Tangens des Reibungswinkels

$$\tan \varphi_m = (d_1/d) \tan \varphi_1 + (d_2/d) \tan \varphi_2 \quad (6.1.2)$$

für den allgemeinen Fall nur eine Näherung darstellt. Glg. (6.1.2) kann nämlich nur unter der Annahme einer in der Bruchfuge konstanten Normalspannung σ'_n abgeleitet werden. Unterstellt man hingegen eine von null aus linear zunehmende Normalspannungsverteilung erhält man

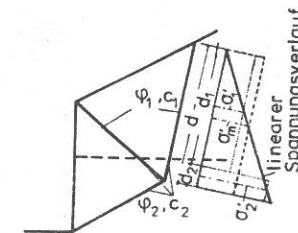
$$\tan \varphi_m = (d_1/d)^2 \tan \varphi_1 + (d_2/d) (2d_1 + d_2/d) \tan \varphi_2 \quad (6.1.3)$$

Für weitere Spannungsverteilungsfunktionen erhält man entsprechende anders gewogene Mittelwerte aus

$$\tan \varphi_m = (\sigma'_1/\sigma'_m) (d_1/d) \tan \varphi_1 + (\sigma'_2/\sigma'_m) (d_2/d) \tan \varphi_2 \quad (6.1.4)$$

Erste Erkenntnisse scheinen darauf hinzudeuten, daß es meist zweckmäßig ist, bei Schichtproblemen mehr Elemente und stets dieselbe einfache Mittelung nach Glg. (6.1.2) zu wählen, anstatt eine Spannungsverteilung (bei weniger Elementen) abzuschätzen und genauer zu rechnen. Die Mittelung muß jedoch in jedem Rechenschritt gemäß den veränderlichen Längen d_1, d_2 und d für alle geschnittenen Bruchfugen erfolgen.

Bild 6.1.8 zeigt als 7. Beispiel eine 2-Elementkinematik für ein horizontalgeschichtetes Erddruckproblem.



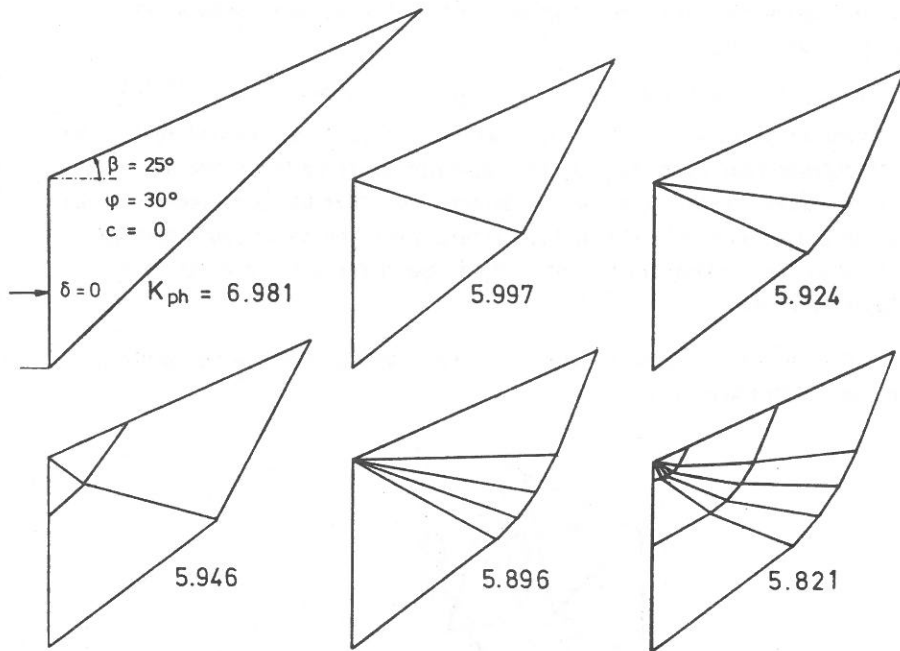
BEISPIEL 7

BILD 6.1.8 SCHICHTPROBLEM

6.2 Passiver Erddruck

Beispiel 8 sei ein homogenes Erdwiderstandsproblem (Passiver Erddruck) mit folgenden Kenngrößen: Reibungswinkel $\varphi = 30^\circ$; Wandreibungswinkel $\delta = 0$; Kohäsion $c = 0$; Wandneigung $\alpha = 0^\circ$ und Böschungswinkel $\beta = 25^\circ$. Für verschiedene Elemententeilungen ergeben sich die in Bild 6.2.1 dargestellten Endgeometrien und die zugehörigen Erdwiderstandsbeiwerte zwischen $K_{ph}=6.981$ (1 Element $\equiv$ Lösung von Coulomb) und 5.821 (15 Elemente). Ein Vergleich mit der Lösung von Sokolovski gemäß Pregl/Kristöfl (1983) mit $K_{ph}=5.771$ zeigt, daß die beiden Lösungen gegeneinander konvergieren, und daß der Unterschied von ca. 1% für die Praxis bedeutungslos ist. Bild 6.2.2 zeigt die übereinandergezeichneten variierten Endgeometrien und den dominierenden Einfluß der äußeren Randbruchlinien. Selbst bei bewußt ungünstiger Startgeometrie konvergierte die Optimierung für alle Elemententeilungen - außer der mit 15 Elementen - stets schnell und problemlos.

Bei der großen Elementzahl von 15 Elementen mit insgesamt 29 kinematischen Freiheitsgraden war die Konvergenz der Optimierung bei Quasi-Newton-Verfahren



Beispiel 8

Bild 6.2.1 Passiver Erddruckbeiwert K_{ph}

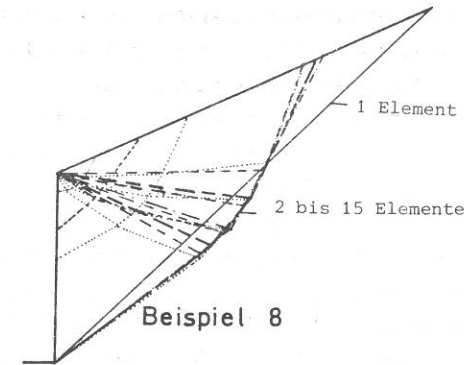


Bild 6.2.2 Dominanz der Randbruchlinie bei unterschiedlicher Elementzahl

an die Voraussetzung einer günstigen Startgeometrie gebunden. Letztere konnte aus der Endgeometrie dieses Beispiels mit 5 Elementen einfach konstruiert werden. Um stets alle Zugkräfte auszuschließen, erwies sich die Berücksichtigung der beiden Freiheitsgrade der mittleren Knotenpunkte an der Wand im Zusammenhang mit einer Straffunktion gemäß Abschnitt 5.1 als zweckmäßig. Nach Bild 6.2.3 ist zwar die Kinematik für die einander gegenübergestellten Elemententeilungen mit einmal 15 Elementen und 29 Freiheitsgraden (Fall a) und 13 Elementen mit 27 Freiheitsgraden (Fall b) bei translatorischer Wandbewegung identisch und demzufolge eigentlich auch die Statik (also auch der Erdwiderstandsbeiwert K_{ph}), aber im Fall b kann nicht nachgewiesen werden, ob die Kräfte im Element 13 ohne Zugspannungen auf die Wand übertragen werden können.

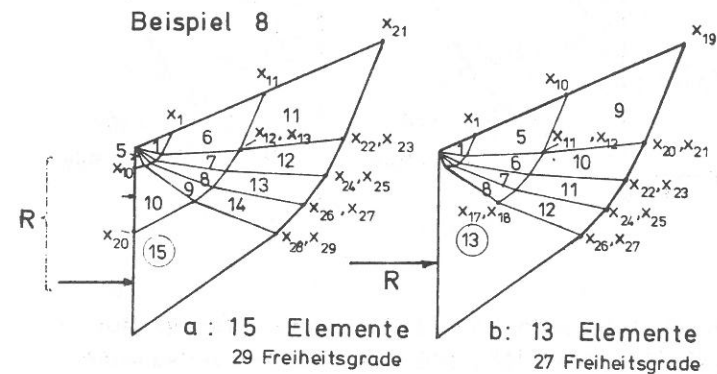
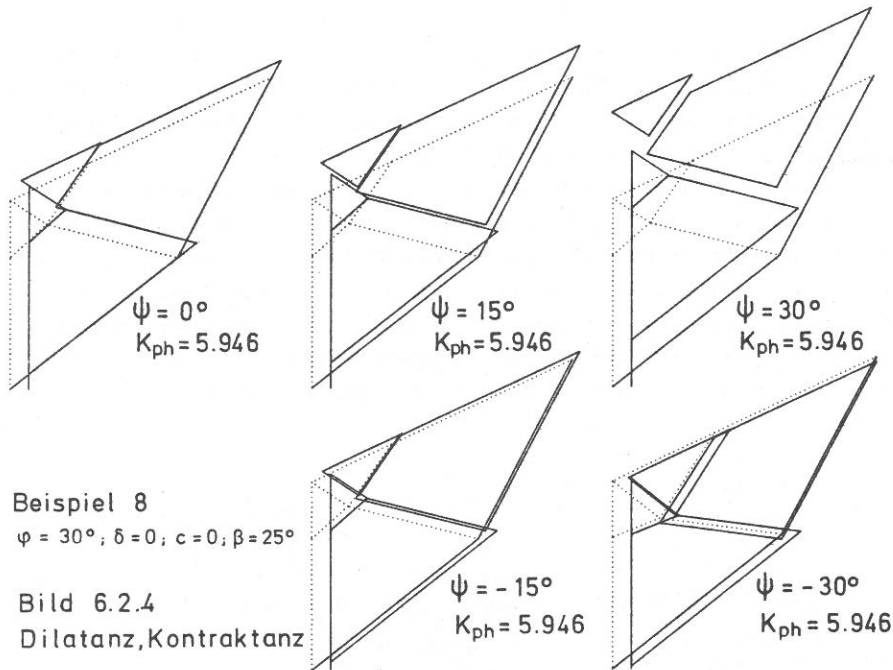


Bild 6.2.3 Unterschiedliche Resultierende möglich

Tatsächlich ergaben sich im Zuge der Optimierung Zugkräfte, die nur im Fall a nachgewiesen und über die erwähnte Straffunktion durch Änderung der beiden variablen z-Koordinaten x_{10} und x_{20} beseitigt werden konnten.

Im Fall b wurde allerdings ein geringerer Erdwiderstandsbeiwert erreicht. Dieser wird aber wegen der Verletzung der statischen Zulässigkeit durch die nicht aufnehmbaren Zugspannungen als falsch angesehen.

Bild 6.2.4 zeigt für dasselbe Beispiel unter der Annahme der 4-Element-Einteilung den Einfluß der Dilatanz bzw. Kontraktanz auf die Kinematik. Untersucht wurden fünf verschiedene Varianten für den Dilatanzwinkel ψ : $0; 0.5\phi; \phi; -0.5\phi; -\phi$. Der errechnete Erdwiderstandsbeiwert war stets $K_{ph}=5.946$, unabhängig davon, mit welcher der Zielfunktionen nach den Gln. (3.2.10) oder (3.2.11) gerechnet wurde.



Mit dem 9. Beispiel nach Bild 6.2.5 wurde ein Beispiel ausgesucht, für das nach einer Zusammenstellung von Weißenbach (1983) verschiedene Autoren extrem unter-

schiedliche Erdwiderstandsbeiwerte zwischen $K_{ph}=18.6$ und $K_{ph}=35.2$ bzw. noch höher angeben. Bild 6.2.6 zeigt die Ergebnisse und die zugehörigen Voraussetzungen.

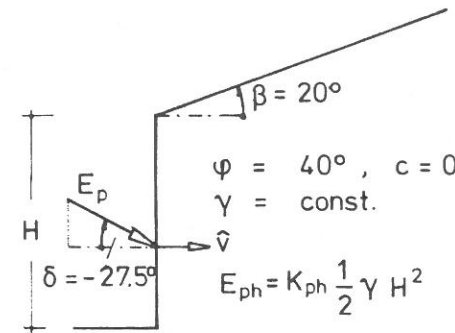


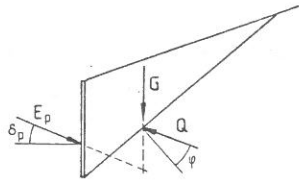
BILD 6.2.5 BEISPIEL 9

Dieses Beispiel ist somit interessant und wird im folgenden eingehend untersucht. Aus Bild 6.2.7 ist der Einfluß der Elemententeilung auf den Erdwiderstandsbeiwert nach der KEM ersichtlich. Der kleinste Wert ergab sich bei 10 Elementen zu $K_{ph}=28.81$; Zugkräfte traten für die Endgeometrie nicht auf.

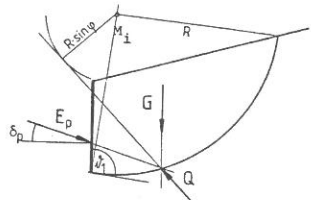
Ein Vergleich mit der statischen Methode nach Sokolovski brachte nun ein zunächst verblüffendes Ergebnis: der K_{ph} -Wert wird z.B. von Pregl/Talman (1978) zu 29.1 angegeben und ist somit größer als der nach der Kinematischen Elemente Methode. Bei gleichen Randbedingungen des Problems steht dieses Ergebnis im Widerspruch zu den Grenzwertsätzen der Plastizitätstheorie.

Die angegebenen Tafelwerte sind jedoch in der Zwischenzeit durch die neuen Tafeln von Pregl/Kristöfl (1983) überholt; dort wird jetzt mit $K_{ph}=27.7$ ein niedrigerer Wert angegeben. (Die Unterschiede der beiden Tafeln sind voraussichtlich auf unterschiedliche Netzstrukturen bzw. andere numerische Effekte zurückzuführen).

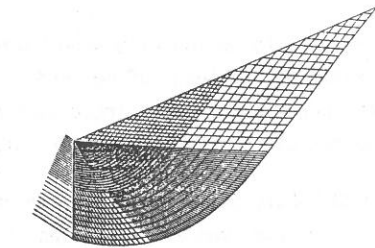
Die für praktische Belange übereinstimmenden Werte nach der Statischen und der Kinematischen Methode mit $K_{ph}=27.7$ bzw. 28.8 kennzeichnen die gefundene Lösung als eine vollständige Lösung. An dieser Größe sind die anderen Lösungen gemäß Bild 6.2.6 zu messen. So wird z.B. der auf dem Reibungskreisverfahren von Krey beruhende Erdwiderstandsbeiwert $K_{pr}=18.6$ als eine Folge des zwar plausiblen, doch relativ willkürlich angenommenen Kraftangriffspunkts von E_p in Höhe von $H/3$ interpretiert und nicht als Folge der unterschiedlichen Wandverformung (Rotation anstelle Translation).



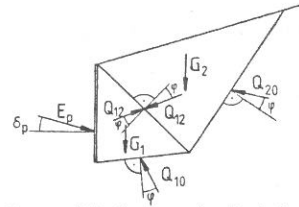
$K_{ph} = 1431$ nach Coulomb
 $= 687$ mit KEM, 1 Element



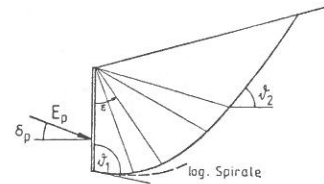
$K_{ph} = 18.6$ nach Krey/Groß



$K_{ph} = 29.3$
 nach Sokolowski



$K_{ph} = 35.2$ nach Gudehus/Groß



$K_{ph} = 26.7$ nach Caquot/Kérisel

BEISPIEL 9

$\varphi = 40^\circ; \delta = -27.5^\circ; c = 0; \beta = 20^\circ$

BILD 6.2.6 Vergleich unterschiedlicher Lösungen gemäß
 Weißenbach (1983)

Der angenommene Wandreibungswinkel von $\delta = -27.5^\circ$ erfordert im Zusammenhang mit dem hohen Reibungswinkel von $\varphi = 40^\circ$ eine zusätzliche Untersuchung.

Es muß nämlich untersucht werden, ob zwischen Wand und Boden überhaupt eine solche Relativverschiebung auftritt, daß sie den Wandreibungswinkel auch mobilisieren kann. Diese Fragestellung läßt sich mit der KEM beantworten, nicht jedoch mit der statischen Methode nach Sokolowski.

BEISPIEL 9 : $\varphi = 40^\circ; \delta = -27.5^\circ; c = 0; \beta = 20^\circ$

2 Elemente	3 Elemente	4 Elemente	5 Elemente
$K_{ph} = 35,60$	$K_{ph} = 31,51$	$K_{ph} = 30,54$	$K_{ph} = 30,21$

4 Elemente	6 Elemente	8 Elemente	10 Elemente
$K_{ph} = 34,37$	$K_{ph} = 30,19$	$K_{ph} = 29,23$	$K_{ph} = 28,81$

Bild 6.2.7 K_{ph} -Werte nach der KEM bei unterschiedlichem Elementnetz

Unter den vereinfachten Bedingungen einer 3-Element-Kinematik nach Bild 6.2.8 ergeben sich mit den Bodenparametern des Beispiels 9 in Abhängigkeit von der Vertikallage des Punktes P bei horizontal vorgegebener Wandverschiebung drei unterschiedliche Resultate:

- $z_p > 0 \rightarrow v_w/3 > 0$; $\delta_{mob} = -27.5^\circ$; $K_{ph} = 31.5$
- $z_p = 0 \rightarrow v_w/3 = 0$; $\delta_{mob} = 0.0^\circ$; $K_{ph} = 17.8$
- $z_p < 0 \rightarrow v_w/3 < 0$; $\delta_{mob} = +27.5^\circ$; unzulässige Zugkräfte

Beispiel 9: $\varphi = 40^\circ$, $c = 0$, $|\delta_{\max}| = 27.5^\circ$, $\beta = 20^\circ$

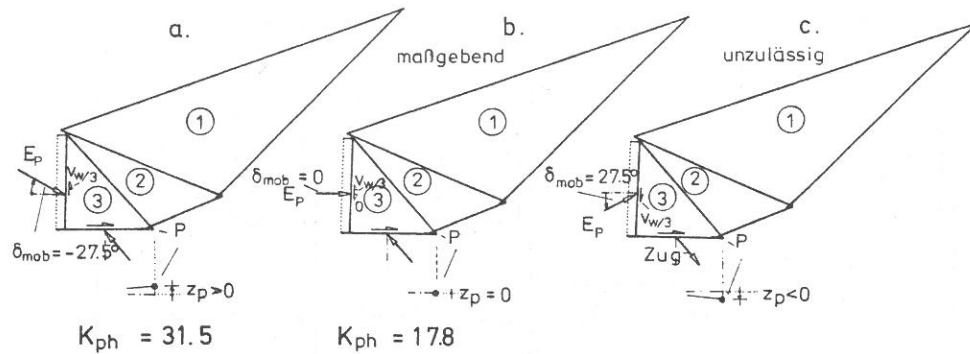
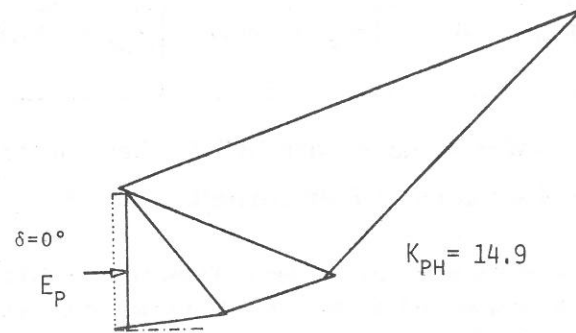


Bild 6.28 K_{ph} - Abhängigkeit von z_p

Eine genauere Untersuchung der Optimierung zeigt eindeutig, daß Fall b maßgebend wird. Vom Verfasser wird dieses Ergebnis dahingehend interpretiert, daß für praktische Belange nicht $K_{ph}=31.5$ sondern nur $K_{ph}=17.8$ (bzw. bei feinerer Unterteilung entsprechend niedriger, etwa $K_{ph}=(28.9/31.5)17.8=16.3$ bei linearer Interpolation) angesetzt werden darf.



BEISPIEL 10: $\varphi=40^\circ$; $c=0$; $\delta=0^\circ$; $\beta=20^\circ$

BILD 6.2.9 : WAND GLATT, $\delta=0^\circ$

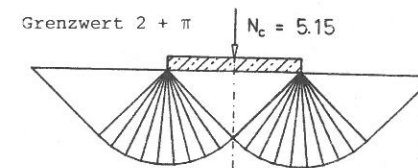
Theoretisch wird das Ergebnis so gedeutet, daß es sich bei den Voraussetzungen im Fall a hinsichtlich des Wandreibungswinkels $\delta=(-)27.5^\circ$ und der horizontalen Wandverschiebung um eine unsaubere Vermischung von einer kinematischen und einer statischen Randbedingung handelt.

Dieses Problem muß jedoch unterschieden werden von dem in Bild 6.2.9 dargestellten Beispiel 10, bei dem der Wandreibungswinkel aufgrund einer (fehlenden) Wandrauhigkeit tatsächlich zu $\delta=0$ angenommen werden kann und sich $K_{ph}=14.9$ ergibt.

Auf eine verwandte Problematik beim Grundbruchbeispiel des folgenden Abschnitts wird hingewiesen.

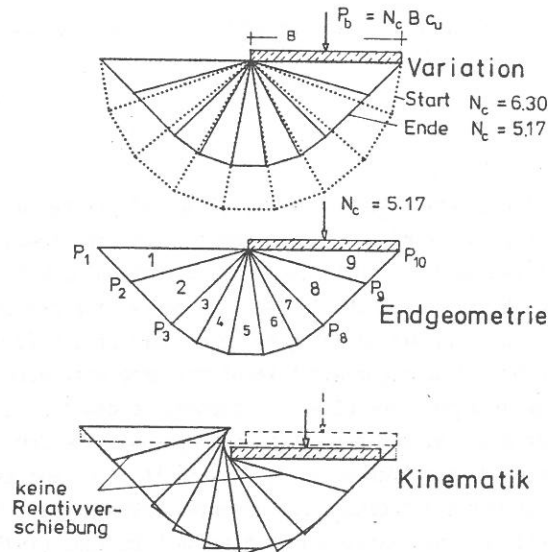
6.3 Grundbruch

Für das Grundbruchproblem entwickelte Prandtl (1920) als erster die Lösung für einen reibungsfreien c_u -Boden mit dem bekannten Tragfähigkeitsbeiwert $N_c=2+\pi$. Dieser Wert ist exakt und die Lösung ist vollständig. Mit der KEM kann dieser Wert durch Steigerung der Elementzahl des Viertelkreises für das 11. Beispiel gemäß Bild 6.3.1 mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden, sofern die maßgebende Grundbruchfigur als bekannt vorausgesetzt wird. Geht man hingegen von der bewußt anders gewählten Startgeometrie gemäß Bild 6.3.2 aus, so kann damit wieder die Qualität der Optimierung getestet werden. Mit den zunächst eingesetzten Gradienten-Verfahren (s. Abschnitt 5) gelang es nicht, die richtige Endgeometrie mit dem zugehörigen korrekten Tragfähigkeitsbeiwert N_c zu berechnen. Nur mit dem Quasi-Newton-Verfahren nach Davidon (1975) konnte die richtige Lösung gefunden werden. Interessant ist dabei, daß sich nicht, wie vielleicht erwartet, die Elemente 1 und 9 nach Bild 6.3.2 in die jeweiligen Endkeile gemäß Bild 6.3.1 umformen, sondern daß jeweils 2 Elemente den Endkeil bilden.



Beispiel 11: Prandtl's Grundbruchproblem
Bild 6.3.1 : Lösung mit der KEM

Die Punkte P_1, P_2, P_3 bzw. P_8, P_9, P_{10} liegen bei der Endgeometrie allerdings auf einer Geraden, so daß die Relativverschiebung zwischen den beiden Elementen jeweils zu Null wird und sich die beiden Elemente hinsichtlich der Kinematik wie ein gemeinsames Element verschieben. Die Ausrundung eines möglichen Kinematiksprungs durch eine geeignete Interpolationsfunktion gemäß Bild 3.1.3 bei sehr kleinen Relativverschiebungen erweist sich hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit wieder als nützlich.



Beispiel 11: c_u - Boden, $\varphi_u = 0$
Bild 6.32 Optimierungstest

Zum Nachweis einer ausreichenden Grundbruchsicherheit von flach gegründeten Bauwerken wird im allgemeinen von der dreigliedrigen Grundbruchgleichung von Terzaghi (1943)

$$\sigma_{of} = P_f/B = q N_d + \gamma_2 B N_b + c N_c \quad (6.3.1)$$

bzw. von der dimensionslosen Form

$$\bar{\sigma}_{of} = \bar{q} N_d + N_b + \bar{c} N_c \quad (6.3.1)$$

mit

$$\bar{\sigma}_{of} = \sigma_{of}/(\gamma_2 B); \bar{q} = q/(\gamma_2 B); \bar{c} = c/(\gamma_2 B) \quad (6.3.2)$$

für zentrisch und vertikal belastete Streifenfundamente gemäß Bild 6.3.3 ausgegangen. Die Tragfähigkeitsbeiwerte N_d , N_b und N_c werden dabei als nur vom Reibungswinkel φ abhängige Größen angenommen.

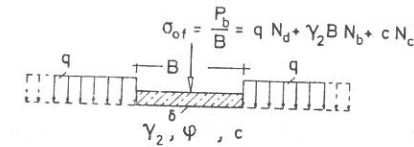


Bild 6.3.3 Vertikal und mittig belastetes, starres Fundament auf homogenem Baugrund

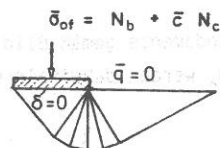
Mit der KEM kann diese Form der Grundbruchgleichung ebenfalls nachgewiesen werden, allerdings mit dem Unterschied, daß die Tragfähigkeitsbeiwerte zunächst als abhängig von den drei Variablen φ , $\bar{q}$ und $\bar{c}$ angenommen werden müssen. Eine quantitative Auswertung durch eine Parameterstudie von Hertkorn (1984) bestätigte zwar den dominanten Einfluß des Reibungswinkels φ , gleichzeitig wurde jedoch eine geringfügig auf der unsicheren Seite liegende Abhängigkeit der Tragfähigkeitsbeiwerte bei großen Reibungswinkeln φ und gleichzeitig großen $\bar{c}$ -Werten festgestellt.

Für die Praxis ist dieses Ergebnis trotzdem unbedenklich, da erstens meist keine Grundbruchgefahr bei Böden mit sehr hohen Scherfestigkeiten und hohen Auflasten besteht und zweitens der Unterschied erst für $\varphi > 35^\circ$ und $\bar{c} > 10$ relevant wird. Hingegen kann sich der Einfluß bei der Interpretation von kleinmaßstäblichen Modellversuchen auf überkonsolidierte Tonböden mit hohen $\bar{c}$ -Werten ggfs. auswirken.

Als weiteres konnte festgestellt werden, daß eine Parallelunterteilung durch P-Bruchlinien analog Bild 3.3.1 nur bei überwiegendem Reibungseinfluß einen signifikanten Einfluß auf das Ergebnis hat.

Mit der relativ einfachen 6-Elemente-Kinematik gemäß Bild 6.3.4 ergeben sich die in Bild 6.3.5 dargestellten Abhängigkeiten für N_c und N_b vom Reibungswinkel (Beispiel 12) im Vergleich zu den der DIN 4017 zugrunde liegenden Tragfähigkeitsbeiwerten gemäß

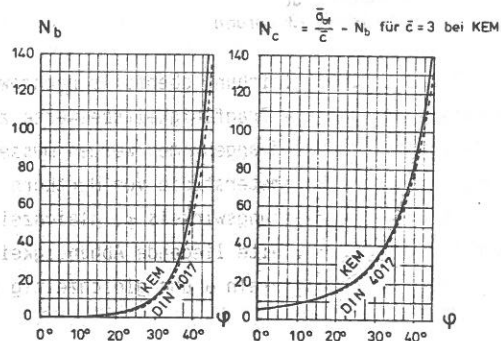
$$\begin{aligned} N_d &= e^{\pi \tan \varphi} \tan^2(\pi/4 + \varphi/2) \\ N_c &= (N_d - 1) \cot \varphi \\ N_b &= (N_d - 1) \tan \varphi \end{aligned} \quad (6.3.3)$$



Beispiel 12
nicht-symmetrische
Grundbruchfigur

Bild 6.3.4: 6 Elemente-Kinematik

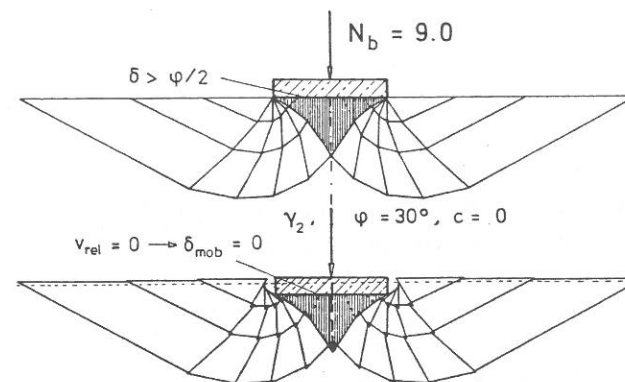
Wenn man weiter die aus der entsprechenden Fachliteratur bekannten unterschiedlichen Ergebnisse für die einzelnen Tragfähigkeitsbeiwerte miteinander vergleicht, so zeigt sich fast durchweg eine ausreichende Übereinstimmung hinsichtlich N_d und N_c , nur für N_b sind größere Unterschiede festzustellen.



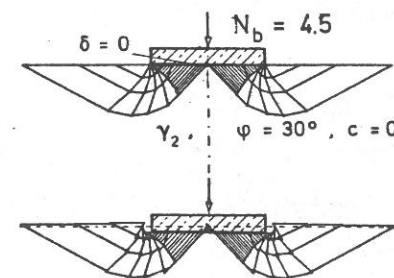
Beispiel 12: N_b und N_c in Abhängigkeit von φ
Bild 6.3.5: Vergleich von KEM/DIN 4017

Im Beispiel 13 wird der Tragfähigkeitsbeiwert N_b exemplarisch für einen kohäsionslosen Reibungsboden mit $\varphi=30^\circ$ genauer untersucht. Durch abwechslungsweise Netzverfeinerung und Optimierung der Geometrie gemäß einer Kombination der Optimierungsverfahren 1.5 und 3.1 nach Abschnitt 5.3 ergibt sich der in Bild 6.3.6 dargestellte Bruchmechanismus mit einem Tragfähigkeitsbeiwert von $N_b=9.0$.

Für einen Vergleich mit anderen Lösungen müssen die Randbedingungen näher untersucht werden. Wie die Kinematik des Bildes 6.3.6 klar erkennen läßt, erfährt der unter dem Fundament befindliche (schraffierte) Bodenkeil nur eine Vertikalbewegung. Eine Relativbewegung findet nicht statt. Die Lösung erscheint hier somit als unabhängig vom Sohlreibungswinkel δ , also unabhängig davon, ob die Sohle rau oder glatt ist.



Ist die Sohle jedoch wirklich glatt, d.h. ist $\delta=0$ bzw. $\delta \ll \varphi$, so kann z.B. der in Bild 6.3.7 dargestellte Bruchmechanismus mit $N_b=4.5$ auftreten (Beispiel 14).

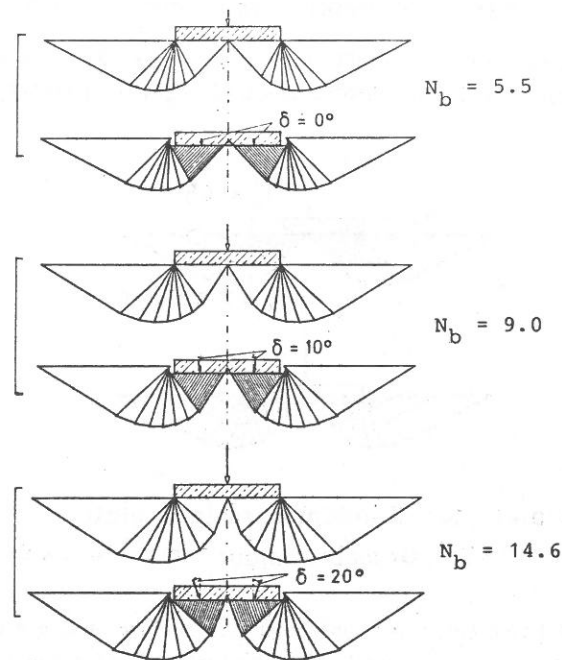


Hier bleibt der Boden unter der Fundamentmitte in Ruhe, und die beiden halbs seitigen Bodenkeile weichen vertikal und horizontal nach außen hin aus. Die praktische Halbierung der Tragfähigkeit des glatten Fundaments gegenüber dem rauhen Fundament läßt sich unabhängig vom Reibungswinkel φ bei Kenntnis der beiden prinzipiell unterschiedlichen Bruchmechanismen auch wie folgt ableiten: Unter Vernachlässigung der "Krümmung" des Keils von Bild 6.3.6 (rauhes Fundament) besteht die Bruchfigur des glatten Fundaments nach Bild 6.3.7 aus zwei halb so großen und weitgehend ähnlichen Bruchfiguren wie die des rauhen.

Daraus folgt

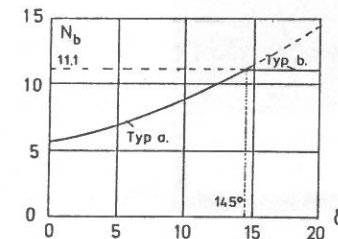
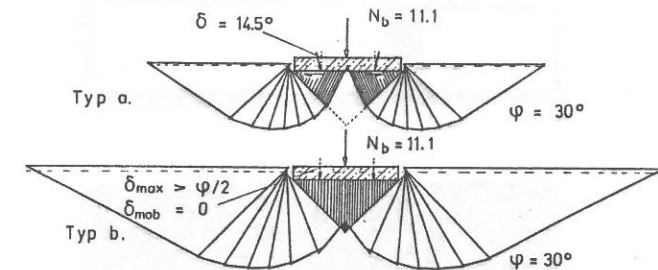
$$\frac{p_{\text{glatt}}}{p_{\text{rauh}}} = \frac{2 \gamma_2 (B/2)^2 N_b}{\gamma_2 (B)^2 N_b} = \frac{1}{2} \quad (6.3.4)$$

Außer den beiden extremen Randbedingungen $\delta = \varphi$ und $\delta = 0$ wird im Beispiel 15 der Einfluß des Sohlreibungswinkels δ auf den Tragfähigkeitsbeiwert N_b untersucht. Bild 6.3.8 zeigt die Ergebnisse für einen -allerdings nur quer unterteilten- Bruchmechanismus analog zu Bild 6.3.7.. In Bild 6.3.9 ist die Abhängigkeit N_b von δ dargestellt. Der Tragfähigkeitsbeiwert N_b nimmt von $N_b = 5.5$ ($\delta = 0$) monoton zu bis $N_b = 11.1$ für $\delta = 14.5^\circ \approx \varphi/2$. Die größeren Werte von N_b sind für $\delta > \varphi/2$ jedoch nicht mehr maßgebend, da jetzt der Bruchmechanismus des rauen Fundaments relevant wird.



Beispiel 15: $\varphi = 30^\circ$, δ variabel
Bild 6.3.8 Grundbruchfiguren

Wenn man sich beim realen Grundbruchproblem den progressiven Bruch mit zunehmender Mobilisierung der Scherfestigkeit bei monotoner Fundamentverschiebung vorstellt, so wird aus obigen Überlegungen die Möglichkeit des Auftretens eines Verzweigungsproblems wahrscheinlich. Die sichere Konvergenz einer elasto-plastischen Berechnung eines Streifenfundaments auf einem kohäsionslosen Boden wird somit als schwierig eingestuft.



Die Unterschiede für die N_b - Werte gegenüber den Beispielen 13 und 14 sind ausschließlich auf die unterschiedliche Elemententeilung zurückzuführen

Beispiel 15: δ variabel
Bild 6.3.9 $N_b(\delta)$

Zur experimentellen Überprüfung der beiden unterschiedlichen Mechanismen mit den um den Faktor 2 unterschiedlichen Traglasten wurden von Holzner (1984) Schneebedi-Versuche mit Kohlestäbchen durchgeführt. Die glatte Sohle wurde dabei durch abschnittsweise Glasplättchen und Rollenlager simuliert, die raue Sohle durch Aufkleben von Sandpapier auf die Fundamentsohle. In Bild 6.3.10 ist die unterschiedliche Kinematik für die beiden unterschiedlichen Randbedingungen zu erkennen. Auch die durch Kraftmeßbringe festgestellten Traglasten unterschieden sich um den Faktor 2! Experimentelle Untersuchungen von Kimura/Kusakabe/Saitoh (1985) belegen unabhängig durch Röntgenaufnahmen in Zentrifugentests die unterschiedlichen Verschiebungsbilder. Eine Bestätigung der Theorie durch das Experiment kann somit eindeutig festgestellt werden.

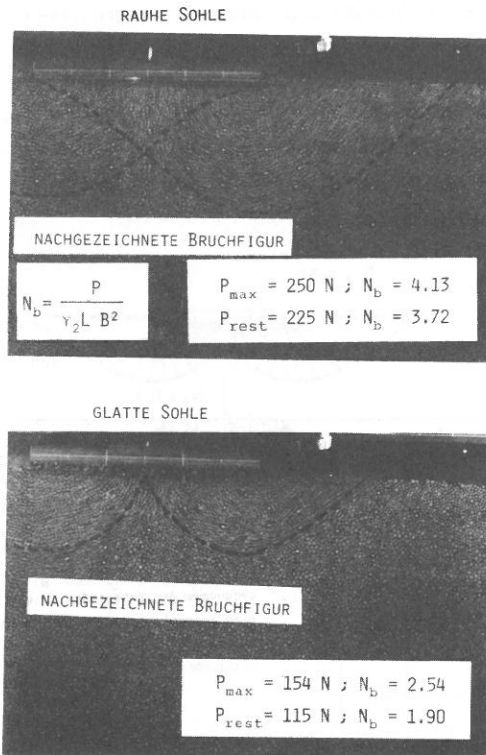


BILD 6.3.10 MODELLVERSUCHE FÜR RAUHE UND GLATTE FUNDAMENTSOHLE;
 $\gamma_2 = 14.7 \text{ kN/m}^3 ; \phi = 24^\circ \text{ bis } 25^\circ ; L = 4.7 \text{ cm} ; B = 30 \text{ cm} ;$
 $N_{b, \text{DIN 4017}} = 4.15.$

In Bild 6.3.11 sind einige aus der Literatur bekannte Tragfähigkeitsbeiwerte N_b für einen Reibungsboden $\phi=30^\circ$ zusammen mit den jeweiligen Voraussetzungen wiedergegeben und interpretiert. Die verbleibenden Unterschiede sind in erster Linie auf die unterschiedlichen Randbedingungen zurückzuführen.

Für die Grundbaupraxis dürfte wesentlich und beruhigend sein, daß auch die der DIN 4017 zugrundeliegenden N_b -Werte als im wesentlichen mehrfach abgesichert gelten können. Sie sind allerdings an die Voraussetzung gebunden, daß der Sohlreibungswinkel δ mindestens $\phi/2$ beträgt.

N_b	Verfahren	Autor/Quelle	Spannungsverlauf	Bruchbild
3.8	Sokolovski	Salden (1980)	$\delta = 0$	
4.5	KEM	Gußmann	$\delta = 0$	
7.7	Sokolovski	Sokolovski (1965)	$\delta = 0$	
7.9	Sokolovski	Salden (1980)	δ linear veränder.	
8.6	Statisch	Smolczyk (1960)	$\delta = 0$	
9.0	KEM	Gußmann	$\delta_{\max} > \phi/2$ $\delta_{\text{mob}} = 0$	
9.9	Sokolovski	Pregl/Kristöfl (1983)		
10.0	empirisch	DIN 4017		

BILD 6.3.11 VERGLEICH DES TRAGFÄHIGKEITSBEIWERTS N_b FÜR $\phi = 30^\circ$

6.4 Böschungsbruch

Das Böschungsproblem wird zweckmäßigerweise als Standsicherheitsproblem behandelt; als zu minimierende Zielfunktion f der KEM wird die Standsicherheit F_s nach Fellenius gemäß Abschnitt 3.2.4 gewählt. Die einheitliche Bruchursache ist dabei die gleichmäßige Reduktion der maximal zur Verfügung stehenden Scherfestigkeit $\tau_{\max}$ in allen Bruchfugen i auf τ_{mob} , also

$$f = F_s = \tau_{\max, i} / \tau_{\text{mob}, i} \quad \text{für } i=1, \dots, n \quad (6.4.1)$$

Praktisch kann dieses Ziel dadurch erreicht werden, daß die Schlußkraft R_s am obersten oder untersten Element gemäß Bild 6.4.1 mit

$$R_s = Q_n = Q_{2m} \quad (6.4.2)$$

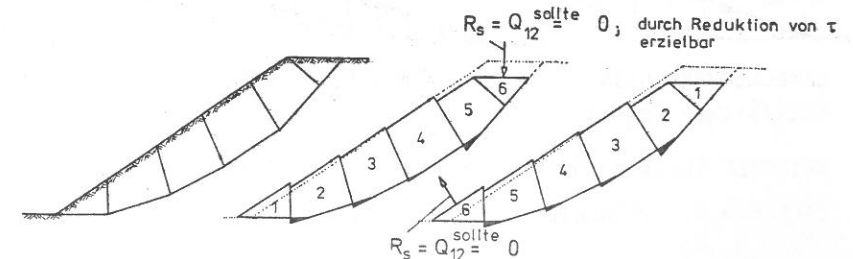


Bild 6.4.1 Freie Böschungsprobleme mit KEM

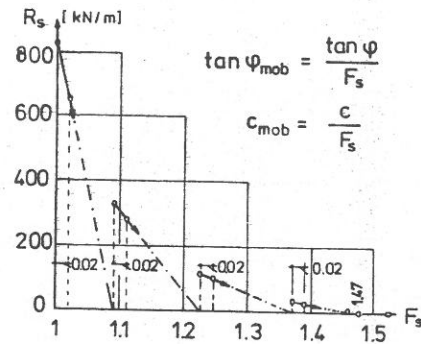
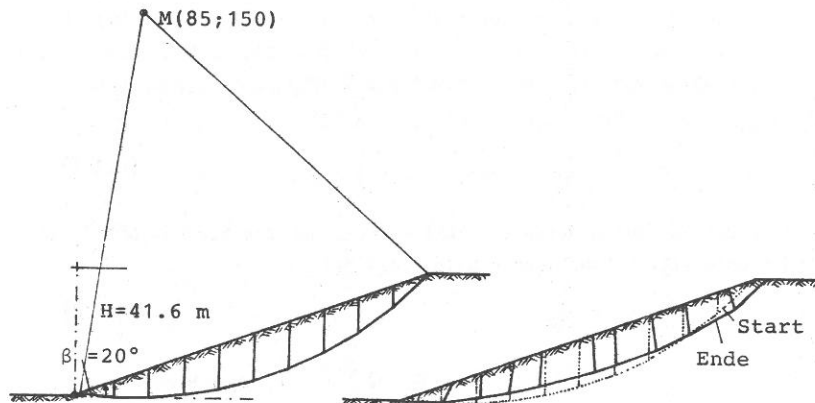


Bild 6.4.2 Iterative Berechnung der Sicherheit

durch eine Iterationsrechnung analog Bild 6.4.2 zu Null reduziert wird. Die Richtung von R_s kann im Prinzip beliebig angenommen werden; es wird die einheitliche Annahme R_s senkrecht zur Oberfläche empfohlen. Die Iteration konvergiert stets sehr rasch; sie entspricht der bekannten Iteration zur Auflösung der impliziten Summenformel für die Standsicherheit bei den Lamellenverfahren.



LAMELLENVERFAHREN
KREY/BISHOP: $F_s = 1.953$

KEM : $F_s = 1.905$

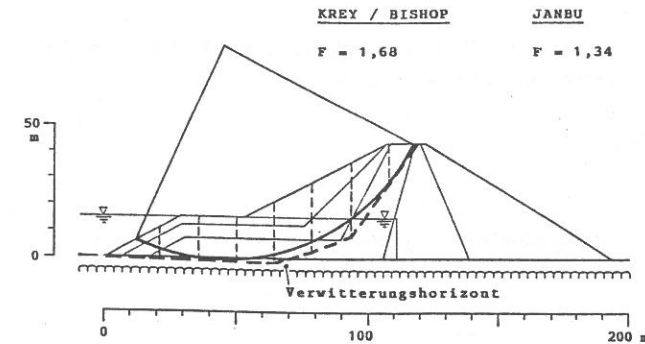
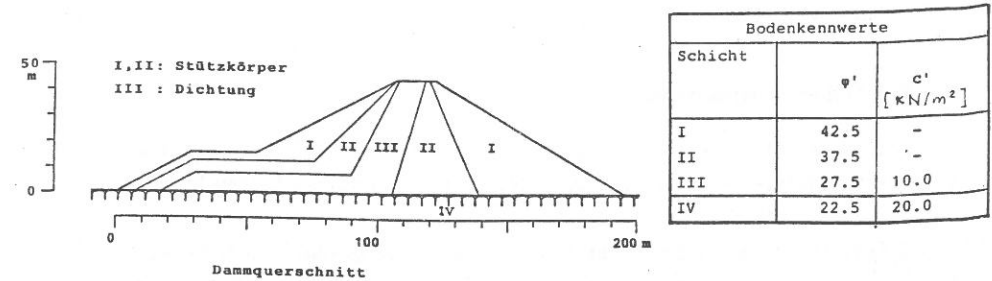
BEISPIEL 16: $\phi = 30^\circ$; $c = 10 \text{ kN/m}^2$; $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$

BILD 6.4.3 : VERGLEICH LAMELLENVERFAHREN/KEM

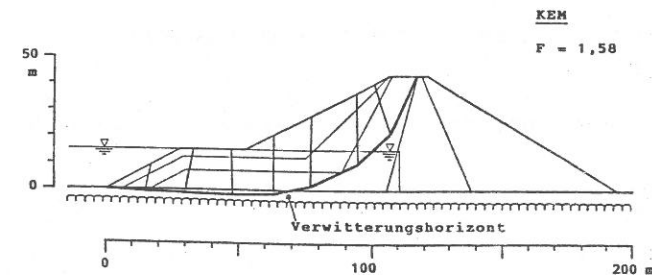
Bild 6.4.3 zeigt für das homogene Beispiel 16 die variierte Endgeometrie zusammen mit dem Sicherheitsfaktor $F_s = 1.905$.

Ein Vergleich mit dem Lamellenverfahren Krey/Bishop gemäß DIN 4084 ergibt den Wert $F_s = 1.953$.

Aus Bild 6.4.4 gemäß Baumann/Ochmann (1986) ergibt sich für das inhomogene Beispiel 17 ein geringer Unterschied zu den Lamellenverfahren.



Abgleiten im Verwitterungshorizont:
Berechnung nach KREY/BISHOP und JANBU



Abgleiten im Verwitterungshorizont:
Berechnung nach KEM

Beispiel 17 : Inhomogenes Böschungsproblem

Bild 6.4.4 : Vergleich KEM und Lamellenverfahren

In welchen Fällen der größere Rechenaufwand mit dem genaueren Verfahren der KEM gegenüber den Lamellenverfahren gerechtfertigt erscheint, wird in einer noch nicht fertiggestellten Forschungsarbeit von Ochmann (1987) durch eine umfassende Parameterstudie untersucht.

Hinsichtlich der weiteren Unterschiede der KEM und der sonst gebräuchlichen Verfahren zur Lösung von Standsicherheitsproblemen bei Böschungen sei auf Gußmann (1986) verwiesen.

6.5 Räumlicher Erdwiderstand

Als erstes räumliches Problem, das mit der KEM gemäß der in Abschnitt 4 abgeleiteten Theorie berechnet werden soll, wird ein passives Erddruckproblem gewählt, Gußmann (1986).

Grund für die Auswahl ist die Tatsache, daß es dafür sowohl experimentelle Untersuchungen als auch daraus abgeleitete Bemessungsformeln von Weißbach (1961, 1962) gibt, die zu einem Vergleich herangezogen werden können.

Im Falle eines kohäsionslosen Bodens wird die Horizontalkomponente des 2-dimensionalen, passiven Erddrucks normalerweise zu

$$E_{ph}^{2D} = \gamma \frac{H^2}{2} K_{ph}^{2D} \quad (6.5.1)$$

berechnet, wobei K_{ph}^{2D} der horizontale Tragfähigkeitsbeiwert ist. Nach Weißbach (1961, 1962) berechnet sich der 3-dimensionale Erddruck zu

$$E_{ph}^{3D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{B}{0.3H}} \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3H \\ B \end{bmatrix} + 0.6H \tan \varphi \quad \begin{matrix} \dots \frac{B}{H} \leq 0.3 \\ \dots \frac{B}{H} \geq 0.3 \end{matrix} \quad (6.5.2)$$

Diese Lösung wird durch verschiedene experimentelle Untersuchungen von Weißbach (1962) bestätigt.

Verwendet man die folgenden beiden verschiedenen, aber einfachen Formulierungen

$$E_{ph}^{3D} = \gamma \frac{H}{2} K_{ph}^{3D} \quad (6.5.3)$$

$$E_{ph}^{3D} = v B E_{ph}^{2D} \quad (6.5.4)$$

wobei K_{ph}^{3D} der Tragfähigkeitsbeiwert des 3-dimensionalen Problems ist, und v der Formbeiwert,

$$v = \frac{K_{ph}^{3D}}{K_{ph}^{2D}} \quad (6.5.5)$$

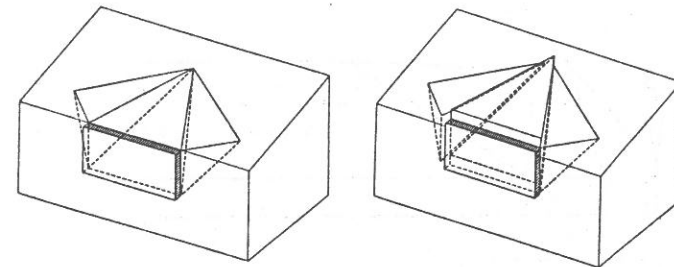
so erhält man mit Gleichung 6.5.2

$$v_W = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{B}{0.3H}} \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3H \\ B \end{bmatrix} + 0.6H \tan \varphi \quad \begin{matrix} \dots \frac{B}{H} \leq 0.3 \\ \dots \frac{B}{H} \geq 0.3 \end{matrix}$$

(v_W bezeichnet den Formbeiwert nach Weißbach)

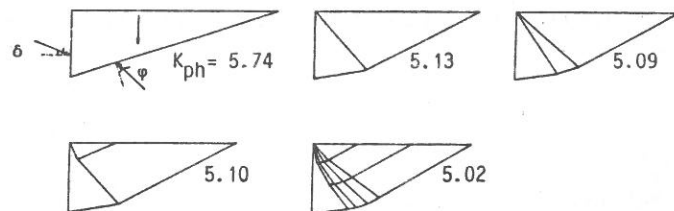
Wie Bild 6.5.1 zeigt, besteht der einfachste Bruchmechanismus für das Beispiel 18 aus nur drei Elementen (bzw. 2 Elemente im Fall der Symmetrie).

Vor der Berechnung des Formbeiwertes nach Gleichung 6.5.5 wurde das entsprechende 2-dimensionale Problem mit der KEM untersucht. Bild 6.5.2 zeigt 5 verschiedene Bruchmechanismen des ebenen Problems. Der K_{ph} -Wert variiert von 5.74 bis zu 5.02 bei einem Reibungswinkel von $\varphi=30^\circ$ und einem angenommenen Wandreibungswinkel von $\delta=2/3\varphi$.



BEISPIEL 18: $\varphi = 30^\circ$; $\delta = 20^\circ$

BILD 6.5.1 : EINFACHSTE 3D- KINEMATIK



BEISPIEL 18 : $\phi = 30^\circ$; $\delta = 20^\circ$

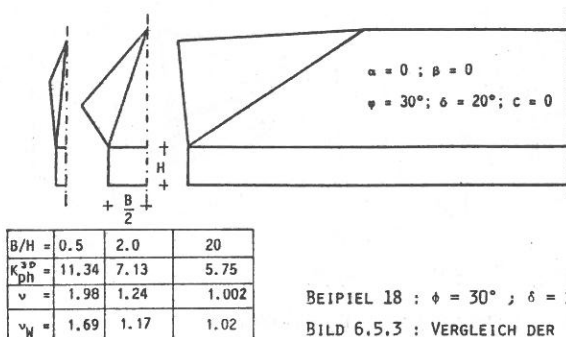
BILD 6.5.2 : K_{PH} - WERTE FÜR DAS 2D- PROBLEM

Nach den Tafeln von Pregl/Kristöfl (1983) ergibt sich ein niedrigerer Wert von $K_{ph}=4.95$.

Es erscheint angebracht, den einfachen 3D-Bruchmechanismus mit dem einfachsten 2D-Bruchmechanismus zu vergleichen. (Letzterer ergibt einen Wert von 5.74).

Bild 6.5.3 zeigt den Vergleich mit dem ebenen Problem und mit der Lösung von Weißenbach für verschiedene Verhältnisse von B/H.

Die Übereinstimmung ist angesichts der einfachen Elemententeilung mit der KEM als gut zu bezeichnen.



BEISPIEL 18 : $\phi = 30^\circ$; $\delta = 20^\circ$

BILD 6.5.3 : VERGLEICH DER FORMBEIWERTE

Darüber hinausgehende weitere eigene Untersuchungen mit komplizierteren Bruchmechanismen und anderen Bodenparametern lassen jedoch eine gegenüber dem 2D-Problem bedeutsame Erschwernis erkennen: die Auffindung einer geeigneten Startgeometrie, für die eine zugkräftefreie Statik (bzw. $\sigma_{zug}=N'/A \leq c$) existiert, ist teilweise wesentlich komplizierter. Zwei Lösungsmöglichkeiten scheinen sich anzubieten:

- systematische oder zufällige Variation der Startgeometrie durch Verfahren der Gruppe 1 nach Abschnitt 5.3.
- Reduktion der vorhandenen Scherfestigkeit so weit, bis eine Geometrie mit zulässiger Statik gefunden wird. Minimierung dieses "Vorproblems". Start mit erhöhten Scherfestigkeiten von der gefundenen Endgeometrie und erneute Minimierung, usw..

Darüber hinaus erscheint die Erarbeitung und Bereitstellung eines Katalogs von kinematisch zulässigen Mechanismen für die einzelnen 3D-Probleme notwendig zu sein. Besonders wirkungsvoll wäre die Umsetzung dieses Katalogs in einen Preprozessor mit interaktiver Bildschirmgrafik.

Um in der Praxis räumliche Probleme näherungsweise abschätzen zu können, wären weiter umfangreiche Parameterstudien mittels der KEM und dem Ziel der Ermittlung von Formbeiwerten für die einschlägigen Grundbauaufgaben zweckmäßig.

MITTEILUNGEN DES BAUGRUNDINSTITUTS STUTTGART

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. U. Smoltczyk

- Nr. 1 Thamm, B. (1974) Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wassergesättigten Tones
Preis: DM 10,--
- Nr. 2 Gußmann, P. (1975) Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch
Preis: DM 5,--
- Nr. 3 Feeser, V. (1975) Die Bedeutung des Kalziumkarbonats für die bodenphysikalischen Eigenschaften von Löss
Preis: DM 10,--
- Nr. 4 Du Thinh, K. (1976) Standsicherheit von Böschungen: Programm-Dokumentation
Preis einschließlich Quellenprogramm: DM 200,--
- Nr. 5 Smoltczyk, U. (1976) Messungen an Schleusen in der UdSSR
Pertschi, O. / Hilmer, K. Schleusennorm der UdSSR (SN 303-65)
Preis: DM 18,--
- Nr. 6 Hilmer, K. (1976) Erddruck auf Schleusenammerwände
Preis: DM 18,--
- Nr. 7 Laumans, Q. (1977) Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens
Preis: DM 18,--
- Nr. 8 Lächler, W. (1977) Beitrag zum Problem der Teilflächenpressung bei Beton am Beispiel der Pfahlkopfanschlüsse
Preis: DM 15,--
- Nr. 9 Spotka, H. (1977) Einfluß der Bodenverdichtung mittels Oberflächen-Rüttelgeräten auf den Erddruck einer Stützwand bei Sand
Preis: DM 15,--
- Nr. 10 Schad, H. (1979) Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben
Preis: DM 20,--
- Nr. 11 Ulrich, G. (1980) Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden
Gußmann, P. (1980) Zum Modellgesetz der Konsolidation
Preis: DM 20,--
- Nr. 12 Salden, D. (1980) Der Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten
Preis: DM 25,--
- Nr. 13 Seeger, H. (1980) Beitrag zur Ermittlung des horizontalen Bettungsmoduls von Böden durch Seitendruckversuche im Bohrloch
Preis: DM 25,--

- Nr. 14 Schmidt, H.-H. (1981) Beitrag zur Ermittlung des Erddrucks auf Stützwände bei nachgiebigem Baugrund
Preis: DM 25,--
- Nr. 15 Smoltczyk, U. (1981) Vorstudie über bauliche Alternativen für Durchgangsstraßen in Siedlungen
Preis: DM 12,--
- Nr. 16 Malcharek, K. (1981) Vergleich nationaler Richtlinien für die Berechnung von Fundamenten
Preis: DM 15,--
- Nr. 17 Gruhle, H.-D. (1981) Das Verhalten des Baugrundes unter Einwirkung vertikal gezogener Ankerplatten als räumliches Problem des Erdwiderstandes
Preis: DM 30,--
- Nr. 18 Kobler, W. (1982) Untersuchungen über Böschungs- und Grundbruch bei begrenzten Lastflächen
Preis: DM 25,--
- Nr. 19 Lutz, W. (1983) Tragfähigkeit des geschlitzten Baugrunds neben Linienlasten
Preis: DM 25,--
- Nr. 20 Smoltczyk, U. (1983) Studienunterlagen "Bodenmechanik und Grundbau"
Preis: DM 35,--
- Nr. 21 Schweikert, O. (1984) Der Einfluß des Böschungswinkels β auf die Berechnung des aktiven Erddruckes
Preis: DM 20,--
- Nr. 22 Vogt, N. (1984) Erdwiderstandsermittlung bei monotonen und wiederholten Wandbewegungen in Sand
Preis: DM 25,--
- Nr. 23 Buchmaier, R. (1985) Zur Berechnung von Konsolidationsproblemen bei nichtlinearem Stoffverhalten
Preis: DM 25,--
- Nr. 24 Schäd, H. (1985) Möglichkeiten der Böschungssicherung bei kleinen Baugruben
Smoltczyk, U./
Schäd, H./
Zoller, P.
Sonderkonstruktionen der Böschungssicherung
Preis: DM 35,--
- Nr. 25 Gußmann, P. (1985) Die Methode der Kinematischen Elemente
Preis: DM 20,--
- Nr. 26 Steinmann, B. (1985) Zum Verhalten bindiger Böden bei monotoner einaxialer Beanspruchung
Preis: DM 25,--

Weitere Veröffentlichungen des Baugrundinstituts und seiner Mitarbeiter

- [1] Smoltczyk, U. (1983) Studienunterlagen.
s.a. "Mitteilungen des Baugrundinstituts Stg."
- [2] Gußmann, P. (1973) Ausgleichsvorgänge eindimensionaler Strömungen bei beliebiger Anfangsbedingung unter besonderer Berücksichtigung der Konsolidation einseitig dräniierter Tonschichten
Die Bautechnik 50, 20 - 25
Sonderdruck
- [3] Thamm, B.R. (1973) Die "Cam-Clay"-Theorie und das "Critical-State"-Konzept
Der Bauingenieur 48, 311 - 314
Sonderdruck
- [4] Gußmann, P./
Spotka, H. (1973) Eindimensionale Konsolidation mehrschichtiger Tonböden
Die Bautechnik 50, 265 - 272
Sonderdruck
- [5] Thamm, B.R. (1973) Anwendung der Finite-Element-Methode zur Berechnung von Spannungen in wassergesättigten Böden
Der Bauingenieur 48, 370 - 374
Sonderdruck
- [6] Gußmann, P. (1974) Different methods of evaluating the influence of seepage forces on slope stability
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 61 - 73
- [7] Gußmann, P./
Schäd, H. (1974) Practical considerations in the application of finite element techniques to soil problems
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 74 - 90
- [8] Gußmann, P./
Spotka, H. (1974) One-dimensional consolidation of multi-layered clays
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 91 - 102
- [9] Gußmann, P./
Thamm, B. (1974) Two-dimensional consolidation of triaxial test specimen
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 103 - 117
- [10] Schäd, H. et al. (1974) Stresses in concrete caisson bells
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 118 - 121
- [11] Smoltczyk, U. (1974) Improved technique for foundations on slopes
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 122 - 129
- [12] Smoltczyk, U./
Diem, P./Spotka, H. (1974) Pressure cell for the measurement of normal and shear stress
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 130 - 136
- [13] Smoltczyk, U./
Ljöterud, L. (1974) Stabilizing sand grains by overhead water pressure in bell bottoms of caisson piles
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 137 - 141

Die Nrn. 6 bis 13 enthält das o.g. Heft 2, das von der DEUTSCHEN GESELLSCHAFT FÜR ERD- UND GRUNDBAU E.V., Essen, zum Preise von DM 20,-- verkauft wird.

- [14] Smoltczyk, U. (1975) *Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente in der Grundbaupraxis*
CAD-Berichte Heft 1 der Gesellschaft für Kernforschung Karlsruhe
- [15] Gußmann, P./Thamm, B. R. (1974) *Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer Versuchsproben*
Der Bauingenieur 49, 293 - 298 Sonderdruck
- [16] Gußmann, P. (1974) *Über den Einfluß unterschiedlicher Wasserdruckansätze auf die Standsicherheit von durchströmten Böschungen*
Der Bauingenieur 49, 298 - 301 Sonderdruck
- [17] Smoltczyk, U./Gußmann, P./Schulz, H. (1974) *DIN 4084 Beiblatt, Erläuterungen und Berechnungsbeispiele*
20 S., Beuth-Verlag Berlin/Köln DM 18,--
- [18] Laumans, Q. (1975) *Die Anwendung der Methode finiter Elemente auf Flächengründungen*
Technische Akademie Wuppertal, Heft 14
- [19] Smoltczyk, U. (1975) *Graving Dock Foundation on Deep Fill*
Proc. 1 Baltic Conf. Soil Mech. Found. Engg. III, 213 - 222
- [20] Smoltczyk, U./Du Thinh (1975) *Zur Bebaubarkeit von vorbelasteten Verwitterungsböden*
Fortschritt-Berichte VDI-Z., Reihe 4, Nr. 25, 70 S.
- [21] Smoltczyk, U. (1975) *Anmerkungen zum Gleitkreisverfahren*
in: Festschrift Lorenz, Techn. Univ. Berlin, 203-218
- [22] Smoltczyk, U. (1975) *Wie kann man Baugruben verbilligen?*
Der Architekt 2, 94 - 103
- [23] Smoltczyk, U. (1975) *Schwierigkeiten beim Bauen im entfestigten Tonstein*
Veröff. Inst. Felsmech. Bodenmech. Univ. Karlsruhe 63, 21 - 50
- [24] Smoltczyk, U. (1976) *Pfahlgründung eines Eisenbahndammes*
Proc. 6. Europ. Conf. SMFE, 1.2, 561 - 566
- [25] Smoltczyk, U./Hilmer, K. (1976) *Erddruck auf Schleusenammerwände*
Vortr. Baugrundtagung, Nürnberg, 245 - 265
- [26] Laumans, Q./Schad, H. (1976) *Calculation of mat foundations on clayey silts*
Proc. Sec. Int. Conf. Num. Meth. in Geomechanics, Blacksburg, Vol 1
- [27] Smoltczyk, U./Hilmer, K./Franke, E./Schuppener, B. (1977) *Earth Pressure Variations Due to Temperatur Change*
ICOSFME Tokyo, Vol. 2, 225 - 233
- [28] Smoltczyk, U./Seeger, H. (1977) *Lateral Deformation Testing in Keuper Marl Boreholes*
Int. Symp. The Geotechnics of Structurally Complex Formations, Capri, Vol. 1, 443 - 447
- [29] Smoltczyk, U. (1978) *Wagnis Baugrund*
Deutsche Architekten- u. Ingenieurzeitschrift, 8/9, 12 - 16
- [30] Hilmer, K./Vogt, N. (1978) *Der Einfluß der Temperatur auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden*
Geotechnik 1, 75 - 83
- [31] Schad, H. (1978) *Die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben*
Vorträge Baugrundtagung Berlin, 141 - 161
- [32] Schulz, H./Smoltczyk, U. (1978) *Zur Ermittlung der Scherparameter überkonsolidierter Böden für Erddruckberechnungen*
Vorträge Baugrundtagung Berlin, 275 - 296
- [33] Smoltczyk, U. (1978) *DFG-Schwerpunktprogramm Bodenmechanik*
GEOTECHNIK 1, 29 - 42
- [34] Gußmann, P. (1978) *Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von äußeren Kräften*
GEOTECHNIK 1, 68 - 74
- [35] Hilmer, K./Vogt, N. (1978) *Der Einfluß der Temperaturverformung auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden*
GEOTECHNIK 1, 75 - 84
- [36] Schmidt, H.-H. (1978) *Entwicklung einer Eignungsprüfung für Maßnahmen zum mittelfristigen Schutz des Erdplanums unter besonderer Berücksichtigung des von oben eindringenden Wassers*
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.033 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart
- [37] Schmidt, H.-H. (1978) *Erprobung von Versiegelungen fein- und gemischtkörniger Böden auf bituminöser Basis unter Verwendung von Handelsprodukten*
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.034 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart
- [38] Gußmann, P. (1979) *Die Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus der Differenz der Zeitsetzung unterschiedlich dränkter Laborversuche*
GEOTECHNIK 2, 148 - 154
- [39] Smoltczyk, U. (1979) *Bestimmung der Baugrundfestigkeit mit der Seitendrucksonde*
Vortragsband zum Pfahlsymposium München 1977, 77 - 80
- [40] Schmidt, H.-H. (1979) *Erddruck auf Widerlager und Stützmauern in Abhängigkeit von Untergrundbewegungen durch Dammschüttungen*
Forschungsbericht FA 5.042 G 77 H B.f. Verkehr
- [41] Smoltczyk, U. (1979) *Zur Berechnung von Bodenreaktionskräften*
Berichte Bundesvereinigung Prüfeningenieure für Baustatik, Arbeitstagung 4, 23 - 51
- [42] Smoltczyk, U./Vogt, N./Hilmer, K. (1979) *Lateral Earth Pressure Due to Surcharge*
Proc. 7. ECSMFE Brighton, 2, 131 - 140

- [43] Smoltczyk, U. (1979) *Influence of foundation depth on raft analyses*. Proc. 3. Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, 4, 1503 - 1512.
- [44] Smoltczyk, U. (1979) *Dammerschüttung in Baggerseen beim Bau der Schnellbahnstrecke Mannheim-Stuttgart*. 2. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, 113 - 115.
- [45] Smoltczyk, U./Gartung, E. (1979) *Geotechnical Properties of a Soft Keuper Sandstone*. Proc. 4. Int. Congr. Rock Mechanics Montreux, 639 - 644.
- [46] Smoltczyk, U./Schmidt, H.-H. (1979) *Forschungsergebnisse von Erddruckuntersuchungen an Modellwänden*. Tagung der Arbeitsgruppe Untergrund der Forschungsgesellschaft f.d. Straßenwesen Koblenz.
- [47] Smoltczyk, U./Gußmann, P./Schad, H. (1980) *Grundbautaschenbuch 3. Auflage Teil 1 mit Beiträgen:*
1.1 Internationale Vereinbarungen; Klassifizierung des Fachschrifttums und Symbole
1.2 Baugrundgutachten; 1.7 Numerische Verfahren in der Bodenmechanik; 1.10 Berechnung von Zeitsetzungen. Verlag W. Ernst u. Sohn Berlin München.
- [48] Smoltczyk, U. (1980) *Untersuchung von Gründungsschäden unter Hinzuziehung von mineralogischen Untersuchungen*. VDI-Seminar "Erkenntnisse aus Schäden im Tiefbau..".
- [49] Smoltczyk, U. (1980) *Erfahrungen mit der Stuttgarter Seitendrucksonde*. III. Int. Symp. DDR-Komitee Bodenmech. Grundbau Dresden, S. 22-28.
- [50] Smoltczyk, U. (1980) *Beitrag zu den Thesen zu Problemen der lastbedingten Baugrundverformungen*. III. Int. Symp. DDR-Komitee Bodenmech. Grundbau Dresden, S. 58-61.
- [51] Buchmaier, R.F./Smoltczyk, U./Schad, H. (1980) *Einfluß einer Mudde-Linse auf die Verschiebungen einer hinterfüllten Uferwand*. Proc. 6. Donaueurop. CSMFE Varna, 1a, S. 65-74.
- [52] Smoltczyk, U./Malcharek, K. (1981) *Lebendverbau von Steilböschungen*. Tiefbau, Ingenieurbau, Straßenbau 23, S. 396-400.
- [53] Smoltczyk, U. (1981) *Saving cities and old buildings*. State-of-the-Art Report. 10th ICSMFE Stockholm, 4, S. 441-465.
- [54] Gußmann, P./Lutz, W. (1981) *Schlitzstabilität bei anstehendem Grundwasser*. GEOTECHNIK 4, S. 70-81.
- [55] Kunz, B. (1981) *Methodenbank im Grundbau (MIG)*. Schlußbericht S-SMO/103 des Inst. f. Grundbau- und Bodenmechanik der Univ. Stuttg., CAD-Projekt Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- [56] Melzer, K.-J./Smoltczyk, U. (1982) *Dynamic penetration testing*. State-of-the-Art Report. Proc. 2nd ESOPT Amsterdam, 1, S. 191-202.
- [57] Smoltczyk, U./Malcharek, K. (1982) *Living Sheets on Steep Slopes*. Proc. 2nd Int. Conf. Geotextiles, 1, S. 253-257.
- [58] Steinmann, B. (1982) *Consolidation testing of Opalinuston with different types of drainage*. Proc. Int. Symp. Num. Models Geomechanics Zürich, S. 280-285. A.A. Balkema Rotterdam.
- [59] Smoltczyk, U. (1982) *Use of non-linear constitutive soil models in engineering practice. Some personal experiences*. Int. Symposium Numerical Models Geomechanics, Zürich, S. 535-548.
- [60] Vogt, N. (1982) *Large scale model tests with partial mobilization of the wall*. IUTAM Conference Deformation Failure Granular Materials, Delft, S. 643-652.
- [61] Smoltczyk, U. (1982) *Verkantung von Brückenpfeilern infolge Baugrund-Elastizität*. Geotechn. Konferenz, Brn, CSSR.
- [62] Smoltczyk, U. (1982) *Unterfangungen und Unterfahrungen*. Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn. 2.3, 3. Aufl., W. Ernst u. Sohn.
- [63] Smoltczyk, U./Netzel, D. (1982) *Flachgründungen*. Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn. 2.1, 3. Aufl., W. Ernst u. Sohn.
- [64] Smoltczyk, U./Hilmer, K. (1982) *Baugrundverbesserung*. Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn. 2.5, 3. Aufl., W. Ernst u. Sohn.
- [65] Schenck, W./Smoltczyk, U./Lächler, W. (1982) *Pfahlroste, Berechnung und Konstruktion*. Grundbautaschenbuch 2, 2.12, W. Ernst u. Sohn.
- [66] Schenck, W./Smoltczyk, U. (1982) *Gründungen im offenen Wasser*. Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn. 2.17, 3. Aufl., W. Ernst u. Sohn.
- [67] Gussmann, P. (1982) *Kinematical Elements for Soils and Rocks*. Proc. of the 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton/Canada.
- [68] Gussmann, P. (1982) *Application of the Kinematical Element Method to Collapse Problems of Earth Structures*. IUTAM Symp. 'Deformation and Failure of Granular Materials' Delft.
- [69] Smoltczyk, U. (1983) *Deep Compaction*. General Report: 8th ECSMFE Helsinki, Vol. 3, S. 63-74.
- [70] Gussmann, P. (1983) *Stabilität von suspensionsgestützten Schlitzten unter statischen Lasten*. 7. Donaueurop. CSMFE, Kishinjew, III, S. 55-60.
- [69] Smoltczyk, U./Malcharek, K. (1982) *Living Sheets on Steep Slopes*. 2nd Int. Conf. on Geotextiles, Las Vegas, I, S. 253-257.
- [70] Smoltczyk, U. (1983) *Deep Compaction*. General Report: 8th ECSMFE Helsinki, Vol. 3, S. 63-74.
- [71] Gussmann, P. (1983) *Stabilität von suspensionsgestützten Schlitzten unter statischen Lasten*. 7. Donaueurop. CSMFE, Kishinjew, III, S. 55-60.
- [72] Smoltczyk, U. (1983) *Axiale Probelastung - Teil I: Statische Belastung. Empfehlungen für die Durchführung (4. Vorschlag)*. GEOTECHNIK 6, S. 174-195.
- [73] Smoltczyk, U. (1984) *Nachlese zum Erdrutsch in Tuve*. GEOTECHNIK 7, S. 54-55.
- [74] Smoltczyk, U./Malcharek, K. (1984) *Naturgerechte Sicherung von Steilböschungen*. GEOTECHNIK 7, S. 117-129.
- [75] Smoltczyk, U. (1984) *Wie sicher müssen Altbauten sein?* GEOTECHNIK 7, S. 174-181.

- [76] Smoltczyk,U. (1984): *Zur Berechnung der rückverhängten Erdwand.*
GEOTECHNIK 7, S.214.
- [77] Smoltczyk,U.(1984): *Neues Verfahren zur Sicherung von Steilböschungen mit Hilfe von Geotextilien.* 23.Int.Chemiefasertagung Dornbirn.
- [78] Gussmann,P./Ochmann,H.(1985): *Probabilistic Theory and Kinematical Element Method.* 11th ICSMFE San Francisco.
- [79] Smoltczyk,U./Malcharek,K.(1985): *Slope protection by membrane structures.* GEOTEXTILES AND GEOMEMBRANES 2
- [80] Smoltczyk,U./Salden,D./Majchrzyk,K,(1985): *Determination of the Shear Strength of Partially Decomposed Mudstone.* 11th ICSMFE San Francisco.
- [81] Smoltczyk,U.(1985): *Axial Pile Loading Test - Part 1:Static Loading.* GEOTECHNICAL TESTING JOURNAL 8.
- [82] Schad,H. (1985): *Computing Costs for FEM Analysis of Foundation Engineering Problems and Possible Ways of Increasing Efficiency.*
Int.Journ.for Numerical and Analytical Meth.in Geomechanics, Vol. 9, 1985, 261-275