BAUGRUNDINSTITUT
STUTTGART

1985
MITTEILUNG 23

ROLAND F. BUCHMAIER

ZUR BERECHNUNG VON KONSOLIDATIONSPROBLEMEN BEI NICHTLINEAREM STOFFVERHALTEN

BAUGRUNDINSTITUT
STUTTGART

1985
MITTEILUNG 23

ROLAND F. BUCHMAIER

ZUR BERECHNUNG VON KONSOLIDATIONSPROBLEMEN BEI NICHTLINEAREM STOFFVERHALTEN

Das Baugrundinstitut ist unter der Bezeichnung
"Institut für Grundbau und Bodenmechanik"
eine Einrichtung der Universität Stuttgart

ISBN 3-921837-23-5

Herausgegeben 1985 im Eigenverlag des Baugrundinstituts.

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Die Berechnung von Zeitssetzungsvorgängen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente begegnet in der Praxis trotz des inzwischen umfangreichen wissenschaftlichen Schrifttums hierzu immer noch starker Skepsis. Eine ausschließlich theoretische Prognose ist wegen der vielfältigen Annahmen unzuverlässig. Besser ist es, Rechenmodelle zu entwickeln, die an Hand gemessener Setzungen während eines anlaufenden Bauvorhabens fortschreitend verbessert werden könnmen. Die Zuverlässigkeit solcher Rechenmodelle muß dann aber im Rahmen der getroffenen Annahmen gewährleistet sein. Die vorliegende Arbeit trägt dazu sehr wesentlich bei, indem die verschiedenen numerischen und bodenphysikalischen Fehlerquellen systematisch untersucht und in ihrer Auswirkung auf die Zeitsetzung verglichen werden. Als emmpirisches Datenmaterial standen die 1980 als Mitteilung 11 dieser Reihe veröffentlichten Lastplattenversuche von G. Ulrich zur Verfügung. Es zeigt sich, daß ausgerechnet diejenigen beiden bodenmechanischen Kennwerte - Durchlässigkeitsbeiwert und Kohäsion -, die erfahrungsgemäß ungenau zu bestimmen sind bzw. von Natur aus sehr streuen, auch die Dominanten bei der Voraussage zutreffender Zeitsetzungsverläufe sind. Dies mahnt zur Bescheidenheit bei der Verfeinerung von Stoffgesetzen. Wichtiger erscheint mir, mit dem jetzt verfügbaren Instrumentarium gut dokumentierte Fallbeispiele nachzurechnen, um Theorie und Praxis der Bewertung von Zeitsetzungsvorgängen wieder näher zueinander zu bringen.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei an dieser Stelle für die finanzielle Förderung eines Teils der Untersuchungen und deren unbürokratische Abwicklung gedankt.

Smoltczyk

VORWORT DES AUTORS

Das vorliegende Mitteilungsheft entstand als Dissertation während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart.

Dem Leiter des Instituts, Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Smoltczyk, gilt mein besonderer Dank für die wohlwollende Förderung der Arbeit und die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Prof. Dr. techn. H. Bednarczyk danke ich nicht nur für die Übernahme des Mitberichts, sondern auch für sein Interesse und die fruchtbaren Anregungen bereits im frühen Stadium der Arbeit.

In gleicher Weise bedanke ich mich für die vielen wertvollen Diskussionen und Hinweise bei meinen ehemaligen Kollegen vom Institut, insbesondere bei den Herren Prof. Dr.-Ing. P. Gußmann und Dr.-Ing. H. Schad.

Auch den Studenten, die als Diplomanden und wissenschaftliche Hilfskräfte an der Untersuchung von Teilproblemen mitgearbeitet haben, spreche ich meinen Dank aus.

Schließlich richte ich ein herzliches Dankeschön an Frau I. Klapproth und Herrn O. Huber für die tatkräftige Mithilfe bei der Drucklegung.

Roland Buchmaier

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird untersucht, inwieweit durch die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze in Verbindung mit der Konsolidationstheorie das Verformungsverhalten wassergesättigter bindiger Böden besser beschrieben werden kann. Abweichend von der klassischen Biotschen Theorie werden zwei verschiedene Spannungs-Verzerrungsgleichungen für das Korngerüst eingesetzt: ein einfaches hypoelastisches Gesetz (G/K-Modell) und ein elastoplastisches (Kappenmodell), wobei beim erstgenannten die Erweiterung um einen Dilatanzanteil vorgenommen wird.

Das numerische Lösungsverfahren sieht eine FEM-Diskretisierung im Raum und ein einfaches Differenzenschema in der Zeit vor, Ansatzfunktionen werden dabei für Verschiebungen und Porenwasserdruck verwendet. Zur Reduzierung von numerischen Störungen am Drainagerand bei kleinen Zeitschritten wird ein spezielles Übergangselement entwickelt.

Im Mittelpunkt der Berechnungsbeispiele stehen kraft- und verschiebungsgesteuerte Lastplattendruckversuche, die im Rahmen einer früheren Forschungsarbeit des Baugrundinstituts auf Konstanzer Seeton gefahren worden sind. Die Nachrechnung mit im Labor unabhängig bestimmten Bodenparametern zeigt zunächst keine gute Übereinstimmung; erst die Variation einiger maßgeblicher Parameter innerhalb deren Streubreite bringt weitgehend gute Ergebnisse. Neben einem speziellen Dreiaxialversuch wird darüber hinaus noch die Konsolidation unter einer Dammschüttung berechnet. Die Sonderfälle "undrainiert" und "ideal drainiert" werden der über die Zeit gekoppelten Analyse gegenübergestellt.

SUMMARY

Re. the Computation of Consolidation Problems with Nonlinear Material Behaviour

In this study it is investigated to which extent the deformation behaviour of water-saturated, cohesive soils can be better described by using non-linear constitutive laws in relation with the consolidation theory. Two different stress-strain equations are used for the soil skeleton, in deviation from the classical Biot theory: one standard hypoelastic law (G/K-model) and one elastoplastic (cap model), whereby at the first mentioned the extension is made to consider dilatancy.

The numerical solution procedure proposes a FEM-discretization in space and a standard diffential scheme in time by using shape functions for displacements and interstitial pressure. A special transition element is developed for reduction of numerical disturbances at the drainage boundary with small time steps.

The central point of the computation examples are stress and strain controlled plate load bearing tests, which were performed on the Konstanz lacustrine clay within the scope of an earlier scientific research by the Baugrundinstitut. The recomputation with soil parameters independently determined in the laboratory at first does not show a good agreement; but then the variation of some significant parameters within their range of scatter brings mainly good results forward. In addition to a special triaxial test, the consolidation under a dam is also computed. The special cases "undrained" and "ideally drained" are compared with the analysis coupled over time.

INHALT Seite

Seite

SCHRIFTTUM

Adachi,T./Oka,F./Tange,Y. (1982): Finite element analysis of two-dimensional consolidation using an elasto-viscoplastic constitutive equation. Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Edmonton,1,287-296 ed. Z. Eisenstein, Balkema, Rotterdam

Almond,J.C. (1978): Format User's Manual. ISD Rep. N.233,Rev. C, Stuttgart

Aramaki,G./Kuroki,T./Onishi,K. (1982): Consolidation analysis by boundary element method. Proc.4th Int.Conf.Bound.Elem.Meth.,Southampton, ed.C.A.Brebbia, 363-376.

Argyris,J.H./Mareczek,G. (1971): Thermomechanical analysis of structures. 4th Conf.Hung.Acad.Sciences Dimens.Strength Calc.,Budapest, Sonderdruck ISD Stuttgart.

Argyris,J.H./Willam,K.J. (1974): Some considerations for the evaluation of finite element models. Nucl.Engg.Design,28,42-75

Argyris,J.H./Vaz,L.E./Willam,K.J. (1978): Improved solution methods for inelastic rate problems. Comp.Meth.Appl.Mech.Engg.16,231-277

Aubry,D./Hujeux,J.C. (1979): Special algorithms for elastoplastic consolidation with finite elements. Proc.3th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Aachen,1,133-141

Banerjee,P.K./Butterfield,R. (1981): Boundary element methods in engineering science. Mc Graw-Hill,London

Bednarczyk,H. (1968): Eine einfache Herleitung der Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeit. J.Appl.Math.Phys.19,140-141

Belke,L. (1980): Zur numerischen Behandlung instationärer Vorgänge. Diss.Univ.Stuttgart

Bent Hansen, C.E. (1958): Line Ruptures regarded as narrow rupture zones; basic equations based on kinematic considerations. Proc.Conf.Earth Pressure Problems,Brussel,Vol.1,39-49

Biot,M.A. (1941 a): General theory of three-dimensional consolidation. J.Appl.Phys.12,155-164

Biot,M.A. (1941 b): Consolidation settlement under a rectangular load distribution. J.Appl.Phys.,12,426-430

Biot,M.A./Clingan,F.M. (1941): Consolidation settlement of a soil with an impervious top surface. J.Appl.Phys.,12, 578-581

Biot,M.A. (1956): Theory of deformation of a porous viscoelastsic anisotropic solid.
J.Appl.Phys.27,459-467

Booker,J.R./Small,J.C. (1975): An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation.
Int.J. Solids Struct.,11,907-917

Brebbia,C.A./Connor,J.J. (1973): Fundamentals of finite element techniques.
Butterworth,London

Brebbia,C.A. (1978): Recent advances in boundary element methods.
Pentech Press,London,Plymouth

Buck,K.E./Scharpf,D.W./Stein,E./Wunderlich,W. (Hrsg.) (1973): Finite Elemente in der Statik.
Wilh.Ernst & Sohn,Berlin,München,Düsseldorf

Christian,J.T. (1968): Undrained stress distribution by numerical methods.
J.Soil Mech.Found.Div..ASCE,94,1333-1345

Christian,J.T./Boehmer,J.W. (1970): Plane strain consolidation by finite elements.
J.Soil Mech.Found.Div.,ASCE,96.1435-1457

Christian,J.T./Boehmer,J.W./Martin,P.P. (1972): Consolidation of a layer under a strip load.
J.Soil Mech.Found.Div.ASCE.98,693-707

Cividini,A. (1981): An alternative finite element approach for soil consolidation.
Proc.Conf.Num.Meth.Coupled Problems,Swansea,ed.Hinton/Bettess/Lewis, Pineridge Press,Swansea, 688-698

Cividini,A./Gioda (1982): Compatible and equilibrium F.E. for soil consolidation a preliminary comparison, 1. 297-306
Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Goemech.,Edmonton,ed.Z.Eisenstein.Balkema, Rotterdam,1,297-306

Davis,E.H./Raymond,G.P. (1965): A non-linear theory of consolidation.
Géotechnique 15,161-173

Davis,E.H./Poulos,H.G. (1972): Rate of settlement under two- and three-dimensional conditions.
Géotechnique 22,95-114

Desai,C.S./Abel,J.F. (1972): Introduction to the finite element method.
Van Nostrand Reynhold Comp., New York

Desai,C.S./Johnson,L.D. (1972): Evaluation of two finite element formulations for one-dimensional consolidation.
Comp.& Struct.,2,469-486

Desai,C.S./Johnson,L.D. (1973): Evaluation of some numerical schemes for consolidation.
Int.J.Num.Meth.Engg.,7,243-254

Duncan,J.M./Chang,C.Y. (1970): Nonlinear analysis of stress and strain in soils.
J.Soil Mech. Found.Div.,ASCE,96,1629-1653

Finn,W.D.L./Byrne,P.M./Bucher,F. (1971): Diskussionsbeitrag zu Christian/ Boehmer (1970).
J.Soil Mech.Found.Div.ASCE,97,808-809

Franke,E./Schuppener,B. (1978): Die φ=0-Analyse - Bestandsaufnahme und neue Entwicklungen.
Die Bautechnik,231-239

Gabener,H.-G. (1983): Untersuchungen über die Anfangsgradienten und Filtergesetze bei bindigen Böden.
Mitt.Fachgebiet Grundbau/Bodenmechanik,Univ.-Gesamthochsschule Essen

Garbsch,T. (1973):: Räumliche Konsolidation bei Zugrundelegung eines visko-elastischen Korngerüsts.
Diss. Univ.Stuttgart

Garcia-Suarez,C./Alarcon,E. (1982): Consolidation problems.
Proc.,4th Int.Conf.Bound.Elem.Meth.,Southampton,ed.C.A.Brebbia,377-390

Ghaboussi,J./Wilson,E.L. (1973): Flow of compressible fluid in porous elastic media.
Int.J.Num.Meth.Engg.5,419-442

Gibson,R.E./McNamee,J. (1957): The consolidation settlement of a load uniformly distributed over a rectangular area.
4th Int.Conf.,ISSMFE,London,297-299

Green,A.E./Naghdi,P.M. (1965): A dynamical theory of interacting continua.
Int.J.Engg.Sci.3,231-241

Green,A.E./Steel,T.R. (1966): Constitutive equations for interacting continua.
Int.J.Engg.Sci.4,483-500

Gudehus,G. (1980): Stoffgesetze der Bodenmechanik.
In: Grundbautaschenbuch,3.Aufl.,Teil 1,Hrsg.U.Smoltczyk,Wilh.Ernst & Sohn,Berlin

Gußmann,P. (1979): Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus unterschiedlich dränierten Zeitsetzungsversuchen.
Geotechnik 2,148-154

Gußmann,P. (1980): Stoffgesetze in der Bodenmechanik.
Vorlesung Bodenmechanik IV,Univ.Stuttgart

Gußmann,P./Schad,H. (1974): Practical considerations in the application of the finite element techniques to soil problems.
Dt.Beitr.Geotechnik 2,74-90

Heinrich,G./ Desoyer, K. (1955): Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen.
Ing.Archiv 23,73-84

Henkel,D.J. (1960): The shear strength of saturated remolded clays.
Proc.ASCE Research Conf.Shear Strength Cohesive Soils, Boulder,Col., 533-554

Herrmann,L.R. (1965): Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem.
AIAA J.,3,1896-1900

Holzlöhner,U. (1971): Die Berechnung von Konsolidationsvorgängen mit der Finite-Element-Methode.
Bauingenieur 46, 238-242

Horn,A. (1964): Die Scherfestigkeit von Schluff.
Forschungsbericht Land Nordrh.-Westf.Nr.1346,Westdt.Verl.,Köln und Opladen

Hwang,C.T./Morgenstern,N.R./Murray,D.W. (1971): On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methods.
Canadian Geotechn.J.,8,109-118

Kondner,R.L. (1963): Hyperbolic stress-strain-response of cohesive soils.
J.Soil Mech.Found.Div,ASCE,89,115-143

Koppula,S.D./Morgenstern,N.R. (1972): Consolidation of clay layer in two dimensions.
J.Soil Mech.Found.Div.,ASCE,98,1,79-93

Krause,G. (1975 a): Eindimensionale Konsolidation mit finiten Elementen.
Die Bautechnik 52,325-329

Krause,G. (1975 b): Untersuchungen über numerische Verfahren für elastisch-poröse Medien.
Diss.TU Berlin,D 83

Krings,W. (1976): Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten.
Mitt. 3,Inst.Mechanik,Ruhr-Univ.Bochum

Lade,P.V. (1979): Three-dimensional stress-strain behavior and modeling of soils
Heft 4,Serie Grundbau,Ruhr-Univ.Bochum

Laumans,Q. (1977): Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens.
Mitt.7 Baugrundinst. Stuttgart

Lewis,R./Roberts,G./Zienkiewicz,O.C. (1976): A nonlinear flow and deformation analysis of consolidated problems.
Proc.2nd Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Virgina Polytechn.Inst.State Univ.Blacksburg 1976,1, 1106-1118

Magnan,J.P./Humbert,P./Belkeziz,A./Mouratidis,A. (1982): Finite element analysis of soil concolidation, with special reference to the case of strain hardening elastoplastic stress-strain models.
Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Edmonton,ed.Z.Eisenstein,Balkema, Rotterdam,1,327-336

Matsui,T./Abe,N. (1982): Multi-dimensional consolidation analysis of soft clay.
Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Edmonton,ed.Z.Eisenstein,Balkema, Rotterdam,1,337-347

Matsumoto,T./Ko,H.Y. (1982): Finite element analysis of strain-softening soils.
Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Edmonton,.ed.Z.Eisenstein,Balkema, Rotterdam,1,213-222

Mróz,Z./Norris,V.A./Zienkiewicz,O.C. (1979): Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elastso-plastic deformation of soils.
Géotechnique 29,1-34

Mróz,Z. (1980): On hypoelasticity and plasticity approaches to constitutive modelling of inelastic behaviour of soils.
Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech.4,45-55

Müller,M. (1979): Zur Berechnung inkompressibler, elastischer Medien unter kleinen und großen Dehnungen nach der Methode der Finiten Elemente.
Diss.Univ.Stuttg.

Nishizaki,S./Saito,I./Ohira,A. (1982): Some finite elements for consolidation analysis.
Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Edmonton,ed.Z.Eisenstein,Balkema, Rotterdam,1,69-78

Poskitt,T.J. (1969): The consolidation of saturated clay with variable permeability and compressibility.
Géotechnique 19,234-252

Ramm,E. (1976): Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
Ber.76-2 Inst.Baustatik Univ.Stuttgart

Ramm,E. (1981): Strategies for tracing - nonlinear response near limit points.
Proc.Europ.-U.S.Workshop Nonlin.F.E.M.-Anal.Struct.Mech.,Bochum 1980, Springer,Sonderdr. Inst. f. Baustatik,Univ. Stuttgart

Reiner,M. (1968): Rheologie in elementarer Darstellung.
2.Aufl.,C.Hanser Verlag München

Reiner,M. (1971): Advanced Rheology.
H.K.Lewis & Ltd.,London

Rendulic,L. (1936): Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen.
Der Bauingenieur 17,559-564

Reynolds,O. (1885): On the dilantancy of media composed of rigid particles in contact.
Phil.Mag.J.Sci.20,469-481

Richter,T. (1979): Nonlinear consolidation models for finite element computations.
Proc.3th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Aachen,1,181-190

Roscoe,K.H./Burland,J.B. (1968): On the generalized stress-strain behaviour of "wet" clay.
In: Hayman/Leckie Eng.Plasticity,Cambridge Univ.press,535-609

Rowe,P.W. (1962): The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact.
Proc.Royal Soc.,A 269,500-527

Runesson,K. (1978): On non-linear consolidation of soft clay.
Publ.78: 1,Dept.Struct.Mech.,Chalmers Univ.Techn.Göteborg

Sagaseta,C./Ballester,F/Sáinz,J.A. (1979): Numerical model for undrained and consolidation deformations of soft clays.
Proc.3rd Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Aachen,1,191-200

Sáinz,J.A./Sagaseta,C. (1982): Plane strain consolidation of elastoplastic soft clays.
Proc.4th Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,Edmonton,ed.Z.Eisenstein,Balkema, Rotterdam,1,373-381

Sandhu,R.S. (1968): Fluid flow in saturated porous elastic media.
Ph.D.Thesis,Univ.California,Berkeley,1968

Sandhu,R.S./Wilson,E.L. (1969): Finite-element analysis of seepage in elastic media.
J.Engg.Mech.Div.ASCE 95,641-652

Sandhu,R.S. (1976): Variational principles for finite element analysis of consolidation.
Proc.2nd Sec.Int.Conf.Num.Meth.Geomech.,ed.C.S.Desai,Blacksburg,1,20-40

Sandhu,R.S./Liu,H./Singh,K.J. (1977): Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media.
Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech.,1,177-194

Schad,H. (1979): Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben.
Mitt.10,Baugrundinst.Stuttgart

Schiffmann,R.L./Chen,A.T.F./Jordan,J.C. (1969): An analysis of consolidation theories.
J.Soil Mech.Found.Div.ASCE,95,285-312

Skempton,A.W. (1954): The pore pressure coefficients A and B.
Géotechnique 4,143-147

Smoltczyk,U. (1967): Stress computation in soil media.
J.Soil Mech.Found.Div.,ASCE,93,101-124

Smoltczyk,U. (1983): Studienunterlagen Bodenmechanik und Grundbau.
Inst.Grundbau Bodenmech.,Univ.Stuttgart

Smoltczyk,U./Gußmann,P. (1981): Verkantung von Pfeilern und Türmen infolge Baugrundnachgiebigkeit.
DFG-Bericht Sm 3/18,Inst.Grundbau/Bodenmech.Univ.Stuttgart

Szefer,G. (1977): Non-linear problems of consolidation theory. Proc. Symp. franco-polonais, probl. non-lin. Mecan., Cracovic, 585 - 604.

Taylor,R.L. (1972): On completeness of shape functions for finite element analysis.
Int.J.Num.Meth.Engg.,4,17-22

Terzaghi,K. (1923): Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen.
Ak.Wiss,Wien,Sitzungsbereich Math.Nat.wiss.Kl.Part.2a,132,125-138

Thamm,B. (1974): Berechnung der Anfangssetzungen und der Anfangsporenwasserdrücke eines wassergesättigten normalverdichteten Tones.
Mitt.1,Baugrundinst.Stuttgart

Tölke,F. (1962): Die physikalischen und mathematischen Grundlagen des eindimensionalen Konsolidationsvorgangs in unendlich ausgedehnten, idealen Tonschichten. Vorlesungsumdruck Univ. Stuttgart.

Trumpff,J. (1980): Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von bindigen Böden.
Diplomarb.,Inst.Grundbau/Bodenmech.Univ.Stuttgart

Ulrich,G. (1980): Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden.
Mitt.11,Baugrundinst.Stuttgart,2-93

Valliappan,S./Lee,I.K./Boonlualohr,P. (1974): Finite element analysis of consolidation problem.
Proc.Conf.F.E.M.Flow Problems,Swansea,ed.Oden,Zienkiewicz,Gallagher, Taylor,UAH Press Huntsville,Alab.

Vermeer,P.A. (1980): Formulation and analysis of sand deformation problems.
Rep.195,Geotechn.Lab.Delft Univ.of Techn.

Vermeer,P.A./Verruijt,A. (1981): An accuracy condition for consolidation by finite elements.
Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech.5,1-14

Verruijt,A. (1977): Generation and dissipation of pore water pressures.
In: Finite Elements in Geomechanics,ed.G.Gudehus,J.Wiley & Sons London,293-317

Verruijt,A. (1978): Application of the finite element method in geomechanics.
Delft Univ.Techn.,Delft

Willam,K.J. (1978): Numerical solution of inelastic rate processes.
Comp.& Struct.,8,511-531

Yokoo,Y./Yamagata,K./Nagaoka,H. (1971): Finite element analysis of consolidation following undrained deformation.
Soils & Found.,11,37-58

Zienkiewicz,O.C. (1971): The finite element method in engineering science.
2.Aufl.,McGraw-Hill,London

Zienkiewicz,O.C./Naylor,D.J. (1971): Discussion on the adaption of critical state soil mechanics theory for use in finite elements.
Proc.Roscoe Memorial Symp.,537-547

Zienkiewicz,O.C. (1977): The finite element method.
3.Aufl.,McGraw-Hill,London

BEZEICHNUNGEN

Alle verwendeten Bezeichnungen werden an der Stelle des ersten Auftretens im Text erläutert. Die wichtigsten, an mehreren Stellen auftretenden Bezeichnungen sind nachfolgend aufgeführt.

Tensoren werden in den Rechenvorschriften in kartesischer Indexschreibweise dargestellt, ihre formale Angabe erfolgt in symbolischer Schreibweise mit $(\underset{\sim}{\ })$.

A	Porenwasserdruckparameter nach Skempton
A_a	äußere Arbeit
A_i	innere Arbeit
B	Breite des diskretisierten Gebiets
c	Kohäsion
c'	effektive Kohäsion
$\bar{c}'$	Abszissenabsschnitt der Coulombschen Grenzgerade im s'-t'-Diagramm
c_u	undrainierte Kohäsion
c_0	Parameter zur Festlegung der Fließfläche in der hydrostatischen Ebene (elastoplastisches Stoffgesetz)
c_r	Parameter zur Festlegung der Fließfläche in der Deviatorebene (elastoplastisches Stoffgesetz)
c_v	eindimensionaler Konsolidationsbeiwert $E_s k/\gamma_w$
$\underset{\sim}{D}$	tangentialer Stofftensor
d_i	Elementdicke des i-ten Elements vom Drainagerand
$\underset{\sim}{E}$	Hookescher Stofftensor
E	Elastizitätsmodul
E_s	Steifemodul
e	Porenzahl
e_1	Porenzahl beim Einheitsdruck σ'_{m1}
f	Faktor für Zeitschrittschranke
G	Schubmodul
G_i	Anfangsschubmodul beim CU-Versuch
G_0	Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes nach Schad
G_{UR}	Schubmodul für Ent- und Wiederbelastung
h	Druckhöhe
K	Kompressionsmodul; Konditionszahl

K_O	Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes
K_{UR}	Kompressionsmodul bei Ent- und Wiederbelastung
k	Durchlässigkeit
M	Dilatanzmodul
M_{CSL}	Steigung der "critical state line" des elastoplastischen Stoffgesetzes
M_O	Dilatanzmodul bei Erstbelastung
N_i	Ansatzfunktion für den Knoten i
n	Exponent beim hypoelastischen Stoffgesetz;
	Anzahl der Lastschritte
n_e	Anzahl der Elemente
$\underset{\sim}{n}$	Normalenvektor
p	Porenwasserüberdruck
Q	Druckkraft beim Lastplattenversuch
q	konstante Flächenlast;
	Durchflußmenge
R	Radius der Lastplatte
S	Scherzahl nach Smoltczyk bzw. Schad
$S_{(Index)}$	Oberfläche
s, s'	halbe Hauptspannungssumme, total: $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$, effektiv: $(\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$
T	normierte Zeit;
	Tiefe des diskretisierten Gebiets
t	Zeit
t'	halbe Hauptspannungsdifferenz $(\sigma'_1 - \sigma'_3)/2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ (effektiv = total)
$\underset{\sim}{t}_u$	Spannungsvektor
U	Verfestigungsgrad
$\underset{\sim}{u}$	Verschiebungsvektor
V	Volumen
$\underset{\sim}{v}$	Filtergeschwindigkeit
w, w_o, w_∞	Setzung, Sofortsetzung, Endsetzung
$\underset{\sim}{x}$	Ortsvektor
x, y, z	Ortskoordinaten
Y	Feldgröße allgemein
α	Porenwasserdruckparameter nach Henkel;
	Verhältnis der Elementdicken d_1/d_2
α_G, α_K	Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes
β_G	Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes nach Schad
γ	Verhältnis der Elementdicken d_3/d_2

γ_w	Wichte des Wassers
$\underset{\sim}{\delta}$	Kroneckersymbol (Einheitstensor)
$\underset{\sim}{\varepsilon}$	Verzerrungstensor
$\underset{\sim}{\varepsilon}^{\circ}$	Anfangsverzerrungstensor
ε_v	Volumendilatation
ε_a	Axialdehnung beim Dreiaxialversuch (Stauchung positiv)
ε_p	Porenwasserdruck-Störung
θ	Gewichtungsfaktor beim Differenzenverfahren
η	dimensionslose, lokale Ortskoordinate
λ_c	Kompressionsbeiwert
λ_s	Schwellbeiwert
ν	Querdehnungszahl
ξ	dimensionslose, lokale Ortskoordinate
$\underset{\sim}{\sigma}$	Spannungstensor (Zug positiv)
σ'_m	hydrostatischer Spannungsanteil des eff. Spannungstensors $\frac{\sigma'_1+\sigma'_2+\sigma'_3}{3} = \frac{\sigma'_{xx}+\sigma'_{yy}+\sigma'_{zz}}{3}$
σ_a, σ_r	Axial-/Radialspannung im Dreiaxialversuch (Druck positiv)
σ_1, σ_3	größte/kleinste Hauptspannung (Zug positiv)
σ_o	mittlere Sohlnormalspannung beim Lastplattenversuch (Druck positiv)
σ_v	geologische Vorbelastung
τ_{oct}	Oktaederschubspannung
φ'	effektiver Scherwinkel
ψ	Dilatanzwinkel
ω	Winkel des effektiven Spannungswegs gegenüber s'-Achse im s'-t'-Diagramm beim CU-Versuch. Hilfsgröße zur Parameterbestimmung des hypoelastischen Stoffgesetzes

Indizes

	Kopfzeiger:
D	deviatorisch
pl	plastisch
t	tangential

0	Anfang
'	effektiv
*	hypoelastisches Stoffgesetz in "inkrementeller Hookescher" Form
Λ	am Rand vorgegeben
~	Näherung

Fußzeiger:

i,j,k,l	Tensorkomponenten bezüglich des kartesischen x-y-z-Koordinatensystems
min	minimal
max	maximal
t	Zeitpunkt t
UR	Ent-/Wiederbelastung
u_i, t_i	i-te Komponente des Verschiebungs-/Spannungsvektors, vorgegeben
p,q	Porenwasserüberdruck/Durchflußmenge, vorgegeben
1,2,3	Hauptkomponenten

Sonstige Vereinbarungen

Δ()	Differenz
d()	Differential
$()_{,i}$	Ableitung bezüglich der Ortskoordinate x_i
()	Ableitung bezüglich der Zeit
δ()	virtuell
$()_{i...i}$	über gleiche Indizes wird summiert

Matrizen (Für Spaltenmatrizen wird die Bezeichnung "Vektor" verwendet)

A	Systemmatrix für die Auflösung nach den Porenwasserüberdrücken
a	Matrix, allgemein
B	Transformationsmatrix **L·N** Knotenfreiheitsgrade-Ableitungen im Element (Verzerrungen bzw. Druckgradient)
b	Matrix, allgemein
C	Koppelmatrix
D	tangentiale Stoffmatrix
f	Vektor der Knotenkräfte
H	Sickermatrix

I	Einheitsmatrix
J	Summationsvektor
K	Steifigkeitsmatrix
L	Differentialoperator
N	Matrix der Ansatzfunktionen
p	Vektor der Knoten-Porenwasserüberdrücke
r	Vektor der Reaktionskräfte
u	Verschiebungsvektor
x	Vektor der Ortskoordinaten
σ'	Spannungsvektor (effektive Spannungen)
0	Nullvektor

Indizes der Matrizen

	Fußzeiger:
e	Elementmatrix
u	Verschiebungen
p	Porenwasserüberdruck
	Kopfzeiger:
T	transponierte Matrix
-1	inverse Matrix
$\lambda(\mathbf{A})$	Eigenwert der Matrix **A**
diag(**A**)	Diagonalmatrix

Abkürzungen der verwendeten Stoffgesetze in den Diagrammen:

LE	linear elastisches, Hookesches Gesetz
HE	hypoelastisches Stoffgesetz
EP	elastoplastisches Stoffgesetz

1. EINLEITUNG

Die Beurteilung der Funktionsfähigkeit und der Standsicherheit von Gründungen erfordert in der Regel eine Aussage über die im Gebrauchszustand zu erwartenden Setzungen und über die Belastung, bei welcher der Boden versagt, also die Bruch- oder Traglast.

Besteht der Baugrund - ganz oder teilweise - aus bindigem Boden, werden sowohl Setzung als auch Traglast von der Zeit abhängig sein. Für die quantitative Bestimmung dieser Größen legt man in der klassischen Bodenmechanik, je nach Fragestellung, verschiedene Modellvorstellungen zugrunde.
So wird bei der rechnerischen Ermittlung der Setzung bindiger Böden von einer Unterteilung in die drei Anteile Sofortsetzung, Konsolidationssetzung und Sekundärsetzung ausgegangen. Diese drei Stufen werden i.a. voneinander entkoppelt betrachtet, obwohl sie sich von Beginn der Belastung an überlagern.

Die Sofortsetzung tritt unmittelbar nach Aufbringen der Last in Erscheinung. Die damit verbundenen Volumenänderungen sind nur bei teilgesättigten Böden von Bedeutung ("Auspressen" der Porenluft); bei wassergesättigten Böden sind diese gegenüber den Gestaltsänderungen vernachlässigbar klein. Bei der Berechnung dieses Anfangszustands wird der Boden, bestehend aus Korngerüst, Wasser und gegebenenfalls Luft, als elastischer Festkörper betrachtet. Die Rechnung erfolgt dann mit den sogenannten undrainierten Verformungsparametern in totalen Spannungen. Die dabei auftretenden Porenwasserüberdrücke errechnet man häufig aus dem totalen Spannungszustand mit Hilfe von empirischen Porenwasserdruckansätzen.

Die Konsolidationssetzung ergibt sich dadurch, daß ein Teil des freien Porenwassers allmählich aus den Poren ausgepreßt wird. Es findet somit eine Spannungsumlagerung vom Wasser auf das Korngerüst statt. Die Beschreibung erfolgt durch die Kopplung eines laminaren Strömungsvorgangs mit dem Verformungsvorgang eines elastischen porösen Festkörpers. Der Boden wird also als 2-Phasen-Gemisch dargestellt, wobei für die Festsubstanz die Verformungsparameter des drainierten Zustands maßgebend sind.

Die Sekundärsetzung ergibt sich infolge eines viskosen Verformungsvorgangs, der dadurch erklärt wird, daß das System auf Änderungen des mechanischen Zustands mit einer Änderung des elektrochemischen Potentials verzögert reagiert, wobei

gebundenes Porenwasser frei wird und verdrängt werden kann. Der Boden wird hierbei als poröser viskoser Stoff idealisiert, auf dessen Verformungsverhalten das Porenwasser keinen Einfluß mehr hat, d.h. das Korngerüst wird als drainiert angesehen. Die Sekundärsetzungen werden oft mit Hilfe von empirischen Kriechfunktionen ermittelt, wobei der Spannungszustand nach Abschluß der Konsolidation zugrunde gelegt wird.

Die Analyse von Bruchzuständen setzt i.a. voraus, daß der Boden sich entweder entlang diskreter Gleitflächen oder innerhalb eines ganzen Gebietes im plastischen Grenzgleichgewicht befindet.

Bei bindigem Boden unterscheidet man im wesentlichen zwischen dem undrainierten Anfangszustand und dem drainierten Endzustand. Analog zum Verformungsproblem gilt hier, daß sich die Anfangsscherfestigkeit auf totale Spannungen bezieht, während die Endscherfestigkeit von den effektiven, im Korngerüst wirksamen Spannungen abhängt.

Andererseits wurde mit der Entwicklung der Porenwasserdruck-Meßtechnik die Erkenntnis gewonnen, daß die in undrainierten Scherversuchen ermittelten effektiven Scherparameter mit den aus drainierten Versuchen bestimmten Werten i.a. gut übereinstimmen. Dies bedeutet, daß bei Kenntnis der Porenwasserdruckverteilung auch im Anfangszustand (und darüber hinaus während der Konsolidation) Aussagen über Bruchzustände mit Hilfe effektiver Scherparameter getroffen werden können. Zur Bestimmung der hierzu notwendigen Porenwasserdrücke bedient man sich verschiedentlich einer Verformungsanalyse des undrainierten Zustands in Verbindung mit einem entsprechenden Porenwasserdruckansatz in der zuvor bereits erwähnten Weise.

Die mit dieser kurzen Übersicht aufgezeigten verschiedene Modelle, die in der bodenmechanischen Praxis üblich sind, haben den Vorteil, daß sie relativ einfach mathematisch formulierbar sind. Dies wiederum bedeutet, daß für einfache Randwertprobleme geschlossene Lösungen für die Anwendung in der Grundbaupraxis angegeben werden können.

Der Nachteil der getrennten Betrachtung der einzelnen Teilprobleme ist, daß die damit verbundenen verschiedenen Theorien nicht ohne Widerspruch zueinander stehen und daß für ein und denselben Boden verschiedene Sätze von Stoffparametern bestimmt werden müssen.

Durch die Entwicklung numerischer Verfahren ist es möglich geworden, Probleme mit allgemeinen Randbedingungen und unter Berücksichtigung allgemeinen Stoffverhaltens zu analysieren. Insbesondere hat die Methode der finiten Elemente (FEM) in der Bodenmechanik breite Anwendung gefunden, und zwar anfangs ausschließlich und auch heute noch überwiegend bei der Berechnung von statischen Problemen. Mit der Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze läßt sich damit der Übergang vom Verformungs- zum Bruchproblem innerhalb einer in sich geschlossenen Theorie darstellen, was gerade beim Boden wichtig ist, da dieser - im Gegensatz zu Metall - schon bei geringen Belastungen plastische Verformungsanteile aufweist.

Bindiger Boden wurde bis vor kurzem auch bei diesen nichtlinearen statischen Berechnungen ausschließlich als Einphasen-Kontinuum idealisiert, sowohl im Anfangszustand als auch in Endzustand.

Parallel zu der Entwicklung der Rechentechnik und der Stoffgesetze für nichtlineare statische Probleme wurden FEM-Lösungen für das zwischen den beiden genannten Zuständen liegende Konsolidationsproblem angegeben, wobei allerdings lange Zeit von linear elastischem Verhalten des Korngerüsts ausgegangen wurde. Erst in den letzten Jahren wurden einige Arbeiten veröffentlicht, bei denen ein allgemeines nichtlineares - z.T. auch viskoses - Stoffverhalten berücksichtigt wurde. Erst die Verwendung solcher Stoffgesetze in Verbindung mit der Konsolidationstheorie erlaubt es aber, das Verhalten von wassergesättigtem, bindigem Boden allgemein zu beschreiben. Es wird somit möglich, die zuvor erwähnten Teilaspekte alle mit einer in sich konsistenten Theorie abzudecken und Lösungen mit Hilfe von numerischen Verfahren, insbesondere der FEM, für allgemeine Fälle anzugeben.

Die Bedeutung des Begriffs Konsolidation ist in diesem Zusammenhang weiter zu sehen als im klassischen Sinn: Er umfaßt den gesamten Verformungsvorgang eines bindigen Bodens einschließlich der Phasen, in denen kein Porenwasser ausgepreßt wird. Der undrainierte Anfangszustand ist also als Sonderfall enthalten, und die je nach Bodenart mehr oder weniger relevanten "Sekundärerscheinungen" können durch ein entsprechendes rheologisches Modell für das Korngerüst eingeschlossen werden. Das Wesentliche hierbei ist, daß das Stoffgesetz als Beziehung zwischen den effektiven Spannungen und den Verzerrungen formuliert wird.

In der Literatur gibt es, gemessen an der Vielfalt der Veröffentlichungen über die Analyse zeitunabhängiger, nichtlinearer Probleme, recht wenige Beiträge zu der zuletzt genannten Thematik. Von diesen Arbeiten beschränken sich die meisten wiederum auf die Darstellung der verwendeten Theorie, der numerischen Rechenmethode und deren Ergebnisse selbst, so daß bis jetzt kaum vergleichende Untersuchungen zwischen Rechnung und Messung vorhanden sind.

In der vorliegenden Arbeit wird deswegen mit Bezug auf experimentelle Ergebnisse für den Fall eines voll wassergesättigten bindigen Bodens untersucht, inwieweit durch die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der Berechnung mehrdimensionaler Konsolidationsvorgänge zutreffendere Vorhersagen für das Verhalten des Bodens möglich sind. Die Auswahl der verwendeten Stoffgesetze bleibt dabei auf zeitunabhängige, nicht-viskose Formulierungen beschränkt: es soll je ein Stoffgesetz vom hypoelastischen und vom elastoplastischen Typ verwendet werden. Die numerische Lösung erfolgt mittels finiter Elemente im Raum und finiter Differenzen in der Zeit.

Zum Vergleich der numerischen Berechnungen mit Versuchen werden vor allem Lastplattenversuche herangezogen, die im Rahmen eines Forschungsprogramms am Stuttgarter Institut für Grundbau und Bodenmechanik vor einigen Jahren durchgeführt wurden. Es handelt sich dabei um jeweils mehrere Serien von last- und verschiebungsgesteuerten Druckversuchen mittels einer kreisförmigen Platte auf einem weichen Voralpenseeton, bei denen neben Setzungs- bzw. Druckkraft- auch Porenwasserdruckmessungen über die Zeit vorgenommen wurden.
Die Bestimmung der für die Nachrechnung erforderlichen Bodenparameter erfolgt mit Hilfe von in der Bodenmechanik gebräuchlichen Laborgeräten.

2. KONSOLIDATIONSTHEORIE FÜR WASSERGESÄTTIGTE BINDIGE BÖDEN

Im folgenden sollen zunächst in einem kurzen allgemeinen Überblick die wesentlichen Entwicklungen der Konsolidationstheorie erwähnt werden, ohne damit einen Anspruch auf Vollständigkeit zu verbinden; es wird vielmehr auf einige einschlägige Quellen verwiesen. Daran anschließend werden die innerhalb der Arbeit verwendeten Grundgleichungen angeschrieben und für das spätere numerische Lösungsverfahren aufbereitet. Hierbei soll weitgehend von Vereinfachungen, soweit sie im Rahmen der Aufgabenstellung zulässig sind, Gebrauch gemacht werden. So wird beispielsweise angenommen, daß die Konsolidation unter Eigengewicht abgeschlossen ist.
Die hier verwendete Theorie unterscheidet sich von der klassischen Biotschen Theorie durch die Einführung nichtlinearer Beziehungen zwischen effektiven Spannungen und Verzerrungen.

2.1 Überblick

Die Begründung der Konsolidationstheorie erfolgte durch TERZAGHI (1923). Von ihm wurde für das eindimensionale Problem die Differentialgleichung und die dazugehörige Lösung angegeben. Ausgehend von der Analogie zur Wärmeleitung nahm RENDULIC (1936) die Erweiterung auf mehrdimensionale Probleme vor. Physikalisch gesehen setzt diese Theorie allerdings voraus, daß sich die totalen Spannungen über die Zeit nicht ändern. Lösungen innerhalb dieser inkonsistenten - in der Literatur oft als "Pseudo-Theorie" bezeichneten - Theorie sind nur möglich, wenn als Anfangsbedingung eine Porenwasserdruckverteilung vorgegeben wird, die im allgemeinen Fall mit dem Verschiebungsfeld nicht verträglich ist. Die allgemein anerkannte dreidimensionale Konsolidationstheorie wurde von BIOT (1941 a) begründet. In dieser Theorie wird das Verformungsverhalten eines linear elastischen porösen Festkörpers mit der Sickerströmung des Wassers, für die das Darcysche Gesetz gilt, gekoppelt.

Geschlossene Lösungen für spezielle Randbedingungen wurden zunächst von BIOT selbst (BIOT 1941 b; BIOT/CLINGAN 1941), später vor allem von GIBSON u.a. (z.B. GIBSON/MCNAMEE 1957) angegeben. Die von HEINRICH und DESOYER (1955) aufgestellte Konsolidationstheorie unterscheidet sich durch die zusätzliche Berücksichtigung eines Auftriebsgliedes, das allerdings nur bei der Konsolidation unter Bodeneigengewicht von Bedeutung ist.

Eine Übersicht über die klassischen Konsolidationstheorien und entsprechende Lösungen wird von SCHIFFMANN/CHEN/JORDAN (1969) gegeben.

Eine Einordnung der Biotschen Theorie in die von GREEN u.a. (GREEN/NAGHDI 1965; GREEN/STEEL 1966) formulierte Gemischtheorie erfolgt durch KRAUSE (1975). Es wird gezeigt, daß die Biotsche Theorie für ein aus zwei inkompressiblen Phasen bestehendes Gemisch einen Sonderfall der Gemischtheorie darstellt, während die Erweiterung Biots auf endliche Kompressibilität im Widerspruch zu den Ergebnissen der Gemischtheorie steht, siehe hierzu auch RUNESSON (1978).

Die Konsolidationstheorie unter Zugrundelegung eines viskoelastischen Korngerüsts wurde ebenfalls von BIOT (1956) behandelt. Zahlreiche Hinweise auf die weiteren Entwicklungen in dieser Richtung finden sich in den Arbeiten von GARBSCH (1973) und ULRICH (1980), wo Lösungen für zweidimensionale Probleme unter Verwendung des sogenannten Poynting-Thomson-Modells angegeben werden.

Konsolidationstheorien mit nichtlinearen konstitutiven Gleichungen in Verbindung mit geschlossenen Lösungsverfahren wurden nur vereinzelt und für einfache (eindimensionale) Randwertprobleme angegeben, wie z.B. von DAVIS/RAYMOND (1965) und POSKITT (1969).

Die Berücksichtigung allgemeiner Nichtlinearitäten im Stoffgesetz wurde erst mit der Entwicklung entsprechender numerischer Verfahren möglich. Eine hyperbolische Spannungs-Verzerrungsbeziehung wird von LEWIS/ROBERTS/ZIENKIEWICZ (1976) herangezogen, sie wird allerdings nur auf das Oedometerproblem angewendet. Gleichzeitig wird hier der Einfluß eines von der Porenzahl abhängigen Durchlässigkeitsbeiwertes untersucht.

Eine allgemeine Darstellung von nichtlinearen Konsolidationstheorien findet sich in der Veröffentlichung von SZEFER (1977).

Die Berücksichtigung elastoplastischen bzw. elastisch-viskoplastischen Stoffverhaltens bei der Analyse mehrerer zweidimensionaler Konsolidationsprobleme erfolgt in der Arbeit von RUNESSON (1978).

In den Veröffentlichungen von AUBRY/HUJEUX (1979) und RICHTER (1979) werden ebenfalls nichtlineare Stoffgleichungen in Zusammenhang mit der Konsolidationstheorie betrachtet. Das gleiche gilt für SAGASETA/BALLESTER/SAINZ (1979), wobei hier allerdings der Anfangszustand vollkommen getrennt in totalen Spannungen behandelt wird.

Einige weitere Arbeiten, bei denen elastoplastische Stoffgesetze und z.T. auch viskoplastische Modelle verwendet werden, sind im Tagungsband der 4. Internationalen Konferenz über numerische Methoden in der Geomechanik (Edmonton) veröffentlicht: ADACHI et al. (1982), MAGNAN et al. (1982), MATSUI/ABE (1982) und SAINZ/SAGASETA (1982). In allen Fällen steht als Anwendungsbeispiel die schlaffe Streifenlast (Dammschüttung o.ä.) im Mittelpunkt, wobei ein Vergleich mit Meßergebnissen - allerdings nur Verformungsmessungen - nur bei MAGNAN et al. erfolgt.

2.2 Grundgleichungen der verwendeten Konsolidationstheorie

Die innerhalb der Arbeit verwendete Konsolidationstheorie soll auf folgenden Voraussetzungen beruhen:

- Der Boden ist voll wassergesättigt, d.h. es handelt sich um ein Zweiphasengemisch, bestehend aus Korngerüst und Porenwasser.
- Die das Korngerüst bildende Kornsubstanz und das Porenwasser sind inkompressibel.
- Die Deformationen des Korngerüstes sind klein (kleine Verzerrungen und kleine Verschiebungen).
- Die Porenwasserströmung ist laminar und folgt dem Darcyschen Filtergesetz.
- Das Material ist (zumindest bereichsweise) homogen und isotrop.
- Die Beziehung zwischen effektiven Spannungen und Verzerrungen ist nichtlinear; viskose Verformungsanteile werden nicht berücksichtigt (physikalische Nichtlinearität).
- Trägheitskräfte werden nicht berücksichtigt.

Ausgehend von diesen Annahmen lassen sich die Grundgleichungen wie folgt anschreiben, wobei die Darstellung in kartesischen Tensoren (Indexschreibweise) erfolgt.

2.2.1 Feldgleichungen

- Gleichgewicht

Es wird davon ausgegangen, daß die Konsolidation infolge eingeprägter Volumenkräfte (Eigengewicht des Bodens) abgeschlossen ist. Der Spannungszustand vor Aufbringen der äußeren Belastung ist somit für sich im Gleichgewicht und braucht hier nicht berücksichtigt zu werden. Die Gleichgewichtsbedingungen für das

Gemisch lauten dann:

$$\sigma_{ij,i} = 0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.2}$$

σ_{ij} sind hierbei die Komponenten des Tensors der totalen Spannungen.

- Prinzip der effektiven Spannungen

Eine Aufteilung in die im Korngerüst wirkenden effektiven Spannungen und die im Porenwasser wirkende Druckspannung erfolgt mit Hilfe des Prinzips der effektiven Spannungen, TERZAGHI (1923):

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij}\, p \tag{2.3}$$

wobei mit σ_{ij} die totalen, mit σ'_{ij} die effektiven Spannungen und mit p der Porenwasserüberdruck bezeichnet werden (δ_{ij}: Kronecker-Symbol).
Die Aufteilung nach (2.3) ist nicht zu verwechseln mit einer Aufteilung des Spannungstensors in einen Deviator- und einen Kugelanteil.

Sowohl die totalen als auch die Partialspannungen beziehen sich auf ein und dieselbe Schnittfläche des Gemisches, also nicht auf die anteilige Fläche der die jeweilige Kraft übertragenden Komponente.

Es ist zu bemerken, daß eine Aufteilung eines Spannungszustands in Partialspannungen statisch gesehen immer zulässig ist. Darüber hinaus geht man allerdings von der Hypothese aus, daß die effektiven Spannungen für die Verformungen und die Scherfestigkeit des Bodens verantwortlich sind und die - auch meßbaren - Porenwasserüberdrücke die Sickerströmung verursachen.

Für wassergesättigte bindige Böden mit nicht allzu geringem Porenanteil ist dieses Konzept als gesichert anzusehen.

- Kinematik

Bei kleinen Deformationen lauten die Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.4}$$

- Stoffgesetz für das Korngerüst

Es sollen verschiedene Spannungs-Verzerrungsgleichungen verwendet werden. Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten nichtlinearen Stoffgleichungen sind in einem separaten Abschnitt (Abschn. 3) ausführlich dargestellt, und zwar in dem Punkt, wo die Modifizierung eines vorhandenen Ansatzes vorgenommen wird.

Für linear elastisches Verhalten gilt

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

oder $$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\,\sigma'_{kl}$$

wobei E_{ijkl} bzw. C_{ijkl} Konstanten sind (allgemeines Hookesches Gesetz).

Da die nichtlinearen Stoffgleichungen in differentieller Form vorliegen, soll auch das lineare Stoffgesetz in Geschwindigkeiten (Raten) angeschrieben werden. Bei allgemeinen nichtlinearen Stoffgesetzen muß die Spannungsgeschwindigkeit besonders definiert werden, s. BEDNARCZYK (1968):

$$\dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{2.5a}$$

Es sei hier bemerkt, daß der Parameter Zeit nur formalen Charakter hat, solange die Gleichungen homogen in der Zeit sind. Anstelle der Zeitableitungen könnten auch Ableitungen nach einer beliebigen anderen monoton wachsenden Funktion eingesetzt werden. Im Gegensatz dazu handelt es sich bei den in Gleichungen für viskose Stoffe vorkommenden Zeitableitungen um echte Geschwindigkeiten.

Bei der Verwendung eines elastoplastischen Stoffgesetzes läßt sich die Beziehung zwischen den Spannungs- und den Verzerrungsgeschwindigkeiten angeben mit

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{2.5b}$$

wobei D_{ijkl} den "tangentialen" Stofftensor (auch oft mit $\underset{\sim}{D}_t$ bezeichnet) darstellt und bei dem hier gewählten Gesetz vom gesamten effektiven Spannungszustand und der volumetrischen plastischen Dehnung als Verfestigungsparameter abhängen soll, SCHAD (1979), d.h. $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}\,(\underset{\sim}{\sigma}', \varepsilon_v^{pl})$.

Für einen hypoelastischen Stoff gilt ebenfalls

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

wobei $\underset{\sim}{D}$ definitionsgemäß vom gesamten effektiven Spannungszustand abhängt, also

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}\,(\sigma').$$

Das Stoffgesetz soll im Hinblick auf das numerische Lösungsverfahren in einer etwas anderen Form verwendet werden, s. Abschn. 3.2, Gl. (3.19):

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D^{*}_{ijkl}(\sigma')(\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{*}_{kl}) \tag{2.5c}$$

D^{*}_{ijkl} kann hier als "inkrementeller Hookescher" Stofftensor betrachtet werden (abhängig von den variablen Moduln G und K) und ε^{*}_{kl} als Verzerrungsrate infolge Dilatanz.

Als allgemeine Gleichung, die alle drei Fälle enthält, wird im folgenden

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\,(\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{o}_{kl}) \tag{2.5d}$$

verwendet. $\dot{\varepsilon}^{o}_{kl}$ ist dabei als allgemeiner Fall einer Anfangsverzerrungsrate zu verstehen, wie sie sich beispielsweise auch infolge einer Temperaturänderung ergeben kann. ε^{o}_{kl} ist bei den beiden erstgenannten Stoffgesetzen (Gl.2.5 a und 2.5 b) gleich Null, beim hypoelastischen Stoffgesetz (Gl. 2.5 c) ist $\varepsilon^{o}_{kl} = \varepsilon^{*}_{kl}$.

- Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung für das Gemisch besagt, daß die volumetrische Verformungsrate des Korngerüstes gleich der ausströmenden Flüssigkeitsmenge sein muß

$$\dot{\varepsilon}_{ii} + v_{i,i} = 0 \tag{2.6}$$

$\underset{\sim}{v}$ stellt hier die Filtergeschwindigkeit dar, die, ähnlich wie die Spannungen, als statistische Mittelbildung bezüglich einer von beiden Bestandteilen eingenommenen Kontrollfläche zu verstehen ist. Wegen der Annahme kleiner Verfor-

mungsraten braucht zwischen der Strömungsgeschwindigkeit relativ zum Korngerüst und der absoluten Strömungsgeschwindigkeit (gegenüber einem festen Bezugssystem) nicht unterschieden zu werden.

- Filtergesetz

Das Darcysche Filtergesetz lautet bei Isotropie

$$v_i = - k\, h_{,i},$$

wobei h die Druckhöhe und k der Durchlässigkeitskoeffizient sind. Wegen der Linearität dieses Stoffgesetzes genügt es, nur die Porenwasserüberdrücke, die sich gegenüber einem auskonsolidierten Ausgangszustand einstellen, zu betrachten. Es gilt dann:

$$v_i = - \frac{k}{\gamma_w}\, p_{,i} \tag{2.7}$$

(γ_w: Wichte des Wassers)

Zur vollständigen Beschreibung des physikalischen Sachverhalts sind neben den Feldgleichungen noch die Rand- und Anfangsbedingungen anzugeben.

2.2.2 Randbedingungen

Es wird unterschieden zwischen Verschiebungs- und Spannungsrandbedingung einerseits sowie zwischen Porenwasserüberdruck- und Abflußrandbedingung andererseits.

- Verschiebungsrandbedingung

$$u_i = \hat{u}_i \qquad \text{auf } S_{ui} \tag{2.8}$$

- Spannungsrandbedingung

Diese bezieht sich auf totale Spannungen. Es gilt

$$\sigma_{ij}\, n_j = \hat{t}_i \qquad \text{auf } S_{ti} \tag{2.9}$$

- Porenwasserüberdruck-Randbedingung

$$p = \hat{p} \qquad \text{auf } S_p \tag{2.10}$$

- Abfluß-Randbedingung

$$v_i n_i = \hat{q} \qquad \text{auf } S_q \tag{2.11}$$

Die Teilrandbereiche S_{ui} und S_{ti} dürfen definitionsgemäß nicht überlappen und ergeben (für jede Komponente i) zusammen die gesamte Oberfläche S, das gleiche gilt für S_p und S_q. Dabei ist zu bemerken, daß die erstgenannten Ränder von den letzteren unabhängig sein können.

Die mathematischen Bezeichnungen lauten für (2.8) und (2.10) Dirichletsche und für (2.9) und (1.11) Neumannsche Randbedingung. Allgemeinere Fälle wie gemischte Randbedingungen (gesuchte Funktion und deren Ableitung sind miteinander verknüpft) werden hier nicht betrachtet.

2.2.3 Anfangsbedingungen

Wie oben schon erwähnt, soll von einem konsolidierten Zustand ausgegangen werden. Die Verschiebungen und Porenwasserdrücke beziehen sich auf diesen Ausgangszustand und sind somit vor Aufbringen der Zusatzlast gleich Null. Wegen der Spannungsabhängigkeit im Stoffgesetz müssen die (effektiven) Gesamtspannungen betrachtet werden, der Zustand vor Belastung soll deshalb als verformungsloser Eigenspannungszustand erhalten bleiben.

Vor Aufbringen der Last gilt:

$$u_i \quad (t=0^-) = 0 \tag{2.12a}$$

$$p \quad (t=0^-) = 0 \tag{2.12b}$$

$$\sigma'_{ij} \quad (t=0^-) = \sigma'^{0}_{ij} \tag{2.12c}$$

Nach dem plötzlichen Aufbringen einer Last (eines Lastinkrementes) wird sich ein neuer Spannungs- und Verformungszustand unter Berücksichtigung der in 2.2.1

und 2.2.2 angegebenen Feld- und Randgleichungen einstellen. Allerdings muß die Bedingung, daß zum Zeitpunkt $t=0^+$ noch kein Porenwasser abgeströmt ist und somit keine volumetrische Formänderung stattgefunden hat, berücksichtigt werden.

Anstelle der Gleichung (2.6) tritt daher für $t=0^+$ die Anfangsbedingung

$$\varepsilon_{ii} \quad (t=0^+) = 0 \tag{2.13}$$

Diese Aussage stellt eine Inkompressibilitätsbedingung bei $t=0^+$ für das Gemisch dar. Die Beschreibung des zeitunabhängigen Anfangsproblems ergibt sich damit vollkommen analog zu der Formulierung für ein inkompressibles Einphasen-Medium.

Auf die Behandlung des Anfangsproblems in Zusammenhang mit der numerischen Lösung wird im Abschnitt 4 noch einmal eingegangen.

2.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die im vorangehenden Abschnitt angegebenen Gleichungen reichen zur Beschreibung eines bestimmten Konsolidationsproblems aus. Im Hinblick auf das numerische Lösungsverfahren (s. Abschn. 4) ist es aber notwendig, die zuvor getroffenen lokalen (differentiellen) Aussagen durch entsprechende globale (integrale) Ausdrükke zu ersetzen.

Hierzu kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

a. Man benutzt keine zusätzlichen physikalischen Aussagen und behandelt die angegebenen Differentialgleichungen rein mathematisch mit Hilfe von Variationsverfahren.

b. Man ersetzt einen Teil der differentiellen Beziehungen direkt durch einen mit Hilfe von Energiemethoden gewonnenen gleichwertigen Arbeitsausdruck.

Für das Konsolidationsproblem gab Sandhu als erster ein Variationsprinzip an (SANDHU, 1968; SANDHU/WILSON, 1969). Ein erweitertes Variationsprinzip wurde von YOKOO/YAMAGATA/NAGAOKA (1971) abgeleitet. Die Ableitung der Prinzipe der virtuellen Arbeit für Gemische findet sich bei KRAUSE (1975 b). Eine erweiterte und damit allgemeinere Darstellung der Variationsverfahren für Konsolidationsprobleme wurde von SANDHU (1976) angegeben.

Im folgenden sollen, in Anlehnung an die Arbeit von Krause, die Gleichungen für die virtuellen Arbeiten gemäß (b) direkt verwendet werden. Geht man davon aus, daß es sich bei den Verschiebungen und den Porenwasserüberdrücken um zwei voneinander unabhängige Feldgrößen handelt, muß man statt der Gleichgewichtsbedingung (Gl. 2.1) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und statt der Kontinuitätsbedingung (Gl. 2.6) das Prinzip der virtuellen Kräfte (Drücke) anschreiben.

2.3.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Bei diesem Prinzip geht man von einem gedachten (virtuellen) Verschiebungszustand δu_i aus, der dem tatsächlichen, sich im Gleichgewicht befindlichen Verschiebungszustand zum Zeitpunkt t überlagert wird. Dieser virtuelle Verschiebungszustand muß verträglich sein mit den kinematischen Randbedingungen der untersuchten Struktur, d.h. an den Rändern S_{ui} mit vorgeschriebenen Verschiebungsbedingungen (Gl. 2.8) ist $\delta u_i = 0$.

Das Prinzip besagt, daß dann die Summe der Arbeiten der äußeren und der inneren Kräfte gleich Null sein muß:

$$\delta A_a(t) + \delta A_i(t) = 0 \tag{2.14}$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist für den Fall, daß nur Oberflächenspannungen gemäß Gleichung (2.9) aufgebracht werden,

$$\delta A_a(t) = \int_{S_{ti}} \hat{t}_i(\underset{\sim}{x},t)\ \delta u_i(\underset{\sim}{x})\ dS, \tag{2.15}$$

die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist

$$\delta A_i(t) = -\int_V \sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t)\ \delta\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x})\ dV. \tag{2.16}$$

Die beiden Arbeitsausdrücke enthalten eine Verknüpfung von totalen Spannungen mit Verschiebungsgrößen des Korngerüstes. Bei korrekter Betrachtungsweise muß zunächst von einer getrennten Kinematik und den entsprechenden Spannungsgrößen unter Einbeziehung der zwischen beiden Phasen wirkenden Austauschkraft ausgegangen werden. Nach einer Umformung ergeben sich dann die angeschriebenen Terme (s. z.B. KRAUSE, 1975 b). Zum selben Ergebnis kommt man, wenn nur die Festkörperphase betrachtet und die Interaktionskraft (Porenwasserdruckgradient) als äußere Kraft eingeführt wird, wie z.B. von ZIENKIEWICZ (1971). Als Zwischenschritt ist allerdings eine Umformung mit dem Gaußschen Integralsatz erforderlich.

(2.15) und (2.16) in (2.14) eingesetzt ergibt:

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int_{S_{ti}} \hat{t}_i \delta u_i\, dS = 0 \tag{2.17}$$

Unter der Voraussetzung, daß σ_{ij} und t_i bezüglich der Zeit stetig und differenzierbar sind, kann Gleichung (2.17) auch in Geschwindigkeiten angeschrieben werden:

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int_{S_{ti}} \dot{\hat{t}}_i \delta u_i\, dS = 0 \tag{2.18}$$

Anstelle der Gleichgewichtsbedingungen (2.1) und (2.2) sowie der Randgleichung (2.9) wird also im folgenden dieser äquivalente Arbeitsausdruck verwendet.

2.3.2 Prinzip der virtuellen Kräfte (Drücke)

In einer dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen analogen Weise geht man hier von einem gedachten (virtuellen) Druckzustand δp aus, der dem tatsächlichen Druckzustand, der die Kontinuitätsbedingung erfüllt, zum Zeitpunkt t überlagert wird. Dieser virtuelle Zustand muß verträglich sein mit den statischen Randbedingungen des Systems, d.h. an den Rändern S_p mit vorgeschriebenen Porenwasserüberdruck-Randbedingungen (2.10) ist $\delta p = 0$.
Die vom virtuellen Druck im Innern durch die Volumenänderung der Flüssigkeit und die am Abflußrand geleistete Arbeit müssen zusammen Null ergeben, es gilt:

$$\delta A_a^*(t) + \delta A_i^*(t) = 0 \tag{2.19}$$

Die virtuelle Arbeit soll hier, um den Unterschied zu (2.14) zu verdeutlichen, mit einem * gekennzeichnet werden. δA^* wird in der Literatur auch als virtuelle Komplementärarbeit bezeichnet; δA und δA^* sind hier jedoch zwei voneinander unabhängige Arbeitsgrößen.

Die Arbeit des virtuellen Druckes am äußeren Rand ist gegeben durch:

$$\delta A_a^*(t) = \int_{S_q} (\hat{q}(\underset{\sim}{x},t) - v_i(\underset{\sim}{x},t)n_i(\underset{\sim}{x}))\, dt\, \delta p(\underset{\sim}{x})\, dS \tag{2.20}$$

und die virtuelle innere Arbeit:

$$\delta A_i^*(t) = \int_V (v_{i,i}(\underset{\sim}{x},t) + q(\underset{\sim}{x},t))\, dt\, \delta p(\underset{\sim}{x})\, dV \tag{2.21}$$

wobei $q(\underset{\sim}{x},t)$ eine innere Quelle darstellt.

Wenn man die volumetrische Formänderung des Korngerüstes als einzige innere Quelle ansieht, ist

$$q(\underset{\sim}{x},t) = \dot{\varepsilon}_{ii}(\underset{\sim}{x},t)$$

und somit

$$\delta A_i^*(t) = \int_V (v_{i,i}(\underset{\sim}{x},t) + \dot{\varepsilon}_{ii}(\underset{\sim}{x},t))\, dt\, \delta p(\underset{\sim}{x})\, dV \tag{2.22}$$

(2.20) und (2.22) in (2.19) eingesetzt ergibt:

$$\int_V (v_{i,i} + \dot{\varepsilon}_{ii})\, dt\, \delta p\, dV + \int_{S_q} (\hat{q} - v_i n_i)\, dt\, \delta p\, dS = 0 \tag{2.23}$$

Differentiation nach der Zeit ergibt dann:

$$\int_V (v_{i,i} + \dot{\varepsilon}_{ii})\, \delta p\, dV + \int_{S_q} (\hat{q} - v_i n_i)\, \delta p\, dS = 0 \tag{2.24}$$

Dieser Arbeitsausdruck wird somit im weiteren anstelle der Kontinuitätsgleichung (2.6) und der Randbedingung (2.11) verwendet. Für die weitere Behandlung ist es zweckmäßig, den 1. Term in Gleichung (2.14) noch umzuformen. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes erhält man:

$$-\int_V v_i \delta p_{,i}\, dV + \oint_S v_i n_i\, \delta p\, dS + \int_V \dot{\varepsilon}_{ii} \delta p\, dV + \int_{S_q} (\hat{q} - v_i n_i)\, \delta p\, dS = 0 \tag{2.25}$$

Voraussetzungsgemäß ist auf S_p $\delta p = 0$, so daß sich das zweite Integral nur über S_q erstreckt. Der Ausdruck vereinfacht sich somit zu:

$$-\int_V v_i \delta p_{,i}\, dV + \int_V \dot{\varepsilon}_{ii} \delta p\, dV + \int_{S_q} \hat{q}\, \delta p\, dS = 0 \tag{2.26}$$

2.3.3 Ausgangsgleichungen für das numerische Lösungsverfahren

In die oben angegebenen, aus den Prinzipen der virtuellen Arbeit abgeleiteten Ausdrücke müssen nun die noch nicht verwendeten bzw. nicht ersetzten Informationen des Abschnitts 2.2 eingearbeitet werden. In Gleichung (2.18) werden die totalen Spannungen durch die effektiven Spannungen und den Porenwasserüberdruck unter Verwendung von (2.3) ersetzt:

$$\int_V \dot{\sigma}'_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int_V \delta_{ij}\dot{p}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int_{S_{ti}} \dot{\hat{t}}_i \delta u_i\, dS = 0$$

Mit den Gleichungen für die Kinematik (2.4) und für die Spannungs-Verzerrungsbeziehung (2.5) - hier als allgemeiner Fall Gl. (2.5 d) - ergibt sich:

$$\int_V \delta u_{i,j} D_{ijkl} \dot{u}_{k,l}\, dV - \int_V \delta u_{i,j} D_{ijkl} \dot{\varepsilon}^{o}_{kl}\, dV - \int_V \delta u_{i,j} \delta_{ij} \dot{p}\, dV - \int_{S_{ti}} \delta u_i \dot{\hat{t}}_i\, dS = 0 \quad (2.27)$$

Die Gleichungen für die Kinematik (2.4) und das Darcysche Gesetz (2.7) in (2.26) eingesetzt ergibt:

$$\int_V \frac{k}{\gamma_w} \delta p_{,i} p_{,i}\, dV + \int_V \delta p\, \dot{u}_{i,i}\, dV + \int_{S_q} \delta p\, \hat{q}\, dS = 0 \quad (2.28)$$

Diese beiden Gleichungen sind die Ausgangsgleichungen für das im Abschnitt 4 beschriebene numerische Verfahren.

Es ist zu erwähnen, daß der hier eingeschlagene Weg mit Verschiebungen und Porenwasserüberdrücken als unabhängige Feldgrößen nur eine von vielen Möglichkeiten darstellt. In einem Bericht von SANDHU (1976) werden weitere Lösungsmöglichkeiten mit Hilfe gemischter Ansätze, beispielsweise mit Verschiebungen, Spannungen, Porenwasserdrücken und Strömungsgeschwindigkeiten als primäre Unbekannte aufgezeigt, von denen bis jetzt allerdings nur wenige realisiert worden sind, siehe hierzu z.B. AUBRY/HUJEUX (1979) und CIVIDINI/GIODA (1982). Die Vorteile der daraus abgeleiteten Lösungsalgorithmen liegen angeblich in der höheren Genauigkeit, insbesondere bezüglich der Spannungen. Als Nachteil ist allerdings der größere numerische Aufwand zu sehen. Die Fragen zur numerischen Stabilität und zum Auftreten von Singularitäten in Verbindung mit speziellen Ansatzfunktionen bleiben weitgehend ungeklärt.

3. STOFFGESETZE FÜR DAS KORNGERÜST

Unter dem Begriff Stoffgesetz ist hier das mathematische Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den effektiven Spannungen und den Verzerrungen des Korngerüsts zu verstehen.

Ein Überblick über die heute in der Bodenmechanik gebräuchlichen Stoffgesetze wird von GUDEHUS (1980) gegeben. Die Stoffgesetze lassen sich in die Kategorien Elastizität, Plastizität und Viskosität einordnen. Viskose, d.h. geschwindigkeitsabhängige Modelle sollen innerhalb der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet werden. Diese Stoffgesetze sind in allgemeiner Form noch wenig entwickelt, und selbst bei speziellen Ansätzen kann die Parameterbestimmung bereits große Schwierigkeiten mit sich bringen, s. GUSSMANN (1979).

Das geschwindigkeitsabhängige Verhalten des Bodens wird hier ausschließlich über die gekoppelte Porenwasserströmung berücksichtigt, die in diesem Abschnitt nicht behandelt wird.

Die Möglichkeiten, wie die physikalische Nichtlinearität von nichtviskosen Böden beschrieben werden kann, sind in der Arbeit von SCHAD (1979) ausführlich dargestellt. In dieser Arbeit werden dann auch zwei Stoffgesetze vorgeschlagen, die sich im Zusammenhang mit der numerischen Berechnung von statischen, zeitunabhängigen Problemen als brauchbar erwiesen haben. Von diesen Formulierungen soll im weiteren bei der Untersuchung des Einflusses des nichtlinearen Materialverhaltens auf die Konsolidationsanalyse ausgegangen werden. Es handelt sich zum einen um ein einfaches hypoelastisches und zum andern um ein elastoplastisches Stoffgesetz.

Am Anfang der Entwicklung der nichtlinearen Stoffgesetze für Böden standen einfache hypoelastische Formulierungen im Vordergrund, die meist auf einer Variation der Hookeschen Moduln in inkrementeller Form basierten. Als es zunächst darum ging, klassische Spannungs-Verformungsprobleme der Bodenmechanik mittels numerischer Berechnungen zu lösen, erhielt man unter Verwendung dieser Stoffgesetze i.a. durchaus zutreffende Ergebnisse.

Bei den neueren Entwicklungen handelt es sich weitgehend um elastoplastische Formulierungen, da man mit diesem Konzept das Spannungs-Verformungsverhalten des Bodens allgemeiner beschreiben zu können glaubt. Dies gilt vor allem für

Probleme mit Belastungsumkehr und zyklischer Beanspruchung, siehe z.B. LADE (1979), VERMEER (1980) und MROZ/NORRIS/ZIENKIEWICZ (1979).

Eine vergleichende Untersuchung von MROZ (1980) zeigt, daß differentielle Stoffgesetze der elastoplastischen und der hypoelastischen Klasse für monotone Belastungsvorgänge einander äquivalent sind, während sich bei (wiederholten) Ent- und Wiederbelastungsvorgängen wesentliche Unterschiede ergeben.

In der Grundbaupraxis finden die eingangs genannten nichtlinearen Gesetze breite Anwendung.

Das in Grundbau und Bodenmechanik bisher am häufigsten angewandte nichtlineare Stoffgesetz ist das von DUNCAN/CHANG (1970), das von GUDEHUS (1980) als "pseudoelastisch" bezeichnet wird.

Die ursprüngliche Formulierung geht von einer hyperbolischen Abhängigkeit zwischen ε_a und $\sigma_a-\sigma_r$ im Dreiaxialversuch aus, woraus sich ein mit der Spannung variabler Elastizitätsmodul (Tangentenmodul) ableiten läßt. Die Querkontraktionszahl wird hierbei als konstant angenommen. Die damit verbundene Aussage, daß mit zunehmender Scherbeanspruchung auch die Kompressionsfestigkeit verlorengeht, ist für Böden nicht gerechtfertigt. Richtiger ist dagegen, das Scherverhalten über den Schubmodul und das volumetrische Verhalten über den Kompressionsmodul getrennt zu erfassen.

Ein entsprechender Ansatz, bei dem die hyperbolische Funktion von Duncan/Chang übernommen wurde, ist beispielsweise bei LAUMANS (1977) zu finden; auch von SCHAD (1979) wurde u.a. für Vergleichsrechnungen diese modifizierte Duncan/Chang-Form benutzt.

3.1 Hypoelastisches Stoffgesetz

3.1.1 Stoffgesetz von Schad

Das von SCHAD (1979) vorgeschlagene hypoelastische Stoffgesetz wurde mit Hilfe von spannungsabhängigen Schub- und Kompressionsmoduln direkt formuliert. Es hat gegenüber den verschiedenen Duncan/Chang-Versionen den Vorteil, daß es - zumindest bei monotoner Belastung - keine Unstetigkeit aufweist.

Die Spannungs-Verzerrungsbeziehung lautet:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}(K - \frac{2}{3}G)\,\dot{\varepsilon}_{kk} \tag{3.1}$$

$$\text{mit} \quad G = G_o - \alpha_G(\sigma'_1 + \sigma'_3) - \beta_G(\sigma'_1 - \sigma'_3) \tag{3.2a}$$

$$\text{und} \quad K = K_o - \alpha_K\,\sigma'_m \tag{3.2b}$$

für Erstbelastung.
Das Coulombsche Bruchkriterium ist implizit enthalten. Für Ent- und Wiederbelastung werden G und K konstant gesetzt:
$G = G_{UR}$ und $K = K_{UR}$ (UR = unloading/reloading).

Bei der numerischen Integration dieser Stoffgleichungen geht man i.a. davon aus, daß die Spannung während eines Inkrementes konstant bleibt, d.h. es ergibt sich eine lineare Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungsinkrement wie beim Hookeschen Gesetz. Stoffgesetze dieser Art werden daher auch oft als "inkrementell Hookesche Gesetze" bezeichnet.

Der Vorteil besteht darin, daß sie in dieser Form besonders einfach in ein FE-Programm implementiert werden können. Ein Nachteil ist darin zu sehen, daß die deviatorische Spannungsänderung und die Volumenänderung voneinander getrennt sind, d.h. die Erscheinung der Dilatanz kann damit nicht erfaßt werden.

Der Einfluß des Dilatanzverhaltens des Bodens ist je nach Problemstellung unterschiedlich. SCHAD (1979) stellt fest, daß bei "viel äußerem Zwang", also starker Einschränkung des Verformungsverhaltens durch kinematische Randbedingungen, die Größe des Dilatanzwinkels (er bezieht sich auf ein elastoplastisches Stoffgesetz) von entscheidender Bedeutung ist.

Dies muß sinngemäß auch für innere Zwänge gelten, wie sie bei wassergesättigten bindigen Böden gegeben sind: Da das Porenwasser die volumetrische Verformung behindert, entstehen Porenwasserüberdrücke, die von der reinen hydrostatischen Spannungsänderung meist sehr stark abweichen.

Sowohl mit dem oben angegebenen hypoelastischen Ansatz als auch mit anderen "inkrementell Hookeschen" Gesetzen - also auch Duncan/Chang - erfolgt somit

eine starke Fehleinschätzung der Porenwasserdrücke im undrainierten Zustand und während der Konsolidation, reine Kompressionszustände ausgenommen.
Zur Veranschaulichung soll ein undrainierter Standard-Dreiaxialversuch (CU) betrachtet werden (wegen der Bezeichnungen s.a. Bild 5.6).
Aus Gleichung (3.1) folgt für das Kompressionsverhalten:

$$-\frac{\dot{\sigma}'_a + 2\,\dot{\sigma}'_r}{3} = K\dot{\varepsilon}_v \qquad (3.3)$$

Da die Probe nicht entwässert wird, gilt

$$\dot{\varepsilon}_v = 0$$

und somit

$$\dot{\sigma}'_a + 2\dot{\sigma}'_r = 0$$

Mit Hilfe des Prinzips der effektiven Spannungen (2.3) folgt

$$\dot{\sigma}_a - \dot{p} + 2\,(\dot{\sigma}_r - \dot{p}) = 0$$

bzw. wegen $\dot{\sigma}_r = 0$

$$\dot{p} = \frac{1}{3}\,\dot{\sigma}_a \qquad (3.4)$$

Stellt man den zugehörigen effektiven Spannungsweg im s'-t'-Diagramm dar, Bild 3.1, ergibt sich die gestrichelt eingezeichnete Gerade mit der Steigung 3:1. Zum Vergleich ist eine gemessene Versuchsspur (punktiert) eingetragen, wie sie für eine normalkonsolidierten weichen Ton typisch ist.

Es zeigt sich deutlich, daß die Porenwasserdruckentwicklung mit der Verwendung eines Stoffgesetzes, das Gleichung (3.1) genügt, stark unterschätzt wird. Die direkte Auswirkung auf die Vorhersage von Verformungen und Bruchlasten ist offensichtlich.

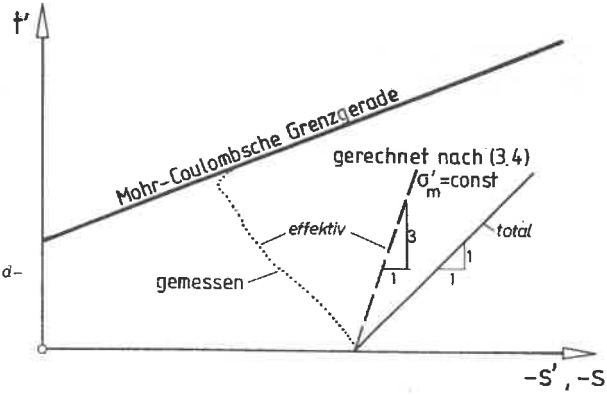


Bild 3.1:

Spannungswege beim Standard-Dreiaxialversuch (CU)

3.1.2 Berücksichtigung der Dilatanz

Die Tatsache, daß körnige Medien bei reiner Scherbeanspruchung Volumenveränderungen zeigen, wurde bereits von REYNOLDS (1885) erkannt. Diese als Dilatanz bezeichnete Eigenschaft wurde von ihm mit Hilfe von Kugelmodellen erklärt. Eine Quantifizierung des Dilatanzverhaltens erfolgte mit der Einführung des Dilatanzwinkels durch BENT HANSEN (1958) und durch die von ROWE (1962) entwickelte "stress-dilatancy"-Theorie. Beide Konzepte beziehen sich auf plastische Grenzzustände in körnigen Medien und stellen Fließregeln im Sinne der Plastizitätstheorie dar.

Wegen der überwiegenden Anwendung dieser Theorien auf Probleme mit Sand versteht man unter Dilatanz i.a. eine Volumenauflockerung infolge Scherens. Für das gegenteilige Verhalten wird oft der Begriff "Kontraktanz" verwendet. Im folgenden soll die Bezeichnung Dilatanz als Oberbegriff aufgefaßt werden, die Art der Volumenveränderung soll durch das Vorzeichen an entsprechender Stelle geregelt werden.

Ein erster Versuch, die Auswirkung der Dilatanz bindiger Böden - wie sie in Bild 3.1 durch die Abweichung der gemessenen effektiven Versuchsspur von der "theoretischen Linie" dargestellt ist - quantitativ zu erfassen, ist der Ansatz von SKEMPTON (1954). Er beschreibt den Porenwasserüberdruck auf Grund von Messungen an undrainierten Dreiaxialversuchen als Funktion der t o t a l e n Spannungen.

Für voll wassergesättigte Böden lautet diese Formel:

$$\Delta p = - \Delta\sigma_1 - A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \tag{3.5}$$

Eine allgemeinere Formulierung unter Berücksichtigung des Einflusses der mittleren Hauptspannung σ_2 wurde von HENKEL (1960) angegeben:

$$\Delta p = - \Delta\sigma_{oct} + \alpha\Delta\tau_{oct} \tag{3.6}$$

Weitere Ansätze dieser Art gehen davon aus, daß die Faktoren A bzw. α keine Bodenkonstanten sind, siehe hierzu THAMM (1974) sowie FRANKE/SCHUPPENER (1978). Es sei bemerkt, daß die Wiedergabe eines bestimmten Meßergebnisses in dieser Form für sich kein Stoffgesetz darstellt; ein Porenwasserdruckansatz kann allenfalls als Teil eines Stoffgesetzes interpretiert werden.

Wie bereits im vorigen Abschnitt angedeutet wurde, kann die genannte Erscheinung aber auch über ein Stoffgesetz, also eine Beziehung zwischen e f f e k t i v e n Spannungen und Verzerrungen, berücksichtigt werden, wenn dieses im Ansatz die Dilatanz enthält.

Dieses Vorgehen scheint zweckmäßiger: Es können nicht nur die Porenwasserdrücke im undrainierten Zustands erfaßt werden, sondern es können auch Volumenverformungen erklärt werden, die bei reiner Scherbeanspruchung unter drainierten Bedingungen gemessen werden (HORN, 1964). Zustände zwischen den beiden extremen Bedingungen können im Rahmen der Konsolidationstheorie unter Verwendung eines so an ein Stoffgesetz angekoppelten Porenwasserdruckzustands widerspruchsfrei beschrieben werden.

In der Bodenmechanik gibt es einige Ansätze, welche die Dilatanz in einfacher Form berücksichtigen. Sie sind durch Erweiterung von "inkrementell Hookeschen Gesetzen" um einen entsprechenden Dilantanzanteil entstanden.

LAUMANS (1977) verwendet beispielsweise den hyperbolischen Ansatz nach Duncan/Chang für einen variablen Schubmodul und führt für Spannungszustände unterhalb der Mohr-Coulombschen Fließgrenze einen spannungsabhängigen Dilatanzwinkel ein. RICHTER (1979) geht ebenfalls vom Duncan/Chang-Ansatz aus und superponiert eine Dilatanzfunktion, die von der zweiten Invarianten des Verzerrungs-Deviators abhängig ist. Eine ähnliche Erweiterung des Hookeschen Gesetzes wird von VERRUIJT (1977) vorgeschlagen.
Ein Teil des Stoffverhaltens wird hierbei nicht direkt über eine Spannungs-Verzerrungsbeziehung formuliert, sondern über kinematische Zwangsbedingungen impliziert. Dies ist prinzipiell nicht falsch, es ist allerdings nicht korrekt, wenn dabei die aus dem Hookeschen Gesetz abgeleiteten Beziehungen zwischen den (variablen) Verformungsmoduln - z.B. $G = E/2(1+\nu)$ - nach wie vor verwendet werden.

Geht man vom Konzept der Hypoelastizität aus, ist es naheliegend, den Dilantanzanteil direkt in die Spannungs-Verzerrungsbeziehung mit einzubeziehen. Bei einem hypoelastischen Gesetz ist die Spannungsgeschwindigkeit eine Funktion der Verzerrungsgeschwindigkeit und der Spannungen selbst. Es gilt allgemein:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}(\underset{\sim}{\sigma}')\ \dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (3.7)$$

Um auf eine einfache Form zu kommen, soll der Ansatz von SCHAD (1979) so erwei-

tert werden, daß zum einen die Anschaulichkeit der gewählten Funktionen und Parameter erhalten bleibt und zum andern möglichst wenige zusätzliche und einfach zu bestimmende Stoffparameter eingeführt werden müssen.

Die in (3.1) und (3.2) bereits angegebene Spannungs-Verzerrungsbeziehung kann in einen reinen Gestaltsänderungs- und in einen Kompressionsanteil aufgeteilt werden.

Für die deviatorischen Anteile gilt:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{D} = 2\,G\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{D} \tag{3.8}$$

Dieser Zusammenhang soll beibehalten werden, wobei auf die Abhängigkeit des Schubmoduls G vom Spannungszustand im nächsten Abschnitt (Abschn. 3.1.3) noch eingegangen wird.

Für die volumetrischen Anteile gilt:

$$\dot{\sigma}'_m = K\dot{\varepsilon}_v \tag{3.9}$$

oder

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{\dot{\sigma}'_m}{K} \tag{3.10}$$

mit $K(\sigma')$ nach (3.2b).

Mit diesem Teil des Stoffgesetzes lassen sich reine Kompressionsversuche gut beschreiben. In integrierter Form ist der Erstbelastungsast für den Sonderfall $K_0 = 0$, Gl. (3.2 b), identisch mit der bekannten, von TERZAGHI (1925) für den Oedometer entwickelten linearen Beziehung zwischen der Porenzahl und dem Logarithmus der Spannung $e = e_1 - \lambda_c \ln(\sigma'_m/\sigma'_{m1})$. Der allgemeinere Ansatz mit $K_o \neq 0$ hat den Vorteil, daß bei kleinen Spannungen nicht nur das Verhalten des Bodens besser wiedergegeben wird, sondern daß damit auch eventuelle numerische Schwierigkeiten bei $K = 0$ oder $K \approx 0$ umgangen werden.

Bei einer aus einem isotropen und einem deviatorischen Spannungsanteil zusammengesetzten Beanspruchung wird das volumetrische Dehnungsverhalten allerdings nur ungenügend erfaßt. Wegen der Dilatanz soll daher Gleichung (3.10) um einen zusätzlichen Term, der von der Änderung der Schubspannung abhängt, erweitert werden.

REINER (1968) behandelt die Dilatanz als "allgemeine Eigenschaft" und schlägt für den "Reynolds'schen elastischen Körper" folgende Formel vor:

$$e_v = -\frac{p}{\varkappa} + \frac{\tau^2}{\delta}$$

Das entspricht mit den hier verwendeten Bezeichnungen der Aussage:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_m'}{K} - \frac{\sigma_{ij}^2}{\delta}$$

Der Parameter δ wird Dilatanzmodul genannt. Das Quadrat der Spannungen wird damit begründet, daß das Vorzeichen, also ob Schubspannung "von links" oder "von rechts", keinen Einfluß auf das Vorzeichen der Volumenänderung haben dürfe. Um welche Schubspannungskomponente es sich dabei handelt, wird nicht angegeben.

Wegen der Voraussetzung isotropen Stoffverhaltens muß diese Schubspannung durch ein invariantes Maß für die Schubbeanspruchung ersetzt werden. Hierfür soll die Oktaeder-Schubspannung τ_{oct} verwendet werden, die vorzeichen-unabhängig ist. Deswegen kann der Zusammenhang zwischen Spannung, Spannungsänderung und Änderung der volumetrischen Dehnung damit wie folgt beschrieben werden:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}_m'}{K} - \frac{\dot{\tau}_{oct}}{M} \qquad (3.11)$$

wobei M einen Dilatanzmodul darstellt, der im allgemeinen Fall spannungsabhängig sein kann.

Da das Stoffgesetz insbesondere auf normalkonsolidierte bindige Böden angewandt werden soll, wurde in (3.11) das Vorzeichen so gewählt, daß sich bei positivem M eine Volumenverringerung ("Kontraktanz") ergibt.

Um zu einem zutreffenden Ansatz für den Dilatanzmodul M zu kommen, ist es zweckmäßig, Versuche auszuwerten, bei denen rein deviatorische Spannungszustände aufgebracht und die Volumendehnungen gemessen werden. Die Bedingung muß sein, daß die mittlere effektive Normalspannung σ_m' konstant ist und die Probe dabei vollkommen drainiert wird.

Die Durchführung solcher Versuche ist bei bindigen Böden recht schwierig und zeitraubend, und zwar um so mehr, je geringer die Durchlässigkeit des Bodens ist. In der Literatur ist demnach auch wenig über solche Untersuchungen zu finden.

In der Arbeit von HORN (1964) werden u.a. drainierte Scherversuche mit $\sigma_m' =$ const beschrieben. Die von ihm für einen Schluffboden gewonnenen Ergebnisse sind in Bild 3.2 in einer etwas geänderten Form aufgetragen.

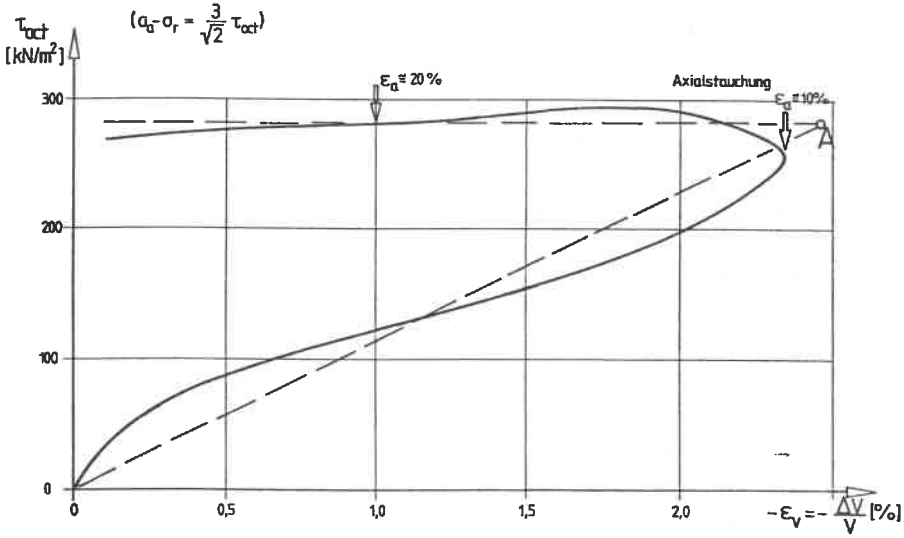


Bild 3.2: Drainierter Dreiaxialversuch mit σ_m' = const, nach Horn (1964)

Die Versuchskurve zeigt, daß das Volumen von Anfang der Scherbelastung an allmählich abnimmt, bis etwa 90% der maximalen Last erreicht sind. Der weitere Verlauf zeigt dann eine starke Volumenzunmahme, die mit sehr großen Gestaltsänderungen verbunden ist. In erster Näherung kann man den Kurvenverlauf durch eine bilineare Funktion in der in Bild 3.2 gestrichelt eingezeichneten Form ersetzen. Der Bruchzustand, der i.a. durch die maximal aufnehmbare Schubspannung gekennzeichnet ist, wird dann durch den Schnittpunkt A der beiden Geraden festgelegt. Mit der Steigung der Geraden zwischen dem Koordinatenursprung und Punkt A ergibt sich dann ein konstanter Dilantanzmodul M. Das Auflockerungsverhalten im Bruchzustand ("nach" Punkt A) kann vom Ansatz her nicht mehr erfaßt werden, da diese Dilatanz nur noch von den Verzerrungen abhängt. Diese sind allerdings in einer Größenordnung, die im Rahmen der getroffenen Annahmen (geometrische Linearität, s. Abschn. 2.2) nicht erfaßt werden können.

Da es bei bindigen Böden wesentlich einfacher ist, die Dilatanz indirekt über undrainierte Scherversuche zu bestimmen, soll im folgenden der Zusammenhang zwischen Porenwasserüberdruck und Dilatanz für den gewählten Ansatz aufgezeigt werden.

Aus Gleichung (3.11) folgt für einen undrainierten Versuch wegen $\dot{\varepsilon}_v = 0$:

$$\frac{\dot{\sigma}'_m}{K} = \frac{\dot{\tau}_{oct}}{M}$$

Mit dem Prinzip der effektiven Spannungen, Gl. (2.3), folgt

$$\dot{\sigma}_m + \dot{p} = \frac{K}{M}\,\dot{\tau}_{oct}$$

oder

$$\dot{p} = -\dot{\sigma}_m + \frac{K}{M}\,\dot{\tau}_{oct} \tag{3.12}$$

Für den Fall K/M = const ist dieser Ausdruck identisch mit dem Ansatz von HENKEL (1960), s. Gl. (3.6).

Für die Randbedingungen des Dreiaxialversuches gilt speziell:

$$\dot{\sigma}_m = -\frac{\dot{\sigma}_a + 2\dot{\sigma}_r}{3}$$

und

$$\dot{\tau}_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,(\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r)\ ,$$

und man erhält damit für den Porenwasserüberdruck

$$\dot{p} = \dot{\sigma}_r + \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{K}{M}\right)(\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r)\ , \tag{3.13}$$

was der Gleichung von SKEMPTON (1954), Gl. (3.5), entspräche, wenn

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{K}{M} = A = \text{const}$$

angenommen würde.

Die den Porenwasserdruckparametern α bzw. A entsprechenden Ausdrücke sind tatsächlich konstant, solange der Boden eine positive Dilatanz (Volumenverringerung) im Sinne von Gleichung (3.11) aufweist. Denn die mittlere effektive Normalspannung σ'_m wird dann bei einer Änderung der totalen Spannung immer abnehmen, was eine Entlastung bezüglich des Kompressionsverhaltens bedeutet, und dies ergibt voraussetzungsgemäß einen konstanten Kompressionsmodul K bzw. mit M = const einen konstanten Quotienten K/M.

Übertragen auf das in Bild 3.1 dargestellte Diagramm heißt das, daß diese Aussage für Böden gilt, deren effektive Versuchsspur "links" von der gestrichelten Linie (σ_m' = const) liegt. Bei normal- und bei nicht allzu stark überkonsolidierten Böden trifft dies i.a. zu. Der vorgeschlagene Ansatz für die Dilatanz führt also auf den klassischen Porenwasserdruckansatz von Henkel (der für Dreiaxial-Verhältnisse dem Skempton-Ansatz äquivalent ist). Es ist somit möglich, den effektiven Spannungsweg eines CU-Versuches im s'-t'-Diagramm durch eine Gerade beliebiger Neigung darzustellen, oder anders ausgedrückt: Der in Bild 3.1 eingetragene "nach (3.4) gerechnete" Spannungsweg kann durch entsprechende Wahl des Dilatanzmoduls in die Richtung der gemessenen, punktiert eingezeichneten Versuchsspur "gedreht" werden. Von dem aufgezeigten Zusammenhang wird bei der Parameterbestimmung, s. Abschn. 5.1, noch Gebrauch gemacht werden.

Die bisher getroffenen Aussagen über das Dilatanzverhalten gelten nur für deviatorische Belastung. Um das Stoffgesetz vollständig anzugeben, muß noch das Verhalten bei Ent- und Wiederbelastung beschrieben werden, wenn dieses auch bei den in dieser Arbeit untersuchten Problemen von untergeordneter Bedeutung ist. Denn eine globale Belastung schließt im allgemeinen Fall nicht aus, daß es lokal (zeitweise) zu Ent- bzw. Wiederbelastungen kommen kann.

Das Porenwasserdruckverhalten in undrainierten Versuchen zeigt, daß die Dilatanz bei Ent- und Wiederbelastung nicht stark in Erscheinung tritt und daher hier mit guter Näherung vernachlässigt werden kann.

Für $\dot{\tau}_{oct} < 0$ oder $\dot{\tau}_{oct} > 0$ und $\tau_{oct} < \tau_{oct,max}$

gilt dann $M = \infty$

Eine i.a. nur in der Definition der Entlastung etwas abweichende Aussage wird auch bei den elastoplastischen Stoffgesetzen impliziert.

3.1.3 Spannungsabhängigkeit des Schubmoduls

Als Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten des Spannungs- und des Verzerrungsdeviators soll nach wie vor Gleichung (3.8) gelten, wobei

$$G = G(\underset{\sim}{\sigma}')$$

ist.

Die von SCHAD (1979) vorgeschlagene Abhängigkeit des Schubmoduls G vom Spannungszustand bei Erstbelastung ist durch Gl. (3.2 a) gegeben. Das Coulombsche Bruchkriterium ist hierin implizit enthalten. Die Stoffkonstanten G_o, α_G und β_G sind daher von den Scherparametern φ' und c' abhängig.

Da diese Größen dem Ingenieur geläufiger sind und sie bei der Versuchsauswertung routinemäßig bestimmt werden, erscheint es zweckmäßig, die Spannungsabhängigkeit von G mit Hilfe von φ', c' und einem dritten unabhängigen Stoffparameter anzuschreiben. Nach einer Umformung und der Einführung der Scherzahl S nach SMOLTCZYK (1967) bzw. SCHAD (1979), siehe Anhang 3.1, erhält man anstelle der Gleichung (3.2 a)

$$G = \alpha_G \, (1-S) \, (2c'\cot\varphi' - (\sigma'_1 + \sigma'_3))$$

oder

$$G = 2\,\alpha_G (1-S)\,(\bar{c}' - s') \qquad (3.14)$$

mit

$$\bar{c}' = c'\cot\varphi'$$

Zu dem Ansatz in dieser Form könnte man durchaus auch direkt kommen, indem man G als Produkt einer Konstanten, eines Faktors für den Deviator-Einfluß und des Abstandes des Spannungspunktes von der Spitze der Mohr-Coulombschen Fließfläche anschreibt, siehe Bild 3.3.

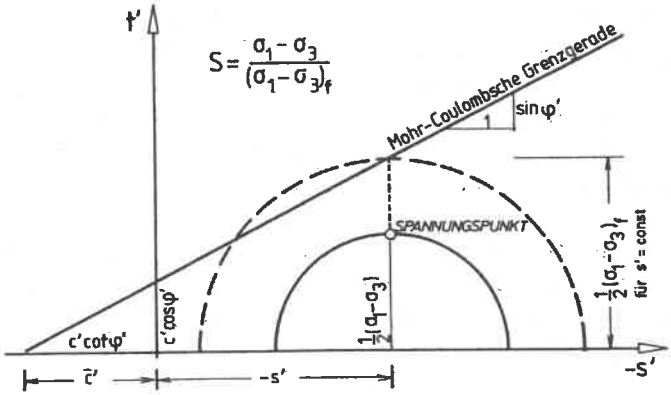


Bild 3.3: Zur Definition der Scherzahl S

Die Definition der Scherzahl ist hier

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \qquad \text{mit } \sigma_1' + \sigma_3' = \text{const}$$

bzw.

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{-(\sigma_1' + \sigma_3') \sin\varphi' + 2c'\cos\varphi'} = \frac{t'}{(\bar{c}' - s') \sin\varphi'}$$

Andere Definitionen der Scherzahl, welche die reziproke lokale Sicherheit darstellt, wären denkbar. Beispielsweise führt die bekannte Felleniusregel auf eine etwas andere Definition, siehe hierzu GUSSMANN (1980).

Im folgenden soll nun der Frage nachgegangen werden, ob mit dem oben angegebenen Ansatz für den Schubmodul das Scherverformungsverhalten des Bodens genügend genau beschrieben werden kann. Von SCHAD (1979) wird eine solche Untersuchung nur anhand des Oedometerversuchs durchgeführt. Da bei diesem die Scherzahl nahezu konstant ist, kann ein Teil des Ansatzes für G nicht überprüft werden: Statt (1-S) könnte eine andere, beliebige Funktion von S dieselben Ergebnisse liefern. Weiterhin ist nachteilig, daß die Einflüsse der drei Parameter α_G, K_o und α_K gekoppelt sind. So kann durch geschickte Wahl verschiedener Parameterkombinationen die Last-Setzungskurve des Oedometerversuchs jeweils etwa gleich gut angenähert werden.

Für die Untersuchung des Scherverformungsverhaltens bietet sich wiederum der konsolidierte, undrainierte (CU-) Dreiaxialversuch an. Dazu soll die $\{(\sigma_a-\sigma_r)-\varepsilon_a\}$-Linie des Standard-CU-Versuchs (σ_r = const), der an Proben des Konstanzer Seetons durchgeführt wurde, nachgerechnet werden. Zuvor werden φ' und c' durch Auswertung der effektiven Spannungswege dreier Proben wie üblich ermittelt; K_{UR}/M wird hier so bestimmt, daß der eine nachzurechnende Versuch optimal approximiert wird, siehe Bild 3.4 a.

Es verbleibt dann als einziger freier Parameter α_G. In Bild 3.4 b ist nun die für σ_r = 100 kN/m^2 gemessene Versuchsspur im $(\sigma_a-\sigma_r)-\varepsilon_a$-Diagramm dargestellt, und im Vergleich dazu sind für verschiedene Werte von α_G gerechnete Kurven eingetragen (Nachrechnung siehe Anhang 3.2).

Die Variation zeigt, daß kein Wert α_G gefunden werden kann, für den die nachgerechnete Kurve mit der gemessenen im gesamten Verlauf übereinstimmen würde.

Eine Verbesserung läßt sich beispielsweise dadurch erzielen, daß in Gleichung (3.2 c) statt (1-S) der Faktor $(1-S)^n$ verwendet wird. Für den Exponenten n = 2

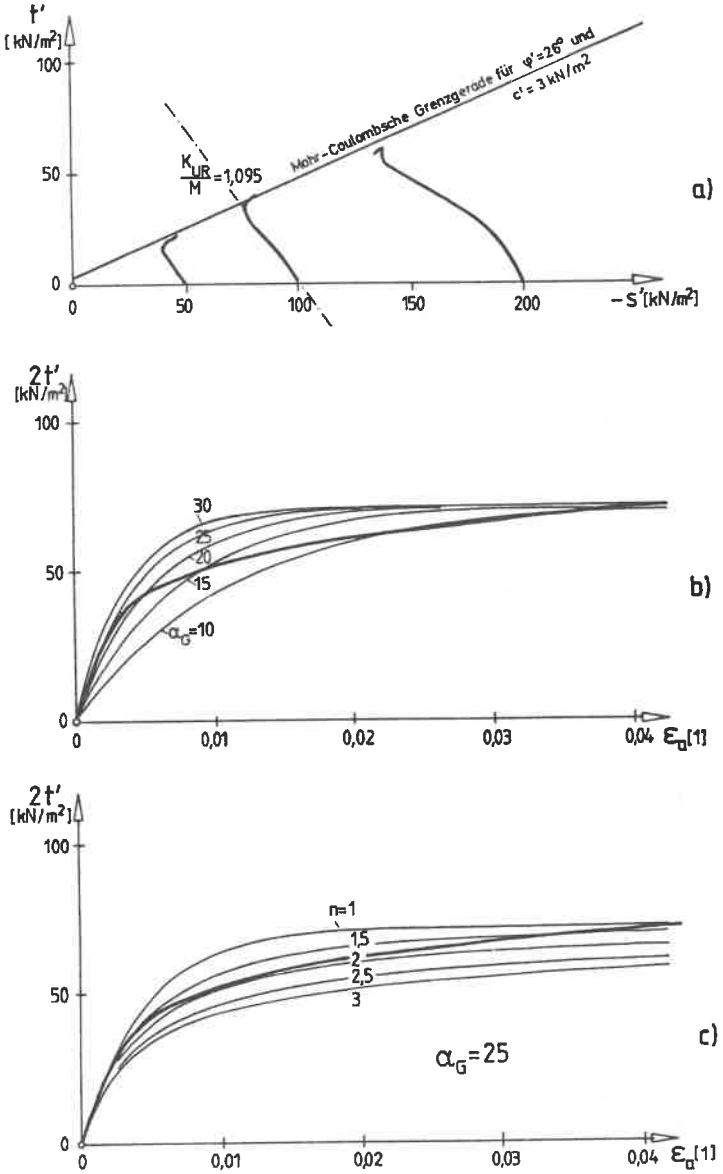


Bild 3.4: CU-Versuch mit Konstanzer Seeton
a) effektive Spannungswege
b) Vergleich Versuch-Nachrechnung mit dem Stoffgesetz von Schad für verschiedene α_G
c) Vergleich Versuch-Nachrechnung für verschiedene Exponenten n (α_G = 25)

hätte man dann einen Ansatz, der formal dem von DUNCAN/CHANG (1970) verwendeten und auf KONDNER (1963) zurückgehenden Ansatz entspricht.

Da der Exponment n die Anfangssteigung der $(\sigma_a-\sigma_r)-\varepsilon_a$-Linie nicht beeinflußt (für S = 0 ist $(1-S)^n$ immer 1), kann aufgrund Bild 3.4 b der Parameter α_G mit $\alpha_G = 25$ festgelegt werden.

In Bild 3.4 c werden dann für verschiedene n nachgerechnete Kurven mit der gemessenen verglichen. Es zeigt sich, daß hier für $n \approx 1{,}8$ eine wesentlich bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch erzielt werden kann. Gleiche Untersuchungen bei anderen Seitendrücken zeigen allerdings, daß der Exponent nicht ganz unabhängig von σ_r ist, und zwar nimmt n mit wachsendem σ_r zu: Während sich bei den CU-Versuchen unter $\sigma_r = 200$ kN/m^2 ein Exponent von $n \approx 2{,}8$ als zutreffend erweist, ist bei $\sigma_r = 50$ kN/m^2 mit $n \approx 1$ gute Übereinstimmung zu erzielen.

Für das im Rahmen der vorliegenden Arbeit anzuwendende hypoelastische Stoffgesetz wird nun folgendes vorgeschlagen:

Da bei dem zentralen Problem des Lastplattenversuchs auf dem Konstanzer Seeton relativ kleine Seitenspannungen maßgebend sind, soll hier mit dem Exponenten $n = 1$ gearbeitet werden. Es soll aber im Ansatz (einschließlich dessen Programmierung) vorgesehen werden, auch $n \neq 1$ zu verwenden, so daß dann n dem jeweiligen Spannungsniveau des zu untersuchenden Problems angepaßt werden kann.

Es ergibt sich dadurch eine gegenüber (3.2 c) allgemeinere Form der Gleichung für den Schubmodul:

$$G = 2\alpha_G(1-S)^n\,(\bar{c}'-s') \qquad (3.15)$$

Die Einfachheit des Ansatzes von SCHAD (1979) wird dabei - u.a. im Hinblick auf die Bestimmung der Stoffparameter - prinzipiell nicht aufgegeben.

3.1.4 Zusammenfassung der Stoffgleichungen, Aufbereitung für die numerische Lösung

Die Stoffgleichungen der beiden vorangehenden Abschnitte sollen nun zusammengefaßt werden.

Die Geschwindigkeit des Verzerrungstensors ergibt sich zu

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\dot{\varepsilon}_v + \dot{\varepsilon}^D_{ij}$$

und mit den Gleichungen (3.8) und (3.11) erhält man

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\left(\frac{\dot{\sigma}'_m}{K} - \frac{\dot{\tau}_{oct}}{M}\right) + \frac{\dot{\sigma}^D_{ij}}{2G} \qquad (3.16)$$

Die Funktionen K, M und G sind spannungsabhängig und werden zur Veranschaulichung Kompressions-, Dilatanz- und Schubmodul genannt.

In Tafel 3.1 sind sämtliche Gleichungen dieser Funktionen für die verschiedenen Belastungsarten sowie die dafür notwendigen Stoffparameter zusammengestellt.

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\left(\frac{\dot{\sigma}'_m}{K} - \frac{\dot{\tau}_{oct}}{M}\right) + \frac{\dot{\sigma}^D_{ij}}{2G}} \qquad (3.16)$$

Erstbelastung ($\dot{\sigma} \geq 0,\ \sigma = \sigma_{max}$)	Ent- und Wiederbelastung ($\dot{\sigma} < 0$ oder $\dot{\sigma} > 0,\ \sigma < \sigma_{max}$)	Belastungskriterium Spannungsgröße: σ
$K = K_o - \alpha_K \sigma'_m$	$K = K_{UR} = \text{const}$	$-\dot{\sigma}'_m$
$M = M_o = \text{const}$	$M = \infty$	τ_{oct}
$G = 2\alpha_G(1-S)^n\ (\bar{c}'-s')$ mit $S = t'/((\bar{c}'-s')\sin\varphi')$, $\bar{c}' = c'\cot\varphi'$	$G = G_{UR} = \text{const}$	$\sigma_1 - \sigma_3$

Stoffparameter: K_o, α_K, K_{UR}, M_o, φ', c', α_G, n, G_{UR}

Tafel 3.1: Zusammenstellung der Gleichungen des hypoelastischen Stoffgesetzes

Um das Stoffgesetz in eine der Gleichung (3.7) entsprechenden Form zu bringen, werden die in Gleichung (3.16) vorkommenden zeitlichen Ableitungen $\dot{\sigma}'_m$, $\dot{\tau}_{oct}$ und $\dot{\sigma}^D_{ij}$ durch die kartesischen Spannungskomponenten und deren zeitlichen Ableitungen ausgedrückt. Durch Anwendung der Kettenregel

$$\dot{f}(\underset{\sim}{\sigma}') = \frac{\partial f(\underset{\sim}{\sigma}')}{\partial \sigma'_{ij}}\,\dot{\sigma}'_{ij}$$

auf die einzelnen Terme kommt man zu

$$\dot{\sigma}'_m = \frac{1}{3}\,\dot{\sigma}'_{kk}\ ,$$

$$\dot{\sigma}^D_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\dot{\sigma}_{kk} \qquad \text{und}$$

$$\dot{\tau}_{oct} = \frac{\sigma^D_{ij}}{3\tau_{oct}}\,\dot{\sigma}'_{ij} \qquad \text{(siehe Anhang 3.3)}$$

Setzt man diese Größen in (3.16) ein, ergibt sich

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}(\underset{\sim}{\sigma}')\,\dot{\sigma}'_{kl} \tag{3.17}$$

Durch Inversion erhält man

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}(\underset{\sim}{\sigma}')\,\dot{\varepsilon}'_{kl} \tag{3.18}$$

womit der Definition (3.7) eines hypoelastischen Körpers entsprochen wird.

Zur Darstellung von D_{ijkl} soll kurz auf die Matrizenschreibweise übergegangen werden. (3.18) lautet dann

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

mit $\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}]^T$

und $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}]^T$

$\mathbf{D}$ ergibt sich dann zu

$$D = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^D}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^D}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^D}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}} \\ K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^D}{\tau_{oct}} & K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^D}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^D}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}} \\ K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^D}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^D}{\tau_{oct}} & K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^D}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}} \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

oder

$$D = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}\left(\sigma_{xx}^D, \sigma_{yy}^D, \sigma_{zz}^D, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\right) \cdot \frac{2}{3}\frac{K}{M}\frac{G}{\tau_{oct}}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$$

Der gewählte Ansatz führt also zu einer nichtsymmetrischen Stoffmatrix. Dies bedeutet in Verbindung mit der numerischen Lösung eine wesentliche Vergrößerung des Rechenaufwands (Speicherplatz und Rechenzeit) gegenüber Berechnungen mit symmetrischen Stoffmatrizen.

Weiter ist festzustellen, daß die in **D** enthaltenen Terme σ^D_{ij}/τ_{oct} unter Umständen auf unbestimmte Ausdrücke der Form 0/0 führen können, für die keine eindeutigen Grenzwerte existieren.

In Zusammenhang mit dem in Abschnitt 4 beschriebenen numerischen Verfahren soll deswegen die Stoffgleichung in einer anderen Form verwendet werden.
Aus Gleichung (3.16) folgt

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\dot{\sigma}'_m}{K} + \frac{\dot{\sigma}^D_{ij}}{2G} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\dot{\tau}_{oct}}{M}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C^*_{ijkl}\,\dot{\sigma}'_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\dot{\tau}_{oct}}{M}$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C^{*-1}_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\varepsilon}^*_{kl})$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D^*_{ijkl}\,(\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\varepsilon}^*_{kl}) \qquad (3.19)$$

D^*_{ijkl} ist hierbei der "inkrementelle Hookesche" Stofftensor, d.h.

$$D^*_{ijkl} = f\,(K(\underset{\sim}{\sigma}'),G(\underset{\sim}{\sigma}'))$$

$\dot{\varepsilon}_{kl}{}^*$ stellt einen "Anfangsverzerrungstensor" dar. Er kann formal gleich behandelt werden wie beispielsweise eine Temperaturdehnung.

$$\dot{\varepsilon}^*_{kl} = f\,(\dot{\underset{\sim}{\sigma}}',\underset{\sim}{\sigma}') = \frac{1}{3}\delta_{kl}\frac{\dot{\tau}_{oct}}{M} \qquad (3.20)$$

σ' und σ' sollen in dieser Gleichung als bekannt gelten und im Rahmen der inkrementellen/iterativen Berechnung vorangehenden Rechenschritten entnommen werden, siehe hierzu Abschn. 4.

3.2 Elastoplastisches Stoffgesetz

Neben dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen hypoelastischen Ansatz soll im Zusammenhang mit der numerischen Konsolidationsanalyse auch ein elastoplastisches Stoffgesetz verwendet werden. Hierzu wird auf das von SCHAD (1979) vorgeschlagene Modell ELPL2 zurückgegriffen. Da dieses unverändert übernommen wird, sollen hier nur einige wesentliche Merkmale kurz erläutert werden.

Bei diesem Stoffgesetz handelt es sich um ein sogenanntes Kappenmodell, das auf der von Roscoe u.a., s. z.B. ROSCOE/BURLAND (1968), begründeten und von ZIENKIEWICZ/NAYLOR (1971) für die FE-Methode aufbereitete Cam-Clay-Theorie basiert. Die Beschreibung der Fließfläche in der hydrostatischen Ebene (p-q-Ebene) erfolgt für den unterkritischen (nassen) Bereich durch eine Ellipse, die im Gegensatz zum Modell "Modified Cam-Clay" nicht unbedingt durch den Koordinatenursprung gehen muß. Durch die Einführung eines zusätzlichen Parameters können so Versuche, die von THAMM (1974) an Konstanzer Seeton durchgeführt wurden, besser beschrieben werden. Im überkritischen (trockenen) Bereich wird die Fließkurve durch das Mohr-Coulombsche Kriterium (Gerade) festgelegt.

Die Darstellung der Fließbedingung in der Deviatorebene ergibt eine nicht rotationssymmetrische, wegen der Isotropie jedoch dreifach punktsymmetrische stetige Kurve, die das Mohr-Coulombsche Sechseck umschließt. Die in ebenen Scherversuchen und in sogenannten wahren Dreiaxialversuchen ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$) wiederholt festgestellten Abweichungen von diesem Sechseck können damit zutreffend erfaßt werden. Die Fließregel wird dadurch festgelegt, daß im Kappenbereich die Normalitätsbedingung gilt (assoziierte Fließregel). Für den Kegelbereich wird in der Deviatorebene ebenfalls Normalität vorausgesetzt; in der hydrostatischen Ebene ist eine nicht assoziierte Fließregel vorgesehen: Die Neigung des plastischen Potentials wird durch einen Dilatanzwinkel ψ beschrieben ($\psi \neq \varphi'$: nichtassoziierte Fließregel).

Das Verfestigungsgesetz enthält wie die Cam-Clay-Theorie die plastischen Volumendehnung als Härtungsparameter (isotrope Verfestigung).

Auf eine Wiedergabe der komplexen Formeln des Stoffgesetzes wird hier verzichtet; eine Zusammenstellung der Gleichungen für Fließfläche, plastisches Potential und Verfestigungsgesetz ist in der Arbeit von SCHAD (1979) auf Seite 78 (bzw. 136 f.) zu finden. Die Aufbereitung für das numerische Rechenverfahren, d.h. Berechnung der plastischen Verzerrungsinkremente bzw. der tangentialen Materialmatrix, ist dort auf Seite 50 zusammengestellt.

4. NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN

4.1 Allgemeines

Als numerische Verfahren zur Lösung des Konsolidationsproblems kamen zunächst die Differenzenverfahren in Frage. Ihr Einsatz erfolgte überwiegend in Verbindung mit der sogenannten Pseudo-Konsolidationstheorie, da, wegen der Analogie zum Wärmeleitungs-(Diffusions-)Problem, entsprechende Algorithmen aus anderen Ingenieurbereichen direkt übernommen werden konnten. Auf die Unzulänglichkeiten dieser Theorie wurde bereits in Abschnitt 2.1 hingewiesen.

Auf das Differenzenverfahren wird in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen; als Anwendungsbeispiele seien die umfangreichen Untersuchungen von DAVIS/POULOS (1972) (u.a. Erstellung von Diagrammen für praxisrelevante Probleme) und die Veröffentlichung von KOPPULA/MORGENSTERN (1972) genannt.

Mit dem von SANDHU (1968) angegebenen Variationsprinzip für das Konsolidationsproblem war es möglich, die Methode der finiten Elemente (FEM) als numerisches Lösungsverfahren einzusetzen, siehe auch SANDHU/WILSON (1969). In diesen Arbeiten werden für die räumliche Diskretisierung des ebenen Falles Dreieckelemente mit quadratischem Verschiebungs- und linearem Porenwasserdruckansatz verwendet. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt durch lineare Interpolation, woraus ein dem Crank-Nicolson-Verfahren entsprechendes Rekursionsschema resultiert.

In den in der Folgezeit veröffentlichten Arbeiten wird zum größten Teil auf Sandhus Variationsprinzip zurückgegriffen, wobei sich die einzelnen Lösungen durch verschiedene räumliche Ansatzfunktionen bzw. Zeitintegrationen unterscheiden.

So verwenden HWANG/MORGENSTERN/MURRAY (1971) für die räumliche Diskretisierung dieselben Elemente wie Sandhu, für die Zeitintegration wird eine logarithmische Interpolationsfunktion zugrunde gelegt. Das daraus resultierende Zeitschrittverfahren arbeitet mit variablen Zeitschritten.

Das von GHABOUSSI/WILSON (1973) verwendete Viereckelement hat an den Eckknoten Verschiebungs- und Porenwasserdruckfreiheitsgrade (linearer Ansatz; für Verschiebungen zusätzliche lokale Freiheitsgrade, die eliminiert werden).

VALLIAPPAN/LEE/BOONLUALOHR (1974) führen ihre Berechnungen mit isoparametrischen Viereckelementen durch, Verschiebungs- und Porenwasserdruckansatz sind quadratisch.

DESAI/JOHNSON (1972, 1973) geben FEM-Lösungen für den eindimensionalen Fall an. Freiheitsgrade sind hier nur Porenwasserdrücke. Es werden verschiedene Ansätze untersucht und Differenzenverfahren gegenübergestellt.

Eine ähnliche Untersuchung führt KRAUSE (1975 a) durch, wobei er zusätzlich Übergangsbedingungen berücksichtigt und somit die bei Desai/Johnson für geschichtete Böden sich ergebenden Widersprüche ausräumt.

Bei BOOKER/SMALL (1975) erfolgt die räumliche Diskretisierung durch Dreieckelemente mit linearem Ansatz sowohl für Verschiebungen als auch für den Porenwasserdruck. Die Zeitintegration wird zum einen "geschlossen" mittels Laplace-Transformation vorgenommen, wobei im Bildraum ein Eigenwertproblem zu lösen ist, zum anderen werden verschiedene Zeitschrittverfahren untersucht. Für die Zeitschrittverfahren wird ein Stabilitätskriterium angegeben.

KRAUSE (1975 b) verwendet die Dreieckelemente nach SANDHU (1969), die zeitliche Interpolation erfolgt linear. Die durch Elemination der Verschiebungen bzw. Porenwasserdrücke in den finiten Gleichungen sich ergebenden Druck- bzw. Verschiebungsmethoden werden als Alternativen zur gemischten Methode (simultane Auflösung nach allen Unbekannten) dargestellt und bezüglich ihrer Effektivität miteinander verglichen. RUNESSON (1978) führt die räumliche Diskretisierung mit Viereckelementen durch, bei denen Verschiebungen quadratisch und der Porenwasserdruck linear interpoliert werden. Zur Zeitintegration werden ein modifiziertes Runge-Kutta-Verfahren ("W-Methode") und eine sogenannte θ-Methode (Crank-Nicolson für $\theta = 1/2$) herangezogen. In Zusammenhang mit der stofflichen Nichtlinearität wird eine Iteration innerhalb jedes Zeitschritts durchgeführt.

AUBRY/HUJEUX (1979) gehen von einem erweiterten Variationsprinzip aus und verwenden ein Element, bei dem zusätzlich konstante Spannungen bereichsweise angesetzt werden. Neben dem üblichen simultanen Lösungsverfahren wird ein Algorithmus vorgestellt, bei dem die Iteration für die stoffliche Nichtlinearität (elastoplastisches Stoffgesetz) und die Zeitintegration entkoppelt sind.

CIVIDINI (1981) entwickelt sogenannte Gleichgewichtselemente mit totalen Span-

nungen und Porenwasserdrücken als Freiheitsgrade und führt Vergleichsrechnungen mit der Sandhuschen Methode ("Kompatible Elemente")durch (s.a. CIVIDINI/GIODA, 1982).

Die Methode von ZIENKIEWICZ (1971) beruht darauf, daß in das als Gleichgewichtsbedingung verwendete Prinzip der virtuellen Verschiebungen der Porenwasserdruckgradient als äußere Kraft eingeht; die Kontinuitätsgleichung wird mit der Methode der gewichteten Residuen behandelt. Es ergeben sich - allerdings nur formal - dieselben Gleichungen wie nach Sandhus Methode. (Erst die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf die Gleichgewichtsbedingung würde identische Gleichungen liefern.) In der Veröffentlichung ZIENKIEWICZ/NAYLOR (1971) wird dann der Porenwasserdruck als innere Spannung behandelt, woraus dieselben finiten Gleichungen wie nach Sandhu resultieren.

Von einigen daran anknüpfenden Veröffentlichungen ist noch LEWIS/ROBERTS/ZIENKIEWICZ (1976) zu nennen. Hier werden für eine nichtlineare Analyse (hyperbolische Spannungs-Verzerrungsbeziehung, variable Durchlässigkeit) isoparametrische Viereckelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet; die Zeitintegration erfolgt sowohl nach dem Crank-Nicolson-Verfahren als auch mit einem 3-Punkte-Algorithmus.

Offensichtlich unabhängig von ZIENKIEWICZ (1971) zeigt HOLZLÖHNER (1971) einen ähnlichen Lösungsweg für das Konsolidationsproblem bei viskoelastischem Stoffverhalten auf. Verschiebungen und Porenwasserdrücke werden linear interpoliert. Die Elimination der Porenwasserdrücke entspricht der Verschiebungsmethode, wie sie später von KRAUSE (1975) verwendet wird. Für die Zeitintegration wird neben einem Rekursionsschema nach Crank-Nicolson eine Lösung mittels Laplace-Transformation vorgeschlagen.

Eine andere Methode zur Lösung des Konsolidationsproblems mit der FEM ist die von CHRISTIAN/BOEHMER (1970). Unter der Annahme inkompressiblen Stoffverhaltens erhält man mit dem gemischten Ansatz von CHRISTIAN (1968) eine Lösung für die Verschiebungen und Porenwasserüberdrücke im Anfangszustand. Davon ausgehend werden in einem Zeitschrittverfahren wechselweise das Diffusions-(Sickerströmungs-) Problem mit den Porenwasserüberdrücken und das elastostatische Problem mit den Volumenänderungen als Eingangsgrößen entkoppelt gelöst. Das Verfahren wird auf einige Probleme des ebenen Verzerrungsfalls angewandt, siehe auch CHRISTIAN/BOEHMER/MARTIN (1972). Es hat sich allerdings nicht durchgesetzt, da es offensichtlich umständlich zu handhaben ist und gegenüber den zuvor erwähnten Verfahren eine schlechtere Konvergenzeigenschaft besitzt, FINN/BYRNE/BUCHER (1971).

Neben den bisher genannten numerischen Verfahren hat in letzter Zeit die Randintegralmethode (Boundary Element Method) bei der Lösung von Randwertproblemen der Kontinuumsmechanik an Bedeutung gewonnen, siehe hierzu BREBBIA (1978).

Die Anwendung auf Konsolidationsprobleme wird erstmals von BANERJEE/BUTTERFIELD (1981) beschrieben, als weitere Veröffentlichungen sind die von ARAMAKI et al. (1982) und GARACIA-SUAREZ/ALARCON (1982) zu nennen. Die Wechselwirkung zwischen Verformungs- und Sickerströmungsproblem wird in diesen Arbeiten durch eine schrittweise entkoppelte Analyse - analog zu CHRISTIAN/BOEHMER (1970) - berücksichtigt.

Im folgenden wird von den mit Hilfe der Prinzipe der virtuellen Arbeit abgeleiteten Gleichungen des Abschnitts 2.3 ausgegangen und ein dem Verfahren SANDHU (1968) gleichwertiges numerisches Lösungsverfahren für allgemeine dreidimensionale Konsolidationsprobleme aufgestellt. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit finiten Elementen, während die zeitliche Integration mit einem Differenzenverfahren durchgeführt wird. Die Aufbereitung für die Programmierung erfolgt für den ebenen (ebener Verzerrungs- und Strömungszustand) und den axialsymmetrischen Fall.

4.2 Diskretisierung der Arbeitsgleichungen

Das Konsolidationsproblem stellt bezüglich der Ortskoordinaten ein Randwert- und bezüglich der Zeit ein Anfangswertproblem dar. Für die numerische Lösung bieten sich daher in der Zeit schrittweise arbeitende Algorithmen gekoppelt mit einer räumlichen Diskretisierung durch Finite-Element-Ansätze an.

Der Lösungsansatz wird also allgemein gesehen die Form eines Produktansatzes haben:

$$Y(\underset{\sim}{x},t) \approx \tilde{Y}(\underset{\sim}{x},t) = \sum_i N_i(\underset{\sim}{x})\, Y_i(t)$$

Durch die Art der Prinzipe der virtuellen Arbeit nach Abschnitt 2.3 bedingt werden als unbekannte Feldgrößen Y die Verschiebungen u_j und der Porenwasserüberdruck p verwendet. Ihr räumlicher Verlauf wird zu jedem Zeitpunkt durch geeignete Interpolationsfunktionen approximiert, die für alle Zeiten beibehalten werden; zeitlich abhängig sind die Funktionswerte an diskreten Punkten (Knoten).

4.2.1 Räumliche Diskretisierung durch finite Elemente

Da hier nicht auf alle Details der Methode der finiten Elemente (FEM) eingegangen werden kann, seien aus der Vielzahl der hierzu vorhandenen Literatur die Bücher von ZIENKIEWICZ (1977), BUCK et al. (1973), DESAI/ABEL (1972) und BREBBIA/CONNOR (1973) genannt. Die Bezeichnungen werden, soweit möglich, in Anlehnung an Zienkiewicz gewählt. Die Darstellung erfolgt von hier ab in Matrizenschreibweise.

Die Ausgangsgleichungen des Abschnitts 2.3.3, Gl. (2.27) und (2.28) lauten in Matrizenform

$$\int_V (\mathbf{L}_u \delta \mathbf{u})^T \mathbf{D} \; (\mathbf{L}\dot{\mathbf{u}}) \, dV - \int_V (\mathbf{L}_u \delta \mathbf{u})^T \mathbf{D} \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \, dV - \int_V (\mathbf{L}\delta \mathbf{u})^T \mathbf{J} \, \dot{p} \, dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u}^T \dot{\hat{\mathbf{t}}} \, dS = 0 \qquad (4.1)$$

$$\int_V \frac{k}{\gamma_w} (\mathbf{L}_p \delta p)^T (\mathbf{L}_p p) \, dV + \int_V \delta p \mathbf{J}^T (\mathbf{L}_u \dot{\mathbf{u}}) \, dV + \int_{S_q} \delta p \; q \, dS = 0 \qquad (4.2)$$

$\mathbf{L}_u$ und $\mathbf{L}_p$ sind hierbei lineare Differentialoperatoren ($\mathbf{L}_p \triangleq$ Nabla-Operator), $\mathbf{u}$ ist der Verschiebungsvektor, $\mathbf{D}$ die tangentiale Stoffmatrix, $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ der Vektor [1] der Anfangsdehnung und $\mathbf{J}$ ein Summationsvektor ($\mathbf{J} = [1,1,1,0,0,0]^T$ im dreimensionalen kartesischen Raum).

Bei der FEM geht man von einer Unterteilung des untersuchten Gebietes V in n_e Unterbereiche (Elemente) aus. Innerhalb eines jeden Elements werden die unbekannten Feldgrößen $\mathbf{u}$ und p durch entsprechende Ansatzfunktionen in Abhängigkeit diskreter Werte in den Knotenpunkten angenähert.

Für die Verschiebungen gilt:

$$\tilde{\mathbf{u}}\,(x,y,z,t) = \mathbf{N}_u(x,y,z)\mathbf{u}_e(t) \qquad (4.3)$$

und für den Porenwasserüberdruck

$$\tilde{p}\,(x,y,z,t) = \mathbf{N}_p(x,y,z)\mathbf{p}_e(t) \qquad (4.4)$$

---

[1] Die Bezeichnung Vektor (= Spaltenmatrix) wird im Rahmen der Matrizendarstellung auch für nichtvektorielle Größen verwendet.

$\tilde{u} = [\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z]^T$ bzw. $\tilde{p}$ sind Näherungen für die Verschiebungskomponenten bzw. den Porenwasserüberdruck im Innern des Elements, N_u und N_p enthalten die zugehörigen Interpolationsfunktionen und u_e bzw. p_e sind die Vektoren der Verschiebungen bzw. Porenwasserüberdrücke an den Elementknoten. Die Ansätze (4.3) und (4.4) werden nun in die Gleichungen (4.1) und (4.2) eingesetzt. Hierbei sollen diese Ansätze sowohl für die tatsächlichen als auch für die virtuellen Größen gelten. Das Integrationsgebiet erstreckt sich zunächst auf ein typisches Element.

Mit den Abkürzungen $B_u = L_u N_u$ $\quad (\tilde{\varepsilon} = B_u u_e)$

und $B_p = L_p N_p$ $\quad (\text{grad}\, \tilde{p} = B_p u_e)$

erhält man

$$\int_{V_e} (B_u \delta u_e)^T D B_u \dot{u}_e \, dV - \int_{V_e} (B_u \delta u_e)^T D \dot{\varepsilon}^0 \, dV - \int_{V_e} (B_u \delta u_e)^T J N_p \dot{p}_e \, dV - \int_{S_{te}} (N_u \delta u_e)^T \dot{\hat{t}} \, dS = 0$$

$$\int_{V_e} \frac{k}{\gamma_w} (B_p \delta p_e)^T B_p p_e \, dV + \int_{V_e} (N_p \delta p_e)^T J^T B_u \dot{u}_e \, dV + \int_{S_{qe}} (N_p \delta p_e)^T \hat{q} \, dS = 0$$

Die Vektoren der virtuellen Größen δu_e und δp_e können nach entsprechender Umformung ($(ab)^T = b^T a^T$) jeweils vor das Integral gezogen und ausgeklammert werden. Da diese beliebige Werte annehmen können, muß der restliche Ausdruck für sich gleich dem Nullvektor sein. Weiter lassen sich die tatsächlichen Knoten-Freiheitsgrade aus der Integration ausklammern, so daß folgendes Gleichungssystem entsteht:

$$K_e \dot{u}_e - C_e \dot{p}_e - \dot{f}_{te} - \dot{f}^p_e = 0 \tag{4.5}$$

$$C_e^T \dot{u}_e + H p_e + f_q = 0 \tag{4.6}$$

mit den Abkürzungen

$K_e = \int_{V_e} B_u^T D B_u \, dV$ Element-Steifigkeitsmatrix

$C_e = \int_{V_e} B_u^T J N_p \, dV$ -Koppelmatrix

$H_e = \int_V \frac{k}{\gamma_w} B_p^T B_p \, dV$ -Sickermatrix

$$f_{te} = \int_{S_{te}} N_u^T \hat{t} \, dS$$ – Vektor der Knotenkräfte infolge Randspannungen

$$f_e^o = \int_{V_e} B_u^T D \, \varepsilon^o \, dV$$ – Vektor der Knotenkräfte infolge Anfangsdehnung

$$f_{q_e} = \int_{S_q} N_p^T \hat{q} \, dS$$ – Vektor der Punktquellen infolge Randdurchfluß

Das Gesamtsystem erhält man durch entsprechende Summation der Anteile aller Elemente. Die Oberflächenintegrale heben sich im Innern des Gesamtgebietes auf, wenn durch die Wahl der Ansatzfunktionen - die voraussetzungsgemäß auch für die virtuellen Größen gelten - entlang benachbarter Elementränder Kompatibilität gewährleistet wird. Übrig bleiben die tatsächlichen Randterme aus vorgeschriebener Spannung bzw. Durchfluß (Ränder S_{ti} und S_q des Gesamtgebietes).

Mit $K = \Sigma K_e$ usw. (Summation bezüglich globaler Indizierung) erhält man

$$\left.\begin{aligned} K \dot{u} - C \dot{p} &= \dot{f}_t + \dot{f}^o \\ -C^T \dot{u} - H p &= f_q \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

(4.7) stellt ein System von Differentialgleichungen, oder eine Matrizendifferentialgleichung in der Zeit dar.

4.2.2 Zeitliche Diskretisierung durch ein Differenzenschema

Für die Zeitintegration von Matrizen-Differentialgleichungen der Art der Gleichung (4.7) stehen zahlreiche Verfahren zur Verfügung. Auf die in Zusammenhang mit der Konsolidationsanalyse verwendeten Verfahren wurde bereits in Abschnitt 4.1 hingewiesen, einen allgemeineren Überblick findet man beispielsweise bei KRINGS (1976), ARGYRIS/VAZ/WILLAM (1978) und BELKE (1980).

Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit soll von einem Differenzenverfahren ausgegangen werden. Dabei werden in der Ausgangsgleichung (4.7) die Ableitungen nach der Zeit (Differentialquotienten) durch Differenzenquotienten ersetzt,und je nach Wahl von vorderem, mittlerem oder hinterem Differenzenquotienten ergeben sich insbesondere im Konvergenzverhalten unterschiedliche Algorithmen. Die Verfahren, die sich aus der Verwendung der ersten beiden Differenzenquotienten ergeben, sind auch unter dem Namen Euler-(Vorwärts-)Verfahren und Crank-Nicolson-Verfahren bekannt.

Die drei genannten klassischen Verfahren können auch als Sonderfälle der sogenannten θ-Methode betrachtet werden. Bei dieser Methode wird die gesuchte Funktion innerhalb eines Zeitschritts Δt durch gewichtete Mittelbildung der Funktionswerte vor und nach diesem Zeitschritt angesetzt:

$$Y = \theta\, Y_{t+\Delta t} + (1-\theta) Y_t$$

mit

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Zusammen mit der Zeitableitung im betrachteten Intervall

$$\dot{Y} = \frac{Y_{t+\Delta t} - Y_t}{\Delta t}$$

ergibt sich ein Rekursionsschema, das für $\theta = 0$, $\theta = 1/2$ und $\theta = 1$ mit den drei genannten Differenzenverfahren identisch ist. Wie BOOKER /SMALL (1975) zeigen, ist das Verfahren für $1 \geq \theta \geq 1/2$ bedingungslos stabil.

Die meisten Autoren verwenden $\theta = 1/2$ (mittlerer Differenzenquotient, Crank-Nicolson). Wegen des abklingenden Charakters der Konsolidationsvorgänge empfehlen einige $\theta > 1/2$, z.B. VERRUIJT (1978): $\theta = 3/4$. Dies ist bei Problemen, bei denen die Last nicht plötzlich aufgebracht und über die Zeit konstant gehalten wird, allerdings nicht unbedingt zweckmäßig.

Für die zeitliche Diskretisierung der Gleichung (4.7) soll daher der mittlere Differenzenquotient ($\theta = 1/2$) verwendet werden. Für die gesuchte Funktion $Y(t)$ und deren Zeitableitung gilt dann

$$Y_{t+\Delta t/2} = \frac{Y_{t+\Delta t} + Y_t}{2}$$

$$\dot{Y}_{t+\Delta t/2} = \frac{Y_{t+\Delta t} - Y_t}{\Delta t} = \frac{\Delta Y}{\Delta t}$$

Angewandt auf die Matrizen-Differentialgleichung (4.7) ergibt sich

$$\mathbf{K}\,\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} - \mathbf{C}\,\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{f}^0}{\Delta t}$$

$$-\,\mathbf{C}^T\,\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} - \mathbf{H}\,\frac{\mathbf{p}_{t+\Delta t} + \mathbf{p}_t}{2} = -\,\mathbf{f}_q$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}\;\Delta \mathbf{u} - \mathbf{C}\;\Delta \mathbf{p} &= \Delta \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}^0 \\ -\,\mathbf{C}^T\,\Delta \mathbf{u} - \frac{\Delta t}{2}\,\mathbf{H}\,\Delta \mathbf{p} &= \Delta t\;\mathbf{H}\;\mathbf{p}_t + \Delta t\;\mathbf{f}_q \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Mit dem Gleichungssystem (4.8) hat man ein Rekursionsschema zur Verfügung, mit dem sich, ausgehend von einem bekannten Zustand zum Zeitpunkt t, die Zuwächse der primären Unbekannten $\Delta \mathbf{u}$ und $\Delta \mathbf{p}$ für das Zeitintervall Δt berechnen lassen. Unter den davon abgeleiteten Größen interessieren in erster Linie die Änderungen der Verzerrungen, der effektiven Spannungen und (insbesondere bei Verschiebungslastfällen) der Reaktionskräfte:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_u\,\Delta \mathbf{u}_e$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\;(\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^0)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_e (\mathbf{K}_e\;\Delta \mathbf{u}_e - \mathbf{C}_e\;\Delta \mathbf{p})$$

Die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ selbst ergeben sich durch Addition:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_t + \Delta \mathbf{p}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}'_t + \Delta \boldsymbol{\sigma}'$$

usw.

Weitere abgeleitete Größen wie Porenwasserdruckgradient, Strömungsgeschwindigkeit und Abflußmengen lassen sich in analoger Weise berechnen.

4.3 Ausgangszustand (t = 0) als Sonderfall

Um mit dem oben angegebenen Rekursionsschema (Gl. 4.8) rechnen zu können, wird ein bekannter Ausgangszustand benötigt. Wenn die Belastung zum Zeitpunkt $t = 0$ Null ist und diese dann über die Zeit stetig aufgebracht wird, kann vom Trivialfall $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ ausgegangen werden.

Im Fall der plötzlich aufgebrachten Last ergibt sich der Ausgangszustand zum Zeitpunkt $t = o^+$ als Lösung eines Gleichungssystems, das man aus Gleichung (4.8) mit Hilfe der Grenzbetrachtung $\Delta t \to 0$ gewinnt:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}\,\Delta\mathbf{u} - \mathbf{C}\,\Delta\mathbf{p} &= \Delta\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}^{o} \\ -\mathbf{C}^{T}\,\Delta\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Die Inkompressibilitätsbedingung (2.13) wird auf diese Weise indirekt eingebracht, die zweite Zeile von Gleichung (4.9) stellt die bereits diskretisierte globale Form von Gleichung (2.13) dar. Die Matrizen-Differentialgleichung bzw. -Differenzengleichung wird in diesem Fall zu einem gewöhnlichen Gleichungssystem, dessen Lösung konsistent ist mit der Lösung für Zeitpunkte $t > 0$ (Konsolidationsphase).

Wegen der nichtlinearen Stoffgesetze soll die inkrementelle Form von (4.9) beibehalten werden. Die Inkremente sind hier nicht mehr explizit von der Zeit abhängig, sondern nur noch von einer fiktiven Zeitvariablen. $\Delta\mathbf{f}$ und $\Delta\mathbf{f}$ nehmen in der Regel endliche Werte an

$$\left(\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta t} \to \infty, \text{ jedoch } \Delta\mathbf{f} \neq \infty \right).$$

Bei der Verwendung eines linear elastischen Stoffgesetzes kann die Belastung in einem Schritt aufgebracht werden, und es ergibt sich mit $\mathbf{f}^{o} = \mathbf{0}$ (Anfangslast infolge Dilatanz):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}\,\mathbf{u} - \mathbf{C}\,\mathbf{p} &= \mathbf{f} \\ -\mathbf{C}^{T}\,\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den von CHRISTIAN (1968) für ein inkompressibles Zweiphasengemisch abgeleiteten Gleichungen.

Für einen inkompressiblen Einphasenstoff erhält man formal dieselben Gleichungen, wenn neben den Verschiebungskomponenten die mittlere, hydrostatische Spannung (bzw. ein dieser Größe proportionaler Parameter) als Freiheitsgrad gewählt wird. Hierbei geht man in der Regel von dem von HERRMANN (1965) angegebenen Va-

riationsprinzip aus, das als Sonderfall des Hellinger-Reissnerschen Prinzips angesehen werden kann, siehe z.B. DESAI/ABEL (1972). Die Einführung der Inkompressibilitätsbedingung als Nebenbedingung beim Verschiebungsansatz mit der mittleren Normalspannung als Lagrange-Multiplikator führt zum gleichen Ergebnis, siehe ZIENKIEWICZ (1977); in ähnlicher Weise wird von ARGYRIS/MARECZEK (1971) die Inkompressibilitätsbedingung mit der Methode der gewichteten Residuen behandelt.

Der Vorteil eines solchen gemischten Ansatzes liegt darin, daß das Verfahren - im Gegensatz zur reinen Verschiebungsmethode - auch bei exakter Inkompressibilität ($\nu_u = 0{,}5$ beim Hookeschen Gesetz) funktioniert. Vorausgesetzt wird hierbei allerdings ein bestimmtes Verhältnis des Grades des Verschiebungsansatzes zum Grad des Spannungsansatzes, worauf in Abschnitt 4.6 noch einmal eingegangen werden soll.

Zum Vergleich mit (4.10) soll das entsprechende Gleichungssystem einer Einphasenformulierung betrachtet werden. Nach ARGYRIS/MARECZEK (1971) ergibt sich für inkompressibles Material und unter Vernachlässigung der Temperaturdehnungen in der hier verwendeten Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{u} - \mathbf{C}\,\mathbf{p} &= \mathbf{f} \\ -\mathbf{C}^T\,\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

Hierbei ist

$$\bar{\mathbf{K}} = \Sigma\,\bar{\mathbf{K}}_e = \sum_1^{n_e} \int_V \mathbf{B}^T\,\mathbf{D}\,\bar{\mathbf{B}}\,dV$$

mit $\bar{\mathbf{D}} = G\ \mathrm{diag}[2,2,2,1,1,1]$ im dreidimensionalen Fall. Da die Stoffmatrizen $\mathbf{D}$ und $\bar{\mathbf{D}}$ nur identisch sind, wenn die Querkontraktionszahl des Korngerüstes $\nu = 0$ ist [1], ergibt sich im allgemeinen also ein Unterschied im Auf-

---

1)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad a = 2G\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad b = 2G\,\frac{\nu}{1-2\nu}$$

bau der Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}$ und $\bar{\mathbf{K}}$. Dieser ist dadurch bedingt, daß bei den Einphasenformulierungen die Inkompressibilitätsbedingung, zusätzlich zur 2. Gleichung (4.11), im Stoffgesetz eingefügt werden muß. Denn beim inkompressiblen Stoff wird die übliche Stoffmatrix wegen $\nu_u = 0{,}5$ (bzw. $K_u = \infty$; Index u = undrainiert) singulär.

Bei der Zweiphasenformulierung wird demgegenüber die Kompressionssteifigkeit des Korngerüstes, die für reale Böden immer endliche Werte annimmt, der Schubsteifigkeit überlagert. Die Größe dieser Kompressionssteifigkeit hat aber im Sonderfall $\Delta t = 0$ keinen Einfluß, da dem Verformungszustand durch die 2. Gleichung (4.11) die Zwangsbedingung der Inkompressibilität auferlegt wird.

Numerische Vergleichsrechnungen nach (4.10) und (4.11) zeigen - auch bei einer Variation des Kompressionsmoduls (bzw. der Querkontraktionszahl) in (4.10) -, daß die durch Rundungsfehler zustande kommenden Abweichungen sehr gering sind. Es ist anzumerken, daß bei diesem Vergleich keine Randbedingungen bezüglich des Porenwasserdrucks bzw. der mittleren hydrostatischen Spannung spezifiziert wurden.

4.4 Berücksichtigung der Nichtlinearität

Bei Verwendung der in Abschnitt 3 behandelten nichtlinearen Stoffgesetze werden die Gleichungen (4.8) und (4.9) in den Verschiebungsinkrementen nichtlinear, da die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ vom Spannungs- bzw. Verzerrungszustand und damit vom Verschiebungszustand abhängig ist.
Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen dieser Art werden in der Literatur im wesentlichen unterteilt in inkrementelle, iterative und kombinierte (inkrementell-iterative) Verfahren. Übersichten finden sich u.a. bei RAMM (1976) und WILLAM (1978), neuere Entwicklungen werden von RAMM (1981) aufgezeigt.

Da die hier vorliegenden Stoffgesetze eine Wegabhängigkeit enthalten, lassen sie sich nur in differentieller Form darstellen. Demzufolge scheiden die rein iterativen Verfahren aus, die Belastung muß vielmehr in kleinen Schritten aufgebracht werden. Es kommen somit rein inkrementelle Verfahren oder Verfahren mit Iteration im Lastschritt in Frage.

Ein einfaches inkrementelles Verfahren ist mit der Methode der tangentialen Steifigkeit gegeben. Bei ihr wird Zeitschritt für Zeitschritt die Steifigkeits-

matrix dem aktuellen Spannungszustand angepaßt. Da bei Zugrundelegung des hypoelastischen Stoffgesetzes der Dilatanzanteil durch Korrekturkräfte auf der rechten Seite des Gleichungssystems berücksichtigt werden soll, siehe auch Gleichung (3.19), wird in diesem Fall das Verfahren modifiziert, und der Lastvektor kann als Korrekturglied im Sinne der Anfangslastmethode interpretiert werden.

Die Methode der tangentialen Steifigkeit stellt in Zusammenhang mit der Berechnung von rein statischen Problemen das klassische Euler-Vorwärtsverfahren dar. Die Anwendung auf die bereits in der Zeit diskretisierten Gleichungen des Konsolidationsproblems (4.8) ergibt demgegenüber eine Kombination aus Euler- und Crank-Nicolson-Verfahren. Die konsequente Anwendung des Euler-Verfahrens (vorderer Differenzenquotient) direkt auf Gleichung (4.7) wäre auch denkbar, würde aber den bereits in Abschnitt 4.2.2 erläuterten Nachteil bedingter Stabilität mit sich bringen (Stabilitätskriterium gilt exakt nur für lineares Stoffverhalten).

Für die Verwendung des oben beschriebenen einfachen inkrementellen Verfahrens in der vorliegenden Arbeit sprechen folgende Gründe:

- Es wird in der Regel angenommen, daß inkrementelle Verfahren bei monotonen Vorgängen immer konvergieren.
- Das Verfahren läßt sich bei beiden vorgeschlagenen nichtlinearen Stoffgesetzen einsetzen.
- Es ist einfach zu handhaben und zu programmieren.

Als Nachteil ist zu nennen, daß es unter Umständen bezüglich der Rechenzeiten unwirtschaftlich wird. Insbesondere bei der Berechnung von Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden könnte eine Nachiteration im Zeitschritt im Sinne eines modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens vorteilhafter sein.
Die Rechenvorschrift soll nun ausführlich beschrieben werden.

Für $t > 0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}(\underset{\sim}{\sigma}'_t, \varepsilon_t^{pl})\ \Delta \mathbf{u}_{t,t+\Delta t} - \mathbf{C}\ \Delta \mathbf{p}_{t,t+\Delta t} &= \Delta \mathbf{f}_{t,t+\Delta t} + \Delta \mathbf{f}^0(\underset{\sim}{\sigma}'_t, \Delta\tau_{oct_{t-\Delta\bar{t},t}}) \\ -\mathbf{C}^T\ \Delta \mathbf{u}_{t,t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{H}\ \Delta \mathbf{p}_{t,t+\Delta t} &= \Delta t\ \mathbf{H}\ \mathbf{p}_t + \Delta t\ \mathbf{f}_{q\ t+\Delta t/2} \end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

($\Delta\bar{t}$: vorangehender Zeitschritt, i.a. von Δt verschieden)

Bei plötzlicher Belastung mit $\Delta t = 0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}\,(\underset{\sim}{\sigma}'_i \underset{\sim}{\varepsilon}_i^{pl})\;\Delta \mathbf{u}_{i,i+1} - \mathbf{C}\,\Delta \mathbf{p}_{i,i+1} &= \Delta \mathbf{f}_{i,i+1} + \Delta \mathbf{f}^{o}(\underset{\sim}{\sigma}'_i,\ \Delta\tau\ \mathrm{oct}_{i-1,i}) \\ -\mathbf{C}^{T}\,\Delta \mathbf{u}_{i,i+1} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (4.13)$$

wobei i-1, i und i+1 Laststufen (= fiktive Zeitpunkte) kennzeichnen sollen. Beim hypoelastischen Stoffgesetz entfällt die Abhängigkeit von $\underset{\sim}{\varepsilon}^{pl}$, während beim elastoplastischen Gesetz $\Delta \mathbf{f}^{*} = \mathbf{0}$ wird.

4.5 Programmierung für zweidimensionale Probleme

Die Umsetzung des oben abgeleiteten Algorithmus in ein Rechenprogramm erfordert weitere Festlegungen, die im folgenden getroffen werden sollen. Insbesondere sollen die bei der räumlichen Diskretisierung der Arbeitsgleichungen, siehe Abschnitt 4.2.1, in allgemeiner Form angegebenen Interpolationsfunktionen $\mathbf{N}_u$ und $\mathbf{N}_p$ und deren Bereiche spezifiziert werden, d.h. es müssen bestimmte Elemente gewählt werden.

In dem Rechenprogramm CONSOL, das zur Durchführung der Untersuchungen dieser Arbeit aufgestellt wurde, sind (räumlich) zweidimensionale Elemente implementiert. Sämtliche Funktionen hängen also, neben der Zeit, von zwei unabhängigen Ortskoordinaten ab, wobei wahlweise der ebene Verzerrungs- und Fließzustand oder der axialsymmetrische Zustand analysiert werden kann. Prinzipiell wäre es ohne größeren Aufwand möglich, in einem Computerprogramm den allgemeinen Fall der räumlichen Dreidimensionalität zu berücksichtigen und entsprechende Elemente zu implementieren. Der praktischen Durchführbarkeit von Analysen gerade mit Nichtlinearität und/oder Zeitabhängigkeit sind allerdings durch die Kapazität der Großrechenanlagen derzeit noch Grenzen gesetzt.

Bei den in CONSOL implementierten Elementen wird für die Verschiebungen ein biquadratischer Ansatz verwendet, während für den Porenwasserüberdruck verschiedene Interpolationsfunktionen betrachtet werden sollen. Als Elementform wird das Viereck (Quadrilateralelement) gewählt. Die Seiten des Vierecks können parabolisch gekrümmt sein, denn es geht durch Koordinatentransformation aus einem quadratischen Grundgebiet (ξ-η-Ebene) hervor, wobei für diese Transformation dieselbe Interpolationsfunktion wie für die Verschiebungen herangezogen wird, siehe Bild 4.1.

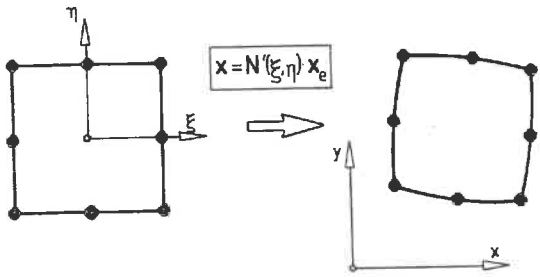


Bild 4.1:

Transformation vom lokalen ins kartesische Koordinatensystem beim 8-Knoten Viereckelement

Es ist üblich, solche Elemente als isoparametrisch zu bezeichnen; in unserem Fall handelt es sich allerdings nur dann um ein "echtes" isoparametrisches Element, wenn auch für die Porenwasserdruck-Interpolation diese Funktion verwendet wird (z.B. "88-Element", siehe unten).

Die Integration der Elementmatrizen erfolgt numerisch nach der Gaußschen Quadratur in den lokalen Koordinaten ξ und η. Die Anzahl der Integrationsaufpunkte wird im Programm variabel gehalten, in der Regel genügen allerdings 2 x 2 Aufpunkte, s. RUNESSON (1978).

Die in CONSOL implementierten Elemente, die der "Serendipity-Familie" angehören, sind in Tafel 4.1 dargestellt.

Die "88-" und die "84-Elemente" sind aus der Literatur bekannt. Das "86-Element" wurde für eine spezielle Untersuchung, die in Abschnitt 4.6 dokumentiert ist, entwickelt.[1] Das "80-Element" ist ein reines Verschiebungselement ohne Porenwasserdruck-Freiheitsgrad. Es kann beispielsweise für die Diskretisierung von nichtkonsolidierenden Teilen in einer Struktur oder bei entkoppelten Analysen (vollkommen drainiert) eingesetzt werden. Die einzelnen Ansatzfunktionen, deren Ableitungen und der Aufbau der Elementmatrizen sind im Anhang 4.1 zusammengestellt. Wegen weitergehender Details zur numerischen Integration und Koordinaten-Transformation wird auf ZIENKIEWICZ (1977) verwiesen.

Im folgenden werden einige weitere wichtige Informationen über das Programm CONSOL angegeben. Eine vollständige Beschreibung des Programms liegt im Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart vor.

---

1) Darüber hinaus wurde auch noch ein "87-Element" entwickelt und in CONSOL implementiert, im vorliegenden Zusammenhang jedoch nicht weiter eingesetzt.

Bezeichnung	Verschiebungen		Porenwasserüberdruck		Darstellung
	Ansatz	Anz. d. Freiheitsgrade	Ansatz	Anz. d. Freiheitsgrade	
88-Element	biquadratisch	16	biquadratisch	8	
86-Element	biquadratisch	16	quadratisch - linear	6	
84-Element	biquadratisch	16	bilinear	4	
80-Element	biquadratisch	16	-	-	
Freiheitsgrade an den Knoten: ● Δu_x, Δu_y, Δp; ○ Δu_x, Δu_y.					

Tafel 4.1: In CONSOL implementierte Elemente

Das in jedem Zeitschritt zu lösende lineare Gleichungssystem wird nach dem Gaußschen Algorithmus aufgelöst. Um die Vorteile einer Bandstruktur zu erhalten, werden Verschiebungs- und Porenwasserdruck-Freiheitsgrade knotenpunktweise geordnet, was einer Vertauschung von Zeilen und Spalten in den Gleichungen (4.9 ff) gleichkommt. Es wird nur die halbe Systemmatrix abgespeichert, d.h. es wird Symmetrie der Stoffmatrix D vorausgesetzt. Dies bedeutet bei Verwendung des elastoplastischen Stoffgesetzes in Verbindung mit dem oben angegebenen inkrementellen Verfahren eine Einschränkung auf eine assoziierte Fließregel; beim hypoelastischen Stoffgesetz wird die Dilatanz gemäß Gl.(3.20) behandelt.

Als Spannungs-Verzerrungsbeziehungen sind die beiden in Abschnitt 3 beschriebenen nichtlinearen Stoffgesetze sowie das Hookesche Gesetz programmiert. Dabei ist es möglich, Bereiche mit linearem und mit nichtlinearem Verhalten zu koppeln; eine gleichzeitige Verwendung der beiden nichtlinearen Stoffgesetze innerhalb eines Rechenlaufs ist unzweckmäßig und daher nicht vorgesehen.

Ein weiterer wichtiger Punkt im Zusammenhang mit der Programmierung der nichtlinearen Stoffgesetze ist die Festlegung von Schranken für Größen, die bei der numerischen Berechnung nicht ≤ 0 werden dürfen. Beim hypoelastischen Stoffgesetz kann sich nach Gleichung (3.15) ein Schubmodul $G \leq 0$ ergeben. Während $G = 0$ zu einer Singularität des Gesamtgleichungssystems führen kann, ist ein negativer Wert für G physikalisch nicht zulässig. Als untere Schranke für G wird wird daher $K_o/1000$ (K_o: Anfangskompressionsmodul) gesetzt. In ähnlicher Weise muß auch bei der Berechnung der tangentialen Stoffmatrix des elastoplastischen Gesetzes eine untere Schranke für die Verfestigung eingeführt werden, siehe SCHAD (1979), S. 92.

Solche Festlegungen, deren Angabe von vielen Autoren unterschlagen wird, stellen wichtige Ergänzungen der Stoffgesetze dar, und sie können in manchen Fällen einen nicht zu unterschätzenden Einfluß auf Rechenergebnisse haben.

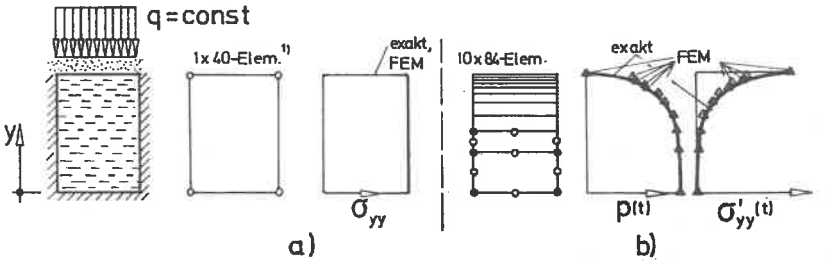
Abschließend sei bemerkt, daß sämtliche abgeleiteten Größen wie Verzerrungs- und Spannungsinkremente, Verzerrungen und Spannungen selbst sowie die daraus für den nächsten Rechenschritt sich ergebenden Stoffmatrizen (und ggf. die Anfangsdehnungen infolge Dilatanz) in den Integrationsaufpunkten ("Gauß-Punkte") ermittelt werden. Es ergeben sich innerhalb des Elementes veränderliche Spannungen. Dies kann zu dem unerwünschten Effekt führen, daß beispielsweise in der Nähe von Unstetigkeitsstellen oszillierende Spannungsverläufe auftreten. Im Programm ist daher eine Glättung in der Art vorgesehen, daß die Inkremente der Spannungskomponenten (effektive Spannungen!) einer linearen Regression unterworfen werden, d.h. durch die über den Aufpunkten aufgetragenen Ordinaten wird eine Ausgleichsebene gelegt (siehe auch ARGYRIS/WILLAM, 1974).

4.6 Besonderheiten bei der numerischen Berechnung

Die Genauigkeit der Ergebnisse der numerischen Berechnungen hängt sehr stark von der Elementwahl, der Elementeinteilung, von den Randabständen und -bedingungen bei unendlich ausgedehnten Gebieten und von der Wahl der Zeitschritte ab. Eine Reihe von Vergleichen mit geschlossenen Lösungen (linearer Fall) und Hinweise für die konkrete Durchführung der numerischen Berechnungen sind einem großen Teil der in Abschnitt 4.1 und 5.3.1 aufgeführten Veröffentlichungen zu entnehmen. Es soll daher nur auf einige darüber hinausgehende eigene Untersuchungen eingegangen werden.

Aus der Berechnung elastostatischer Probleme mit der FEM ist bekannt, daß die Elementeinteilung an Stellen mit großen Spannungsänderungen besonders fein sein muß. Das gilt analog beim Konsolidationsproblem, wobei allerdings nicht nur die totalen Spannungen maßgebend sind, sondern sowohl die effektiven Spannungen als auch der Porenwasserüberdruck. Dies kann mitunter zu der Notwendigkeit einer feineren Elementeinteilung im Vergleich zum entsprechenden elastostatischen Problem führen.

Am Beispiel des eindimensionalen Druckversuchs (Oedometerversuch) läßt sich dies besonders gut verdeutlichen, siehe Bild 4.2: Während im ideal drainierten, elastostatischen Fall bereits ein Element mit linearem Verschiebungsansatz (in der hier verwendeten Terminologie wäre das ein 40-Element) den Spannungsverlauf exakt darstellt (a), ist beim entsprechenden Konsolidationsproblem (z.B. mit einseitiger Drainage) ein feines Elementnetz notwendig, um den räumlichen Verlauf der Zustandsgrößen genügend genau zu approximieren (b).



1) in Programm CONSOL nicht implementiert

Bild 4.2: Diskretisierung des Oedometerversuchs:
a) elastostatischer, entkoppelter Fall
b) gekoppeltes Konsolidationsproblem

Läßt man bei der Berechnung dieses Beispiels, bei dem die Belastung zum Zeitpunkt t = 0 plötzlich aufgebracht und über die Zeit konstant gehalten werden soll, die Größe des ersten Zeitschrittes Δt_1 gegen Null gehen, ergeben sich im räumlichen Verlauf des Porenwasserüberdrucks Oszillationen.

Bild 4.3 a zeigt die Verläufe des Porenwasserüberdrucks im randnahen Bereich nach verschiedenen kleinen Zeitschritten Δt_1 unter Verwendung von zehn 84- bzw. 88-Elementen (siehe Netz 1, Tafel 4.2). Die Zeitschrittgröße ist hier und in den folgenden Beispielen normiert:

$$\Delta T = \frac{c_v}{h^2}\Delta t \quad \text{mit} \quad c_v = \frac{E_s\, k}{\gamma_w}\,, \text{ wobei } E_s = 1000\ \text{kN/m}^2\,,\ \frac{k}{\gamma_w} = 10^{-10}\,\frac{\text{m}^4}{\text{s}\cdot\text{kN}}$$

und h = 0,014 m gewählt wurden.

Der Maximalwert der Oszillation, $|\Delta p|_{max}/q$, ist in Bild 4.3 b in Abhängigkeit von der Zeitschrittgröße ΔT_1 dargestellt.

Je nach Verwendung von 84- und 88-Elementen ergeben sich unterschiedliche Arten der Oszillation. Während bei dem mit 84-Elementen gerechneten Beispiel der "overshoot" bei Zeitschritten $\Delta T_1 < 2\cdot 10^{-5}$ auftritt, ist dieser bei Verwendung von 88-Elementen erst ab einer um beinahe eine Zehnerpotenz kleineren Zeitschrittgröße festzustellen. Diese Störung geht allerdings über die ganze Höhe durch, während die beim mit 84-Elementen gerechneten Beispiel eine rasche Dämpfung erfährt. Für $\Delta T < 10^{-15}$ treten dann bei den 88-Elementen weitere Störungen auf, die mit abnehmender Zeitschrittgröße immer unregelmäßiger und schließlich unsinnig werden. Demgegenüber bleibt die Porenwasserüberdruckverteilung bei den 84-Elementen bis einschließlich $\Delta T_1 = 0$ unverändert.

Die Oszillationen werden durch zwei verschiedene Ursachen hervorgerufen. Während es sich bei der im Größenordnungsbereich von $\Delta T_1 = 10^{-5}$ einsetzenden Oszillation um eine durch die Drainage-Randbedingung (p = 0 am oberen Rand) bedingte Störung handelt, wird die nur bei 88-Elementen ab etwa $\Delta T_1 = 10^{-15}$ auftretende Störung durch die schlechte Konditionierung des zu lösenden linearen Gleichungssystems hervorgerufen. Es soll zunächst auf das letztgenannte Problem eingegangen werden.

K o n d i t i o n i e r u n g

Durch die Verwendung gleichrangiger Ansätze für Verschiebungen und Porenwasserdruck wird die Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^T + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{H}$$

bei kleiner Zeitschrittgröße ΔT schlecht konditioniert bzw. für $\Delta T = 0$ singulär, siehe auch SANDHU/LIU/SINGH (1977). **A** erhält man, wenn man im Gleichungssystem (4.8) zunächst die Verschiebungsinkremente eliminiert und dann getrennt nach den Porenwasserdruckinkrementen auflöst. Die Genauigkeit, mit der dieses Gleichungssystem gelöst werden kann, wird von dem Anteil $\frac{\Delta t}{2}$ **H** in **A** beeinflußt, d.h. maßgebend sind Zeitschrittgröße ΔT und die Wortlänge der verwendeten Rechenanlage.

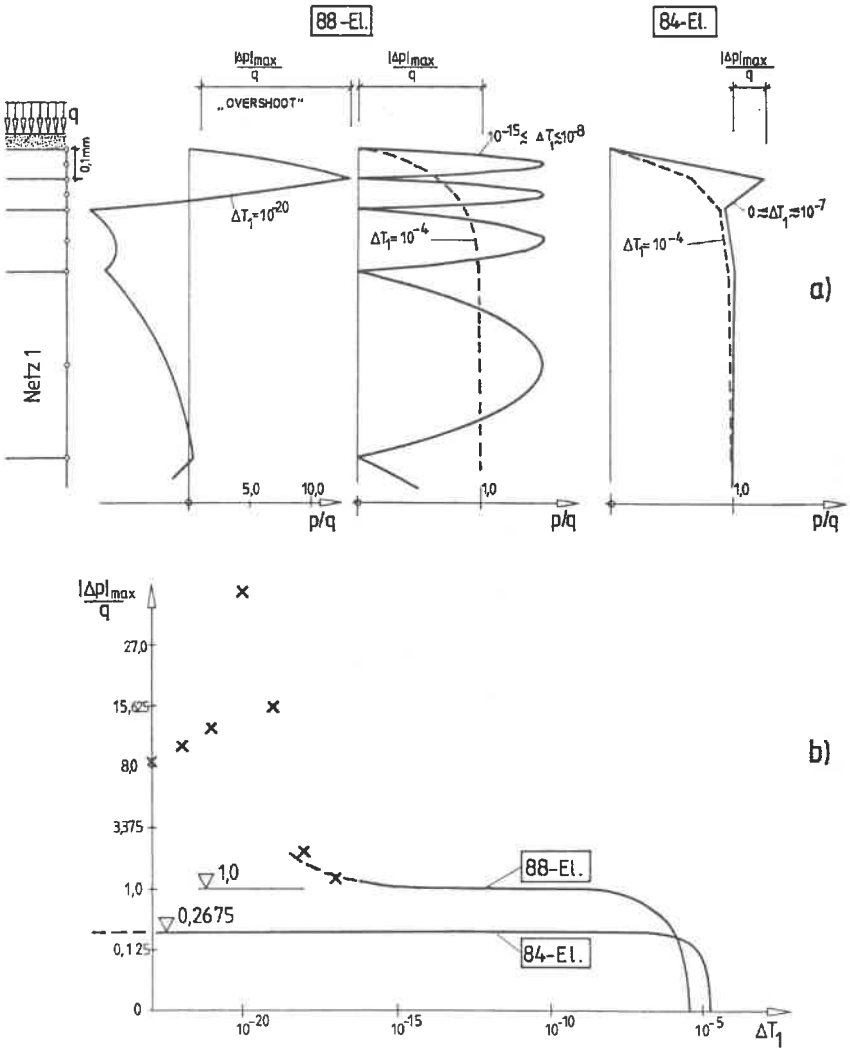


Bild 4.3: Oszillation des Porenwasserüberdrucks bei der Nachrechnung des Oedometerversuchs
a) Porenwasserüberdruck-Verteilung im randnahen Bereich
b) Maximalwert der Porenwasserüberdruck-Oszillation in Abhängigkeit der Größe des ersten Zeitschrittes

Das analoge Problem tritt auch bei der Verwendung gemischter Ansätze für die Berechnung in inkompressiblen oder nahezu inkompressiblen Einphasenstoffen auf. Es ist von daher bekannt, daß der Grad der Ansatzfunktion des hydrostatischen Drucks um 1 niedriger sein muß als der Grad des Verschiebungsansatzes. Die Benutzung eines Interpolationspolynoms für den hydrostatischen Druck von gleicher oder höherer Ordnung wie jener für die Verschiebungen führt zu einer Erhöhung der Anzahl der Unbekannten ohne entsprechende Verbesserung der Genauigkeit, da die zusätzlichen Zwangsbedingungen linear abhängig sind, MÜLLER (1979).

Als Maß für die Genauigkeit der Inversion der Matrix soll die Konditionszahl K herangezogen werden.

Es gilt $$K = \frac{\max \lambda\ (\mathbf{A})}{\min \lambda\ (\mathbf{A})}$$

oder, da **A** symmetrisch,

$$K = ||\mathbf{A}||\ \ ||\mathbf{A}^{-1}||,$$

wobei $\lambda(\mathbf{A})$ die Eigenwerte und $||\mathbf{A}||$ bzw. $||\mathbf{A}^{-1}||$ die sphärische Norm von **A** bzw. $\mathbf{A}^{-1}$ bedeuten.

Für das oben gewählte Beispiel wurden die Konditionszahlen für verschiedene Elemente und ΔT_1 mit Hilfe des Programmpakets FORMAT (ALMOND, 1978) ermittelt. Hierbei wird die Matrix **A**, im Gegensatz zu den übrigen Berechnungen mit simultaner Gleichungsauflösung, getrennt erstellt. Die entsprechende Version des Programms CONSOL ist - u.a. wegen der expliziten Inversion von **K** - allerdings nur für kleinere Probleme ausgelegt (bis ca. 200 Unbekannte).

Für die Konditionszahl gilt, daß sie mit abnehmender Genauigkeit der Inversion bzw. Gleichungsauflösung größer wird. Der Verlust an geltenden Ziffern ist etwa gleich dem Logarithmus der Konditionszahl.

Für das gewählte Oedometerproblem ist in Bild 4.4 der Logarithmus der Konditionszahl über der Zeitschrittgröße ΔT_1 aufgetragen.

Beim mit 88-Elementen diskretisierten Fall zeigt sich, daß die Konditionierung ab etwa $\Delta T_1 \leq 10^{-17}$ so schlecht wird, daß der Genauigkeitsverlust gleich der

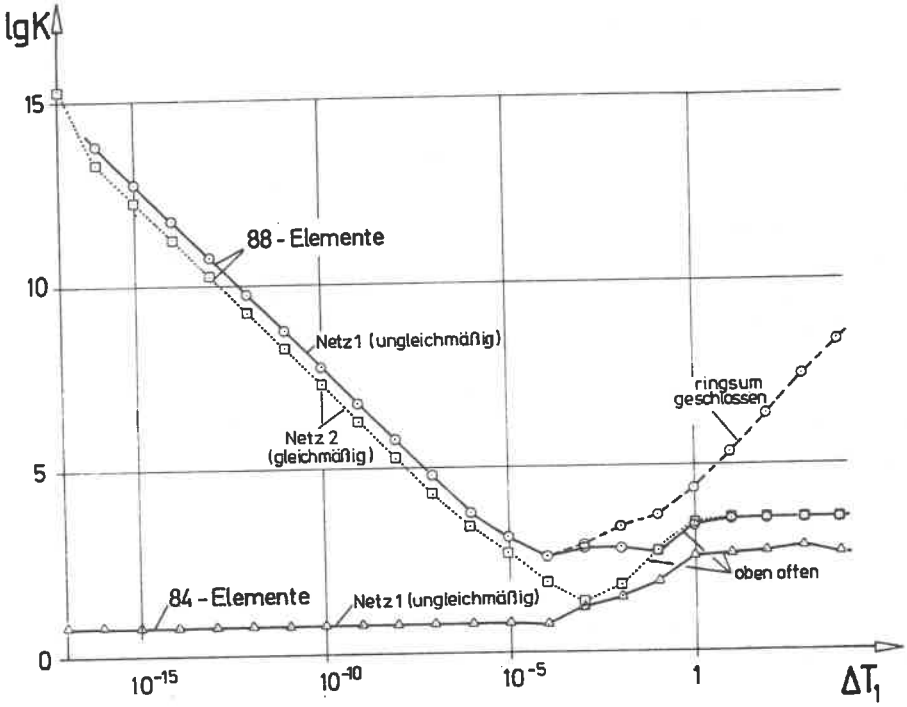


Bild 4.4: Konditionierung der Matrix A für das Oedometerproblem (10 Elemente) in Abhängigkeit von der Zeitschrittgröße ΔT_1

Wortlänge des verwendeten Rechners, nämlich 16 Stellen (CD 6600, Cyber 174) wird. Unterhalb dieser Zeitschrittgröße treten dann auch die in Bild 4.3 dargestellten unregelmäßigen Oszillationen auf.

Wie aus Bild 4.4 ebenfalls hervorgeht, zeigt die ungleichmäßige Elementeinteilung gegenüber der gleichmäßigen (siehe Tafel 4.2) eine etwas ungünstigere Konditionierung. Dieser Einfluß kann allerdings als untergeordnet angesehen werden. Weiter ist festzustellen, daß die Art der Drainage-Randbedingung bei kleinen Zeitschritten ($\Delta T_1 \leq 10^{-4}$) überhaupt keinen Einfluß hat. Erst bei sehr großen Zeitschritten wird im ringsum geschlossenen Fall die Konditionierung wieder schlecht. Hierin spiegelt sich der Widerspruch, der dadurch entsteht, daß man bei diesem unrealistischen Durchströmungsproblem, bei dem

$$\frac{\Delta t}{2} H \gg C^T K^{-1} C$$

ist, eine Durchflußmenge vorgibt und gleichzeitig alle Ränder geschlossen hält.

Bei dem mit 84-Elementen gerechneten Beispiel zeigt sich für $\Delta T_1 \leq 10^{-5}$ eine gute Konditionierung mit lg K = 0,87 = const, auch bei $T_1 = 0$ (Netz 1). Dies steht in Einklang mit dem in Bild 4.3 dargestellten Verhalten. Für größere Zeitschritte nimmt die Konditionszahl etwas zu, das Verhalten entspricht dem des mit 88-Elementen gerechneten Beispiels (gilt auch für den nicht dargestellten Fall "ringsum geschlossen").

Es ist zu bemerken, daß bei größeren Strukturen, wie etwa der Lastplatte, die Konditionierung allgemein schlechter wird. Die hier getroffenen Feststellungen können jedoch von der Tendenz her übertragen werden.

R a n d s t ö r u n g

Die Randstörung kommt dadurch zustande, daß die Ansatzfunktionen für den Porenwasserdruck die Randbedingungen $p = 0$ und $\partial p/\partial y \to \infty$ für $\Delta t \to 0$ nicht erfüllen können, wenn gleichzeitig an dem in einem endlichen Abstand darunterliegenden Knoten ein endlicher Wert für den Porenwasserdruck vorhanden sein soll. Es kommt dann sowohl beim linearen als auch beim quadratischen Ansatz zum "overshoot".

Im folgenden wird untersucht, inwieweit durch unterschiedliche Netzeinteilungen die Randstörung beeinflußt werden kann. Die Vergleiche sollen dabei auf 84-Elemente beschränkt bleiben, da bei deren Verwendung $\Delta t = 0$ exakt gewählt werden kann und die Konditionierung des Gleichungssystems keinen Einfluß hat, während sich bei 88-Elementen für kleine Zeitschritte die bereits in Bild 4.3 gezeigten Verläufe ergeben.

In Bild 4.5 sind die Porenwasserüberdruck-Verteilungen bei $\Delta t = 0$ für verschiedene Elementnetze, siehe Tafel 4.2, dargestellt. Es zeigt sich, daß nicht in allen Fällen durch eine Netzverfeinerung eine Reduktion der Randstörung erzielt werden kann: Sowohl die Verfeinerung von 3 (Netz 3) auf 10 (Netz 2) jeweils gleiche Elemente als auch eine Verfeinerung am drainierten Rand durch mehrere gleich dünne Elemente (Netz 1) ergeben jeweils einen maximalen Überschuß (overshoot) von etwa 27 %.

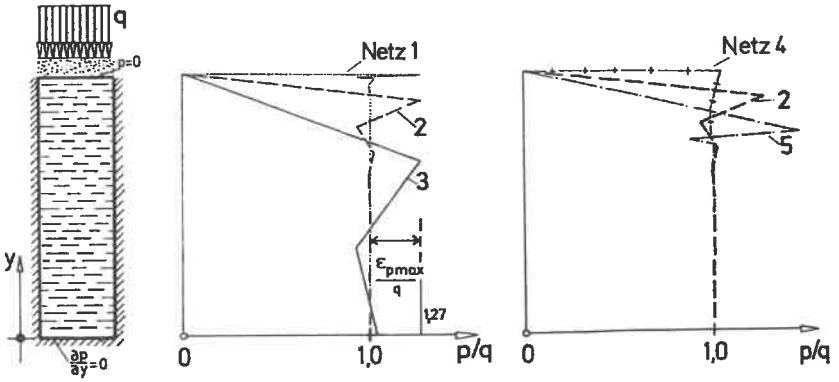


Bild 4.5: Einfluß der Netzeinteilung bei Verwendung von 84-Elementen für das Oedometerproblem, Δt = 0 (siehe hierzu Tafel 4.2)

Netz	1	2	3	4	5
d_3 d_2 d_1 … d_n (0,014 m)					
Anzahl der Elemente n	10	10	3	10	10
d_1 [m]	0.0001	0.0014	0.00467	0.0002	0.0035
d_2	0.0001	0.0014	0.00467	0.002	0.00035
d_3	0.0001	.	0.00467	0.002	0.00035
d_4	0.0002	.		0.0014	0.0014
d_5	0.0005			.	.
d_6	0.001			. .	.
d_7	0.002				
d_8	0.003	.		.	.
d_9	0.003	.		.	.
d_{10}	0.004	0,0014		0.0014	0.0014

Tafel 4.2: Netzeinteilungen für das Oedometerproblem

Eine weitere Variation der Netzgeometrie (Netze 4 und 5) hat vielmehr gezeigt, daß die Größe der Randstörung wesentlich vom Verhältnis der Dicken der beiden dem Drainagerand nächstgelegenen Elemente, d_1/d_2, abhängt. Eine geschlossene Ableitung für 2 bzw. 3 Elemente mit eindimensionalem Ansatz (siehe Anhang 4.2) ergibt folgenden Zusammenhang:

2 Elemente: $$\varepsilon_{p_{max}} = \frac{2\alpha}{4\alpha + 3} \tag{4.14}$$

3 Elemente: $$\varepsilon_{p_{max}} = \alpha \frac{3\gamma + 4}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 6\gamma + 6} \tag{4.15}$$

mit $\alpha = \frac{d_1}{d_2}$, $\gamma = \frac{d_3}{d_2}$ und $\varepsilon_{p_{max}} = (p_{max} - q)/q$

Hierbei tritt $p_{max} = p_3$ am 3. Knoten von oben auf.
Die Randstörung kann demnach bis zu 50 % betragen.

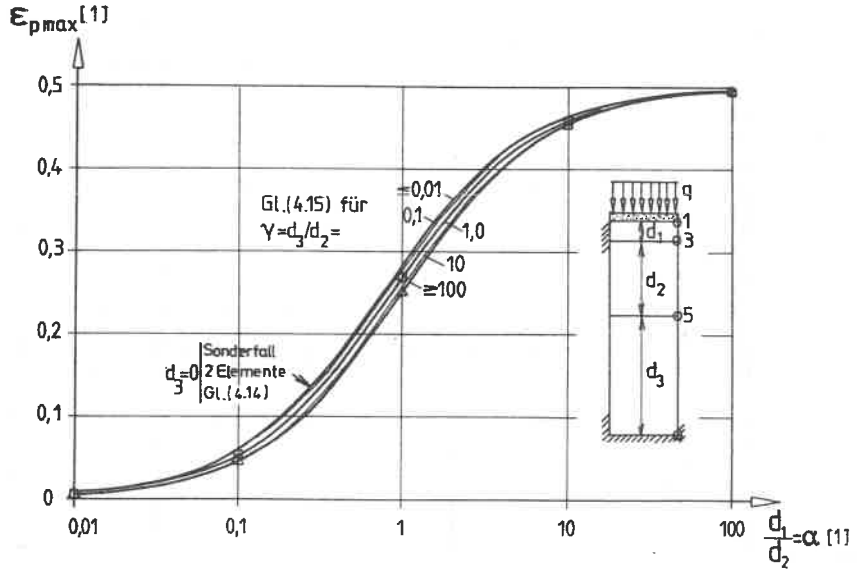


Bild 4.6: Randstörung gemäß Gl. (4.15) für t = 0 beim Oedometerproblem, 3 x 84-Element. Zum Vergleich 10 Elemente, Netz 4 modifiziert (Δ - γ = 100, □ - γ = 1)

In Bild 4.6 sind die mit Gleichungen (4.14) und (4.15) gegebenen Abhängigkeiten grafisch dargestellt. Es zeigt sich, daß bei 3 Elementen der Einfluß der Geometrie des dritten Elements ($d_3 = \gamma\ d_2$) auf die Randstörung schon von untergeordneter Bedeutung ist. Bei mehr als 3 Elementen wird eine geschlossene Auflösung zu umfangreich. Numerische Berechnungen haben hier allerdings keine nen-

nenswerten Abweichungen vom Fall mit 3 Elementen ergeben, wie z.B. die in Bild 4.6 mit Dreieck- und Quadratsymbolen gekennzeichneten Punkte einer Berechnung mit 10 Elementen (Netz 4 und 5 modifiziert) verdeutlichen.

Eine Abschätzung der Randstörung für $\Delta t = 0$ bei Verwendung von 84-Elementen kann - auch für zweidimensionale Probleme - mit Gleichung (4.14) vorgenommen werden.

Im Hinblick auf eine möglichst kleine Randstörung für $\Delta t = 0$ ist es von Vorteil, das Verhältnis d_1/d_2 möglichst klein zu wählen. Allerdings hat das auch einen Nachteil: Nach einer bestimmten Zeit kommt es an den innenliegenden Elementen zu Störungen. Diese treten zwar in gedämpfter Form auf, sie sind aber um so größer, je kleiner d_1/d_2 gewählt wurde. Bei sehr kleinen Werten d_1/d_2 baut sich der Porenwasserüberdruck im oberen Element ziemlich rasch ab, so daß sich das "Δt = 0-Problem" vom Rand nach innen in nahezu voller Größe verlagert.

Weiter hängt die Größe der Störung vom Verhältnis der Dicken der unter dem ersten Element gelegenen Elemente ab, insbesondere von d_2/d_3 - analog zur Abhängigkeit der Störung von d_1/d_2 bei $\Delta t = 0$. Bei gleichmäßiger Netzeinteilung (Netz 2) beträgt so der maximale Überschuß an der Untergrenze des 2. Elements (Punkt 5) nur noch 4 % ($\varepsilon_{p3}(t=0)$ = 27 %), bei einem Verhältnis d_1/d_2 = 0,1 und d_2/d_3 = 1 (Netz 4) ergibt sich an diesem Punkt eine maximale Störung von 13 % ($\varepsilon_{p3}(t=0)$ = 11 %). Bild 4.7 zeigt diese Störung für

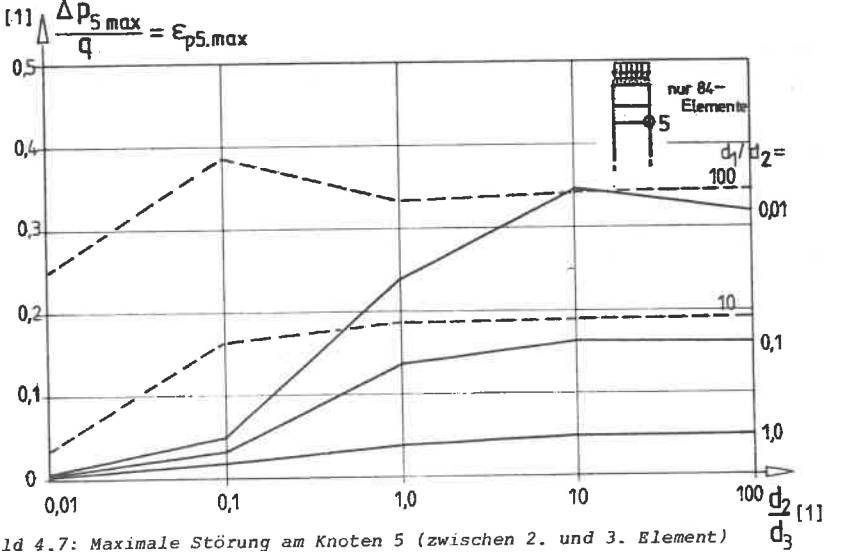


Bild 4.7: Maximale Störung am Knoten 5 (zwischen 2. und 3. Element) für t > 0, 10 x 84-Element

verschiedene Werte d_1/d_2 und d_2/d_3, wobei zu bemerken ist, daß die aufgetragenen Maximalwerte zu jeweils verschiedenen Zeitpunkten auftreten.

Bei der Netzeinteilung sollte man somit beachten, daß die Vergrößerung der Elemente vom Drainagerand weg allmählich vorgenommen wird. Hierbei sollte ein Dikkenverhältnis von etwa 0,1 von zwei aufeinanderfolgenden Elementen nicht unterschritten werden. Durch geschickte Elementwahl kann man so erreichen, daß die (räumlich und zeitlich gesehen) maximale Störung an den Knotenpunkten nicht mehr als ca. 8 % beträgt.

Wie am Anfang des Abschnitts 4.6 bereits erläutert wurde, tritt die Randstörung ab einer bestimmten Zeitschrittgröße Δt_1 gar nicht mehr auf. Das bedeutet, daß durch die Verwendung eines genügend großen Δt_1 das Randstörungsproblem umgangen werden kann.

Allerdings hat man dabei den Nachteil, daß sich bei Problemen mit plötzlich aufgebrachter Last der Anfangszustand gar nicht exakt berechnen läßt. Insbesondere bei der Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze wirkt sich das negativ aus: wegen der Nichtlinearität wird die Last inkrementell, also in mehreren kleinen Laststufen aufgebracht, und jede dieser Laststufen muß dann mit einem entsprechend großen Zeitschritt Δt berechnet werden. Dadurch kommt es rechnerisch bereits in der Belastungsphase zu einer Konsolidation, welche die Ergebnisse erheblich verfälschen kann.

Aufgrund der Bedingung, daß die Steigung des Porenwasserüberdrucks am Drainagerand ein bestimmtes, von der Ansatzfunktion reproduzierbares Maß nicht überschreiten darf, lassen sich untere Schranken für die Zeitschrittgröße Δt_1 ableiten.

Es gilt $$\Delta t_{1\,min} = f\,\frac{d_1^2}{c_v} \qquad (4.16)$$

VERMEER/VERRUIJT (1981) erhalten unter der Voraussetzung äquidistanter Elementeinteilung für lineare Interpolation $f = 1/3$ und für quadratische Interpolation $f = 1/20$. Zu einem ähnlichen Kriterium kommt man unter Verwendung einer Näherung für eine analytische Lösung, Ableitung siehe Anhang 4.3. Bei linearer Interpolation des Porenwasserüberdrucks ergibt sich $f = 1/\pi$, bei quadratischer Interpolation $f = 1/4\pi$.

Die Randstörung verschwindet demnach bei Verwendung des höherwertigen Ansatzes (88-Element) schon bei kleinerer Zeitschrittgröße Δt_1. Ein Vergleich der verschiedenen Kriterien anhand des eindimensionalen Beispiels mit 10 Elementen erfolgt weiter unten.

8 6 - E l e m e n t

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das bereits in Abschnitt 4.5 (s.a. Tafel 4.1) vorgestellte 86-Element entwickelt. Analog zu dem von TAYLOR (1972) für Verschiebungsansätze aufgezeigten Weg wird beim 86-Element für den Porenwasserüberdruck in einer Richtung eine quadratische, in der anderen Richtung eine lineare Interpolationsfunktion angesetzt. Die Ableitung der Elementmatrizen ist in Anhang 4.1 angegeben.

Es ist somit möglich, unterschiedliche Elementtypen, insbesondere 84- und 86-Elemente, innerhalb einer Struktur einzusetzen, ohne die Kompatibilität der Porenwasserüberdruck-Funktion an den Elementrändern aufzugeben.

Bild 4.8 zeigt den Verlauf der Ansatzfunktion bei zwei aneinander grenzenden Elementen vom Typ 84 und 86.

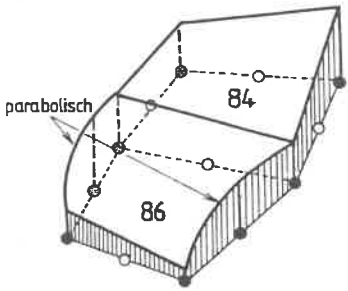


Bild 4.8:

Räumliche Darstellung der Porenwasserüberdruck-Ansatzfunktion bei zwei aneinander grenzenden Elementen vom Typ 84 und 86

Durch den Einsatz des 86-Elements soll versucht werden, die Vorteile des 88- und die des 84-Elements miteinander zu verbinden, d.h. beim 88-Element die bessere Approximation des Porenwasserüberdrucks - insbesondere an Stellen mit

großer Druckgradiente - und die damit verbundene kleinere Zeitschrittschranke für das Verschwinden der Randstörung, beim 84-Element die gute Konditionierung des Gleichungssystems bei kleinen Zeitschritten bzw. die Lösbarkeit für $\Delta t = 0$ und die bessere räumliche Dämpfung der Randstörung.

Die Kombination der beiden Elemente erfolgt in der Weise, daß die erste Elementschicht am ganz bzw. teilweise belasteten Drainagerand aus 86-Elementen besteht, während die übrigen, im Innern des Gebiets liegenden Elemente vom Typ 84 sind. Die 86-Elemente sind dabei so orientiert, daß die Richtung des größten Druckgradienten mit der Richtung der quadratischen Interpolation des Porenwasserüberdrucks übereinstimmt, was bei zweidimensionalen Problemen z.T. nur näherungsweise möglich ist. Bei geschichteten Böden kann es auch zweckmäßig sein, Reihen von 86-Elementen im Innern des Gebiets, z.B. an der Schichtgrenze auf der Seite des weniger durchlässigen Bodens, anzuordnen.

Die Zahl der Porenwasserüberdruck-Freiheitsgrade wird durch Einführung einiger weniger 86-Elemente nur unwesentlich erhöht, so daß sich das auf die Konditionierung des Gleichungssystems kaum negativ auswirkt.

Zur Untersuchung der Effektivität des 86-Elements soll weiter das durch 10 Elemente diskretisierte Oedometerproblem herangezogen werden. Für Netz 2 (gleichmäßige Elementeinteilung) ist der Einfluß der verschiedenen Elementtypen auf die Abhängigkeit der Konditionierung der Matrix **A** von der Zeitschrittgröße ΔT in Bild 4.9 dargestellt.

Es ist festzustellen, daß die Konditionszahl durch Einführung eines 86-Elementes am Rand gegenüber der Diskretisierung mit nur 84-Elementen nur sehr wenig zunimmt (lgK erhöht sich von 0,70 auf 0,89 für $\Delta T < 10^{-4}$). Die Matrix **A** ist auch für $\Delta T = 0$ nicht-singulär.

Die Art der Drainage-Randbedingung hat hier wie auch in den Fällen mit 10 88- bzw. 10 84-Elementen im für praktische Berechnungen relevanten Größenordnungsbereich von ΔT keinen nennenswerten Einfluß (in Bild 4.9 nicht dargestellt). Anders verhält es sich, wenn nur 86-Elemente verwendet werden: Während das ringsum geschlossene Beispiel das gleiche Verhalten zeigt wie der Fall mit 10 88-Elementen - **A** wird singulär für $\Delta t \to 0$ -, ist bei der Vorgabe $p = 0$ am oberen Rand das Gleichungssystem besser konditioniert und für $\Delta T = 0$ noch lösbar. Die Konditionszahl ist hier allerdings größer als im Fall mit 1 86- und 9 84-Ele-

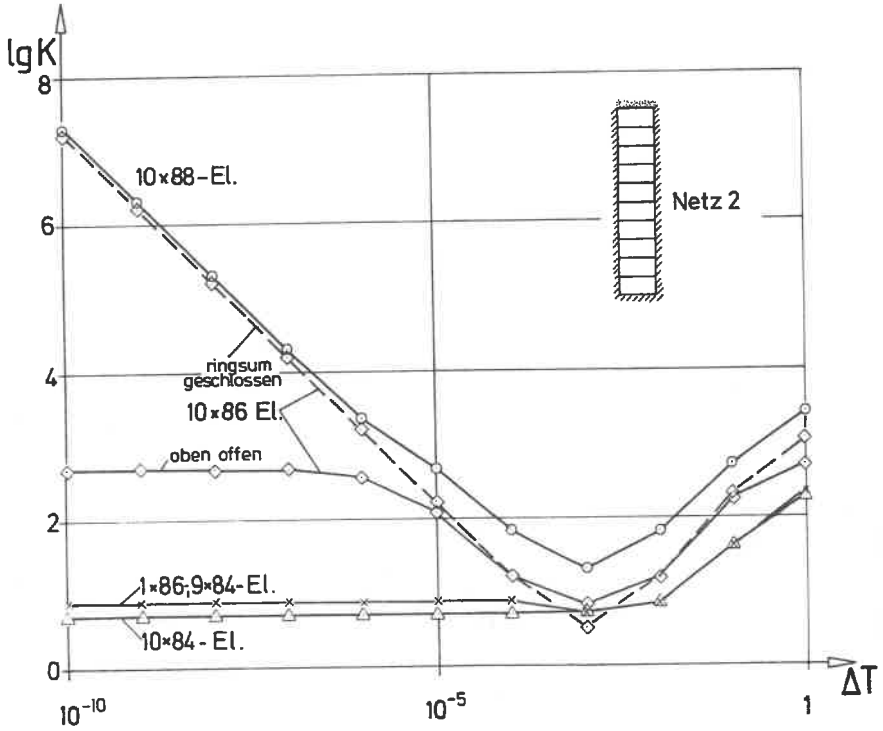
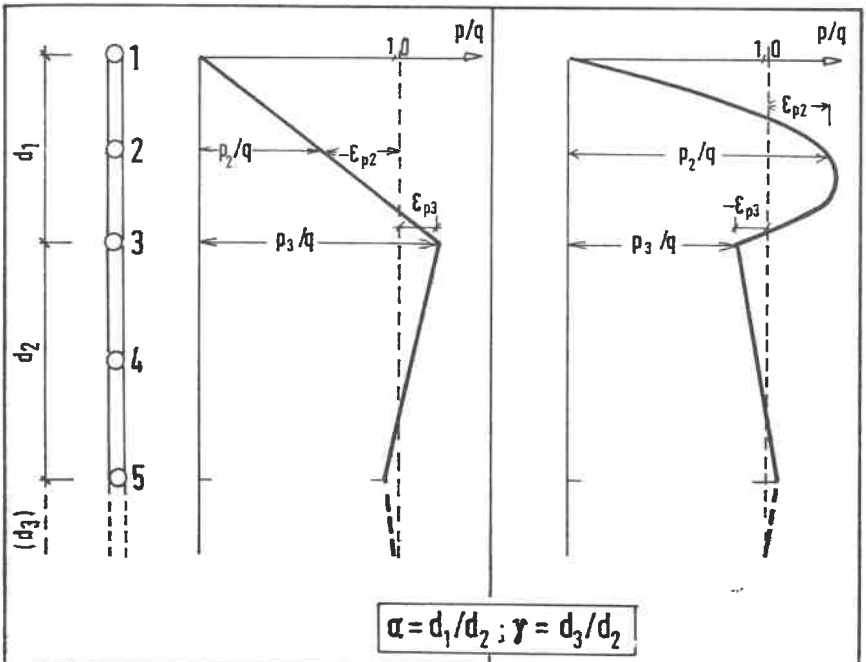


Bild 4.9: Abhängigkeit der Konditionszahl von der Zeitschrittgröße ΔT bei Verwendung verschiedener Elementtypen beim Oedometerproblem

menten. Die Möglichkeit, nur 86-Elemente einzusetzen, wird nicht weiter verfolgt, da das räumliche Dämpfungsverhalten ähnlich schlecht ist wie bei Verwendung von 10 88-Elementen.

Der Einfluß unterschiedlicher Netzeinteilungen (Netz 1, Netz 3) auf die Konditionierung bei Verwendung von 86-Elementen ist nicht dargestellt. Dieser Einfluß ist ähnlich wie in Bild 4.4 für 88-Elemente gezeigt und kann ebenfalls als untergeordnet angesehen werden.

Es soll nun die Störung, die sich für $\Delta t = 0$ unter Verwendung eines 86-Elementes am Rand ergibt, mit der bereits dargestellten Störung bei nur 84-Elementen ver-



		Nur 32-Elemente	1x33-Element, 32-Element(e)
2 Elemente	p_2/q	$\frac{6\alpha + 3}{8\alpha + 6}$	$\frac{6\alpha + 15}{4\alpha + 12}$
	p_3/q	$\frac{6\alpha + 3}{4\alpha + 3}$	$\frac{3}{\alpha + 3}$
	ε_{p_2}	$-\frac{2\alpha + 3}{8\alpha + 6}$	$\frac{2\alpha + 3}{4\alpha + 12}$
	ε_{p_3}	$\frac{2\alpha}{4\alpha + 3}$	$-\frac{\alpha}{\alpha + 3}$
3 Elemente	p_2/q	$\frac{9\alpha\gamma + 12\alpha + 6\gamma + 6}{12\alpha\gamma + 16\alpha + 12\gamma + 12}$	$\frac{9\alpha\gamma + 12\alpha + 30\gamma + 30}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 24\gamma + 24}$
	p_3/q	$\frac{9\alpha\gamma + 12\alpha + 6\gamma + 6}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 6\gamma + 6}$	$\frac{12\gamma + 12}{3\alpha\gamma + 4\alpha + 12\gamma + 12}$
	ε_{p_2}	$-\frac{3\alpha\gamma + 4\alpha + 6\gamma + 6}{12\alpha\gamma + 16\alpha + 12\gamma + 12}$	$\frac{3\alpha\gamma + 4\alpha + 6\gamma + 6}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 24\gamma + 24}$
	ε_{p_3}	$\alpha\,\frac{3\gamma + 4}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 6\gamma + 6}$	$-\alpha\,\frac{3\gamma + 4}{3\alpha\gamma + 4\alpha + 12\gamma + 12}$

Bild 4.10: Randstörung bei Verwendung von nur 32-Elementen und bei Verwendung eines 33-Randelements, $\Delta t = 0$

glichen werden. Auch hierzu wird zunächst die geschlossene Lösung eines eindimensionalen FE-Ansatzes (Herleitung siehe Anhang 4.2) für 2 bzw. 3 Elemente herangezogen.

Der Vergleich der beiden Fälle erfolgt auf der Basis gleicher Element- und Knotenzahl und somit gleicher Anzahl an Verschiebungsfreiheitsgraden. Dies ist deswegen zweckmäßig, weil ein Vergleich auf der Basis gleicher Anzahl an Unbekannten nicht möglich ist und bei einem auf gleicher Anzahl an Porenwasserüberdruck-Freiheitsgraden basierenden Vergleich sich eine wesentlich größere Diskrepanz in der Anzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade ergeben würde.

In Bild 4.10 sind für die Punkte 2 und 3 (Mitte bzw. Unterkante des oberen Randelements) die normierten Porenwasserüberdruck-Ordinaten p/q bzw. die Abweichungen $\varepsilon_p = (p-q)/q$ gegenüber der exakten Lösung $p \equiv q$ formelmäßig aufgelistet (vgl. auch Gleichungen (4.14) und (4.15)). Beim 32-(84-)Element ergeben sich die Werte dabei - entsprechend der Ansatzfunktion - durch lineare Interpolation zwischen $p = 0$ (Punkt 1) und p_3.

In Bild 4.11 sind die Beträge der Abweichung $|\varepsilon_p|$ in Abhängigkeit von dem Geometrie-Parameter $\alpha = d_1/d_2$ (für 3 Elemente mit $\gamma = d_3/d_2 = 1$) grafisch darstellt.

Der Vergleich zeigt, daß die Kombination 33- und 32- (86- und 84-) Elemente sowohl in Punkt 2 als auch in Punkt 3 günstigere Werte liefert, solange das Verhältnis der Elementdicken $\alpha = d_1/d_2 < 1{,}74$ ist.

Numerische Berechnungen mit mehreren zweidimensionalen Elementen haben auch bei der Diskretisierung mit 86- und 84-Elementen keine nennenswerte Abweichung vom Fall 1 x 33- und 2 x 32-Element ergeben. Weiter wurde untersucht, inwieweit sich bei Verwendung eines 86-Randelements die Randstörung über die Zeit nach innen fortpflanzt. Insbesondere für $\alpha \leq 1{,}0$ und $\gamma \leq = 1{,}0$ unterscheiden sich die Maximalwerte der Störung an Punkt 5 zwischen dem 2. und 3. Element kaum von den in Bild 4.7 für 10 84-Elemente dargestellten Werten.

Da bei praktischen Berechnungen i.a. $\alpha \leq 1{,}0$ sein wird, stellt die Kombination von 86- mit 84-Elementen eine nennenswerte Verbesserung in bezug auf das Randstörungsproblem bei $\Delta t = 0$ dar.

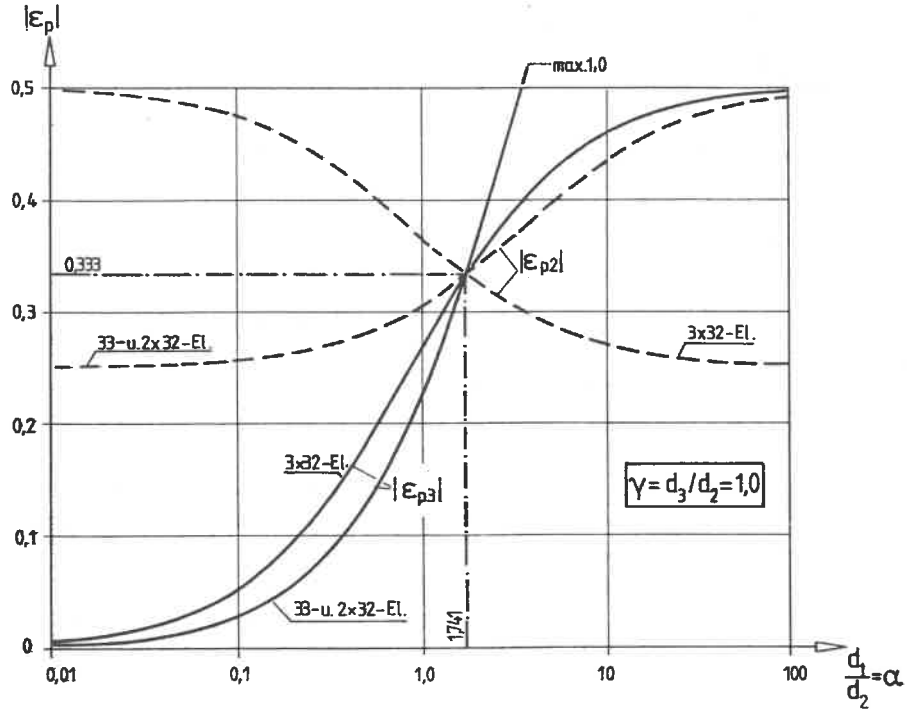


Bild 4.11: Vergleich der Randstörung für Δt = 0 bei Verwendung von nur 32-Elementen und bei Verwendung eines 33-Randelements

Im folgenden sollen nun noch die mit Gleichung (4.16) und den verschiedenen Faktoren f gegebenen Zeitschrittschranken für Δt_1 überprüft werden. Dazu werden mit den Netzen 2 und 4 (s. Tafel 4.2) numerische Berechnungen für verschiedene Zeitschrittgrößen Δt_1 durchgeführt. Die Diskretisierung des Oedometerproblems erfolgt dabei mit 10 84-Elementen, mit 1 86- und 9 84-Elementen sowie mit 10 86- bzw. 88-Elementen (86- und 88-Elemente liefern hier dieselben Ergebnisse).

In Tafel 4.3 sind die Zeitschranken, wie sie sich nach Gleichung (4.16) ergeben, den numerisch berechneten Zeitschrittgrößen, bei denen der "overshoot" verschwindet, in normierter Form ($\Delta T_1 = c_v \Delta t_1 / h^2$) gegenübergestellt. Das Kriterium für das Verschwinden des "overshoots" ist dabei, daß die Porenwasserüberdruck-Ordinaten an den Knoten des Randelements kleiner oder gleich der Auflast sind. Dies ist nur bei der linearen Ansatzfunktion (84-Element) identisch

Gleichung (4.16)	QUELLE	Interpolation	ΔT_{1min}					
			$\Delta T_{1min} = f\cdot(\frac{d_1}{h})^2$	NETZ 2 (gleichmäßig)		NETZ 4 (oben 1 dünnes Element)		
	Vermeer/Verruijt (1981)	linear	$f = 1/3$	$3{,}3\cdot10^{-3}$		$6{,}8\cdot10^{-5}$		
		quadrat.	$f = 1/20$		$5{,}0\cdot10^{-4}$		$1{,}0\cdot10^{-5}$	
	Anhang 4.3	linear	$f = 1/\pi$	$3{,}2\cdot10^{-3}$		$6{,}5\cdot10^{-5}$		
		quadrat.	$f = 1/4\pi$		$8{,}0\cdot10^{-4}$		$1{,}6\cdot10^{-5}$	
Numerische Berechnung mit CONSOL				$3{,}3\cdot10^{-3}$	$8{,}4\cdot10^{-4}$	$8{,}4\cdot10^{-4}$	$6{,}8\cdot10^{-5}$	$1{,}7\cdot10^{-5}$	$1{,}7\cdot10^{-5}$
10 Elemente:				nur 84	1 x 86, 9 x 84	nur 86 (88)	nur 84	1 x 86 9 x 84	nur 86 (88)

Tafel 4.3: Vergleich der nach Gl. (4.16) berechneten und der numerisch ermittelten Zeitschrittschranken ΔT_{1min}

mit der Forderung, daß im gesamten Element p = q ist. Beim quadratischen Ansatz (86- und 88-Element) kann bei p_2, p_3 < q innerhalb des Elements p_{max} < q sein. Das etwas strengere Kriterium, daß an allen Punkten p < q sein soll, ist erst bei Zeitschrittgrößen erfüllt, die etwa um den Faktor 2 größer sind als die in der unteren Zeile der Tabelle angegebenen Werte.

Der Vergleich zeigt für lineare Interpolation eine gute Übereinstimmung zwischen den nach Gleichung (4.16) ($f = 1/3$ bzw. $1/\pi$) berechneten und den numerisch ermittelten Zeitschranken. Auch bei quadratischer Interpolation ist eine gute Übereinstimmung zwischen dem mit $f = 1/4\pi$ (siehe Anhang 4.3) nach Gleichung (4.16) berechneten und dem numerisch ermittelten Wert für ΔT_{1min} festzustellen; verwendet man hingegen $f = 1/20$ nach VERMEER/VERRUIJT (1981), ergibt sich nach Gleichung (4.16) eine etwas zu kleine Zeitschrittschranke ΔT_{1min}.

Dabei ist festzustellen, daß bei den mit einem 86-Element am Rand und 9 84-Elementen diskretisierten Beispielen die Zeitschrittschranken durch die quadratische Interpolation des Randelements bestimmt werden. Es ergeben sich dieselben

Werte für ΔT_{1min} wie für den nur mit 86- bzw. 88-Elementen diskretisierten Fall. Weiter ist zu bemerken, daß auch bei ungleichmäßiger Elementeinteilung (Netz 4) nur die Dicke d_1 des oberen Elements die Zeitschrittschranke Δt_{1min} beeinflußt. Es ist also keine Äquidistanz, wie sie bei VERMERR/VERRUIJT (1981) vorausgesetzt wird, notwendig. Allerdings ergibt sich, wie zuvor schon erwähnt, bei zu starker Aufweitung eine weitere, wenn auch gedämpfte Störung an den innenliegenden Elementen.

Für die Abschätzung von ΔT_{1min} bzw. Δt_{1min} bei praktischen Berechnungen wird daher vorgeschlagen, bei linearer Interpolation f = 1/3 und bei quadratischer Interpolation f = 1/12 in Gleichung (4.16) zu verwenden, wobei jeweils die Art der Porenwasserüberdruck-Ansatzfunktion und die Dicke d_1 des R a n d - elements maßgebend sind.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß durch die Einführung des 86-Elements und dessen Verwendung zusammen mit den 84-Elementen die Vorteile des 84- und die des 88-Elements genutzt werden können, ohne gleichzeitig wesentliche Nachteile in Kauf nehmen zu müssen: Die Randstörung für $\Delta t_1 = 0$ wird bei der üblichen Elementgeometrie am belasteten Drainagerand reduziert und die Zeitschrittgröße, von der ab die Randstörung verschwindet, entspricht der günstigeren Schranke, die für 88-Elemente gilt. Durch die geringfügige Erhöhung der Porenwasserdruck-Freiheitsgrade wird die Konditionierung der Systemmatrix nur unwesentlich verschlechtert, das Gleichungssystem wird für $\Delta t = 0$ nicht singulär.

5. BEISPIELE

Die Erprobung und Verifizierung der bisher dargestellten Theorie soll anhand einiger Beispiele erfolgen.

Im Mittelpunkt steht die Nachrechnung der von ULRICH (1980) auf Konstanzer Seeton durchgeführten Lastplattenversuche, wobei je ein lastgesteuerter Versuch und ein Versuch mit konstanter Vorschubgeschwindigkeit herangezogen werden sollen.

Zuvor sollen die erforderlichen Stoffparameter durch die Auswertung entsprechender bodenmechanischer Standard-Laborversuche festgelegt werden. Daneben wird ein Dreiaxialversuch nachgerechnet, und als ebenes Anwendungsbeispiel erfolgt die Berechnung der Konsolidation unter einer Dammschüttung.

5.1 Bestimmung der Stoffparameter für den Konstanzer Seeton

Die Stoffparameter werden im Idealfall durch unabhängige, räumlich homogene Versuche bestimmt. Es ist jedoch i.a. schwierig, und insbesondere beim gekoppelten Konsolidationsproblem praktisch unmöglich, Versuche so durchzuführen, daß die einzelnen Einflüsse getrennt herausgefiltert werden können.

Die Versuche zur Ermittlung der für die numerischen Berechnungen erforderlichen Eingangsgrößen sollen - im Hinblick auf einen praktischen Einsatz - einfach gehalten werden, d.h. daß die Bestimmung der Parameter mittels bodenmechanischer Standardversuche möglich sein sollte. Andererseits ergibt sich aus der o.g. Forderung, daß zumindest einige verschiedenartige Teilversuche unabhängig voneinander ausgeführt werden müssen, um die Stoffparameter genügend genau zu bestimmen.

Im Fall des Konstanzer Seetons kann auf Kompressions- und Scherversuche von THAMM (1974), SCHAD (1979) und ULRICH (1980) sowie auf Durchlässigkeitsversuche von TRUMPFF (1980) zurückgegriffen werden. Als Ergänzung dazu wurden noch einige weitere Versuche im Dreiaxialgerät durchgeführt.

5.1.1 Hypoelastisches Stoffgesetz

Das von SCHAD (1979) vorgeschlagene hypoelastische Stoffgesetz wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit erweitert, siehe Abschnit 3.1. Aus diesem Grund, und

weil das von Schad vorgeschlagene Vorgehen bei der Bestimmung der Stoffparameter nicht als optimal angesehen wird, soll hier auf die Parameterermittlung etwas ausführlicher und zunächst in allgemeiner Form eingegangen werden.

Für die Bestimmung der in Tafel 3.1,S.53, aufgeführten Parameter werden folgende Versuche vorgeschlagen:

1. Kompressionsversuch:

Der Kompressionsversuch wird im Dreiaxialgerät mit allseitig gleichem Druck ($\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = \sigma_m'$) gefahren. Die Bodenprobe wird dabei vollkommen drainiert. Um den Porenwasserdruck im Innern vernachlässigbar klein zu halten, ist die Belastung in kleinen Laststufen mit genügend großen Konsolidationszeiten aufzubringen. Neben der Erstbelastungskurve muß eine Ent- und Wiederbelastungsschleife durchfahren werden. Die Bestimmung der Parameter K_0, α_K und K_{UR} ist in Bild 5.1 schematisch dargestellt.

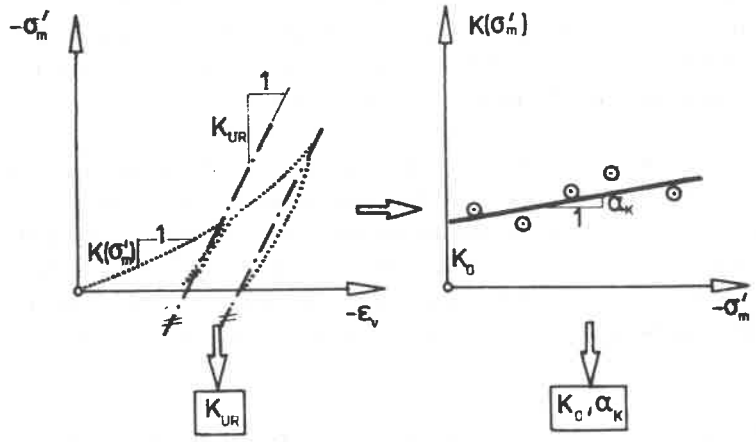


Bild 5.1: Bestimmung der Parameter K_0, α_K und K_{UR} aus Kompressionsversuchen

2. Scherversuch:

Im Dreiaxialgerät wird ein konsolidierter, undrainierter (CU-)Versuch standardmäßig (σ_3 = const) durchgeführt. Hierbei können auch Proben, die einer inkrementellen Konsolidation gemäß Punkt 1 unterworfen waren, herangezogen werden.

Wegen der Festlegung des Schubmoduls für Ent- und Wiederbelastung ist an mindestens einer Probe eine entsprechende Belastungsschleife zu fahren. Die Auswertung der Meßergebnisse ist in den Bildern 5.2, 5.3 und 5.4 schematisch dargestellt.

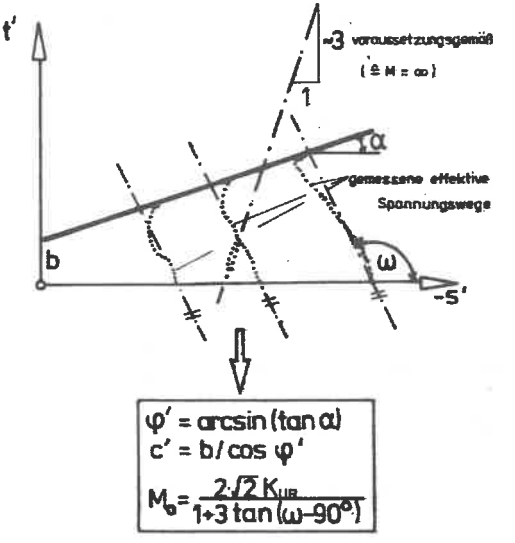


Bild 5.2:

Bestimmung der Parameter φ', c' und M_0 anhand der effektiven Spannungswege eines CU-Versuchs (M_0 s. Anhang 5.1)

Die Nachrechnung der Spannungs-Verformungslinie für verschiedene Exponenten n (Bild 5.4) erfolgt gemäß Anhang 3.2, und zwar wäre für $n \neq 1$ die Lösung nur mittels numerischer Integration möglich. Auf diese etwas umfangreiche Bestimmung des Exponenten kann im Fall, wenn bereits Erfahrungen mit ähnlichen Böden vorliegen, verzichtet werden. Es genügt dann eine Schätzung (n = 1-2), der Einfluß von n auf die Ergebnisse ist von nicht zu großer Bedeutung.

Zu den Ent- und Wiederbelastungsmoduln ist zu bemerken, daß diese Werte nur bedingt reproduzierbar sind. Bei den entsprechenden Versuchsspuren sind nämlich die zu messenden Verformungsgrößen im allgemeinen sehr klein. Es zeigt sich allerdings, daß bei der vorliegenden Aufgabenstellung eine ungefähre Festlegung durch die Größenordnung dieser Verformungsmoduln genügt.

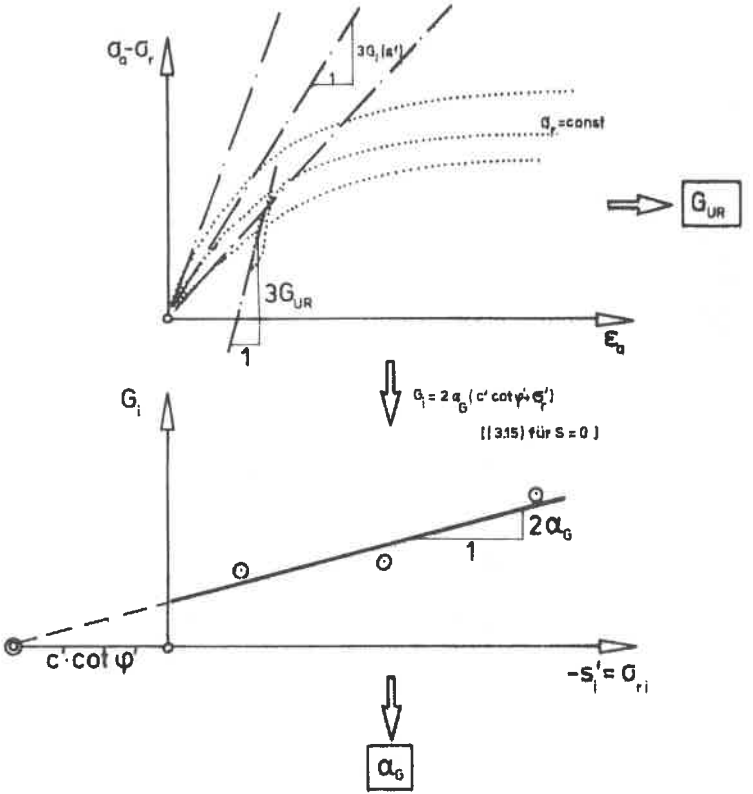


Bild 5.3: Bestimmung der Parameter G_{UR} und α_G anhand der Last-Verformungslinien eines CU-Versuchs (Index i = Anfangswerte bei Beginn des Abscherens)

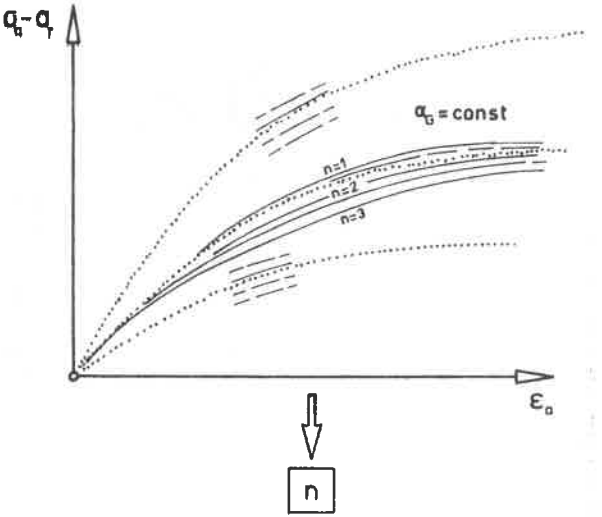


Bild 5.4: Bestimmung des Exponenten n durch Parameter-Variation bei der Nachrechnung der Last-Verformungslinien eines CU-Versuchs

Es ist außerdem darauf zu achten, daß die Ent- und Wiederbelastungsmoduln größer sein müssen als die Maximalwerte der entsprechenden Erstbelastungsmoduln. Es kann sonst bei der numerischen Berechnung zu dem in Bild 5.5 schematisch dargestellten Effekt kommen, der physikalisch nicht zulässig ist: Es würde in einer Belastungsschleife Energie gewonnen. Ansatzgemäß sind die Moduln für Ent- und Wiederbelastung konstant, in Wirklichkeit trifft dies nur näherungsweise in einem begrenzten Spannungsbereich zu.

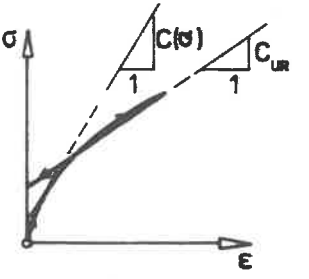


Bild 5.5:

Mögliche unzulässige Belastungsschleife bei falscher Parameterwahl (Passivität!)

Zur Bestimmung der Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes für den Konstanzer Seeton wurden mehrere Dreiaxialversuch-Serien ausgewertet. In Anhang 5.2 ist für je einen Versuchstyp die Auswertung exemplarisch angegeben.

Als Eingangsparameter für die numerischen Berechnungen werden die folgenden Mittelwerte (s. Anhang 5.3) verwendet:

$K_0 = 400$ kN/m², $\alpha_K = 15$, $K_{UR} = 2500$ kN/m²;

$\varphi' = 23°$, $c' = 7$ kN/m², $M_0 = 2000$ kN/m²,

$\alpha_G = 19$, $G_{UR} = 3700$ kN/m², $n = 1$.

Die Versuchsergebnisse von THAMM (1974) wurden hier nicht berücksichtigt, da diese Versuche überwiegend an aufbereitetem Seeton durchgeführt wurden. Beim hypoelastischen Stoffgesetz gehen nämlich in die Parameter indirekt die lokalen Lagerungsbedingungen wie Überdeckung, Vorbelastung usw. ein.

5.1.2 Elastoplastisches Stoffgesetz

Es kann auf die von THAMM (1974) für den Konstanzer Seeton bestimmten und von SCHAD (1979) verwendeten Parameter zurückgegriffen werden. Denn im Gegensatz zum hypoelastischen Modell beschreibt das "Cam-Clay-Modell" das Verformungsverhalten einer bestimmten geologischen Formation, unabhängig von der örtlichen Lagerungsdichte, und die für aufbereiteten Boden festgelegten Parameter gelten - theoretisch exakt - auch für den in der Natur anstehenden normal-konsolidierten Boden. Durch die Einbeziehung der zusätzlich durchgeführten Laborversuche an ungestörten Seetonproben (s.a. 5.1.1 bzw. Anhang 5) ergeben sich geringfügige Änderungen der Parameter. Für das von SCHAD (1979) vorgeschlagene Modell werden daher folgende Eingangsgrößen für die numerischen Berechnungen festgelegt:

$\lambda_c = 0{,}13$, $\lambda_s = 0{,}04$, $e_1 = 1{,}15$ für $p_1 = 1$ kN/m²;

$M_{CSL} = 1{,}07$, $\varphi' = 21°$ (= Dilatanzwinkel ψ, da assoz. Fließregel angenommen),

$c_o = 0{,}4$, $c_r = 1{,}0$, $\nu' = 0{,}15$ (Querdehnungszahl im elastischen Bereich).

Zur Veranschaulichung dieser Parameter sind in Anhang 5.4 die wichtigsten grafischen Darstellungen aus der genannten Arbeit abgedruckt.

5.1.3 Filtergesetz

Auch die Bestimmung des Durchlässigkeitskoeffizienten k des Darcyschen Filtergesetzes erfolgt aus den eingangs genannten Gründen zweckmäßigerweise direkt im Durchströmungsversuch. Es wird prinzipiell unterschieden zwischen Versuchen mit konstanter und solchen mit fallender Druckhöhe, siehe hierzu DIN 18130.

Daneben wird die Durchlässigkeit auch oft durch Auswertung des Zeitsetzungsverlaufs im Oedometerversuch gewonnen. Bei dieser Methode ist der k-Wert nur indirekt in Verbindung mit der Konsolidationstheorie bestimmbar, wodurch eine gegenseitige Beeinflussung mit den Parametern des Korngerüsts gegeben ist (s.a. Anfang Abschnitt 5.1).

Die Durchlässigkeit des Konstanzer Seetons wurde von TRUMPFF (1980) bestimmt. Für eine mittlere Porenzahl von $e \simeq 1{,}0$ ergibt sich danach ein Durchlässigkeitswert von $k = 5.10^{-10}$ m/s.

5.2 Nachrechnung eines Dreiaxialversuchs

Die zur Beschreibung des Scher- und Porenwasserdruckverhaltens maßgeblichen Bodenparameter wurden anhand von dreiaxialen CU-Versuchen bestimmt, s. Abschnitt 5.1. Diese Versuche wurden zur Kontrolle des abgeleiteten Algorithmus und dessen Konvergenzverhaltens nachgerechnet. Da solche Berechnungen zwar notwendig sind, physikalisch gesehen jedoch keine neuen Informationen liefern, sind sie hier nicht dokumentiert.

Einen Dreiaxialversuch mit gegenüber der o.g. Versuchsart geänderten Randbedingungen stellt der sogenannte CD-Versuch dar. Die Bodenprobe wird nach der isotropen Konsolidation bei offenem Porenwasserdrucksystem mit einer relativ geringen Geschwindigkeit abgescher t.

Ein am Konstanzer Seeton durchgeführter CD-Versuch mit einer Abschergeschwindigkeit von 0,006 mm/min wird unter Verwendung der beiden beschriebenen nichtlinearen Stoffgesetze mit den in Abschnitt 5.1 festgelegten Parametern nachgerechnet. Die Seitenspannung beträgt σ_r = 50 kN/m². Das axialsymmetrische Problem wird unter Vernachlässigung der Endflächenreibung entsprechend Netz 1, Tafel 4.2, unter Berücksichtigung der in Abschnitt 4.6 gewonnenen Erkenntnisse diskretisiert, s. Bild 5.6. Die Belastung wird über vorgeschriebene Axialverschiebungsinkremente in 100 Zeitschritten aufgebracht.

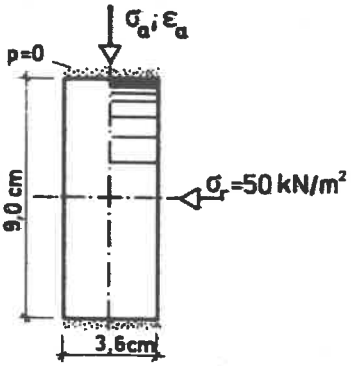


Bild 5.6: Diskretisierung des CD-Versuchs

In Bild 5.7 sind die Ergebnisse der Nachrechnung dargestellt.

Neben der gekoppelten Analyse unter Berücksichtigung der Drainage-Randbedingung und der tatsächlichen Belastungsgeschwindigkeit werden die Sonderfälle des ideal drainierten, entkoppelten Falls ($p \equiv 0$) und des undrainierten, ringsum geschlossenen Falls betrachtet. Diese Sonderfälle sind innerhalb der hier angewandten Theorie unabhängig von der tatsächlichen Belastungsgeschwindigkeit.

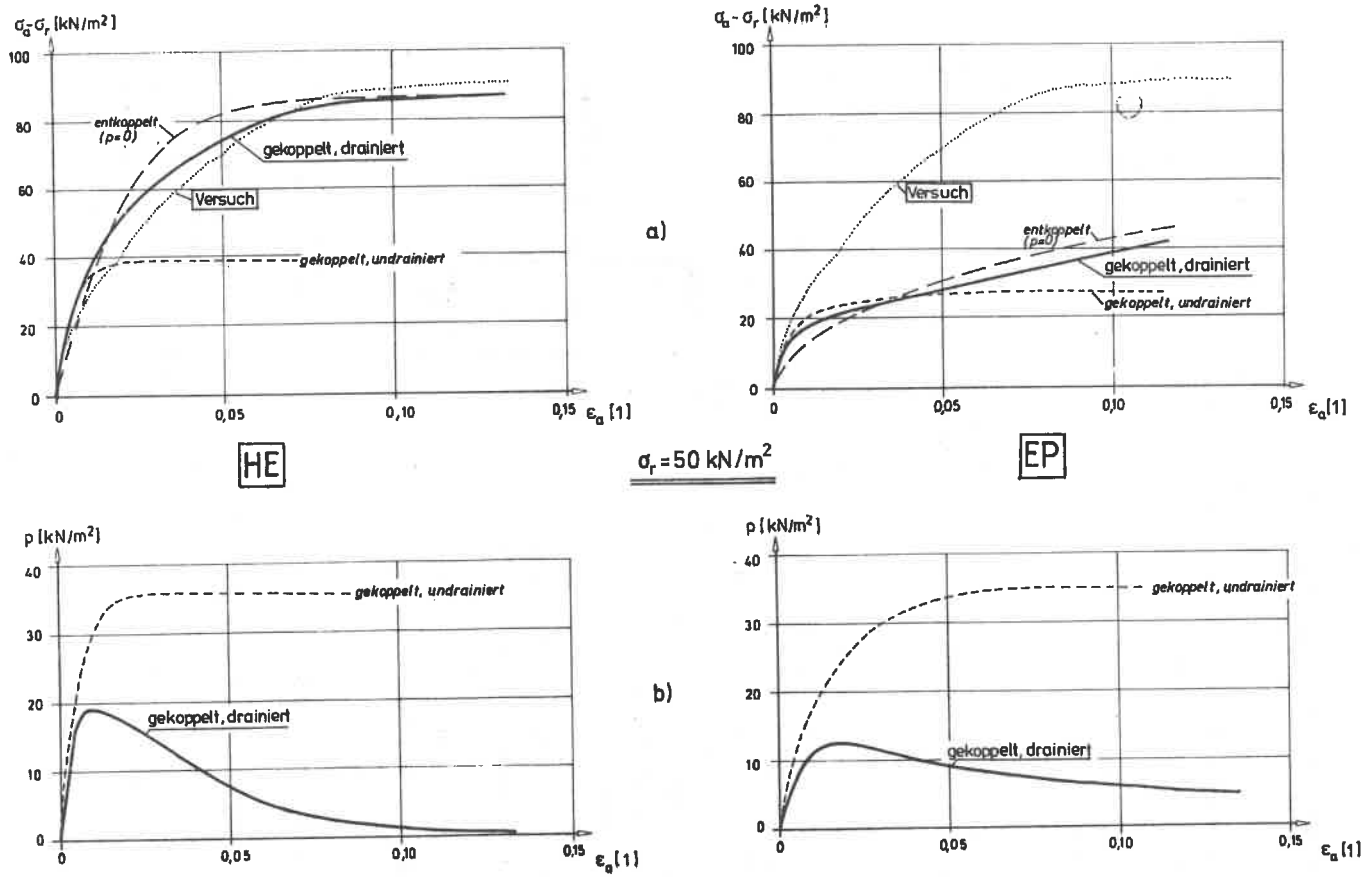


Bild 5.7: Nachrechnung eines CD-Versuchs mit dem hypoelastischen (HE) und mit dem elastoplastischen (EP) Stoffgesetz
a) Last-Verformungslinien, Vergleich mit Versuchsergebnissen b) Porenwasserüberdruck in Probenmitte

Bei den nachgerechneten Spannungs-Verformungslinien, Bild 5.7 a, ist für beide Stoffgesetze ein Unterschied zwischen den Kurven der realistischen gekoppelten und der entkoppelten, der üblichen Interpretation des CD-Versuchs entsprechenden Analyse ($p \equiv 0$) festzustellen: Die Kurve der gekoppelten Berechnung mit offenem System entspricht am Anfang derjenigen der zum Vergleich herangezogenen Berechnung des undrainierten Zustands: die Probe verhält sich wegen des noch nicht abfließenden Porenwassers steifer. Im weiteren Verlauf steigt die Kurve dann flacher an und erreicht schließlich die höhere Scherfestigkeit des berechneten vollkommen drainierten Falls.

Die Übereinstimmung zwischen Versuch und Nachrechnung ist beim hypoelastischen Stoffgesetz (HE) gut; beim elastoplastischen Stoffgesetz (EP) ist nur im Anfangsbereich eine Übereinstimmung festzustellen. Eine eindeutige Grenzlast wird hier nicht erreicht, vielmehr verfestigt sich das Material mit zunehmender Verformung. Die große Diskrepanz zwischen Meß- und Rechenergebnissen ist allerdings nicht durch die Extrapolation vom CU- auf den CD-Versuch, sondern in erster Linie durch den Ansatz bedingt. Denn zur Beschreibung des Scherverformungsverhaltens zwischen hydrostatischem Spannungszustand und volumenkonstantem Fließen steht bei der Auswertung des CU-Versuchs für die Zwecke des elastoplastischen Stoffgesetzes als direkt zu bestimmender Parameter nur c_0 zur Verfügung. Dieser wird aber so festgelegt, daß eine optimale Übereinstimmung bezüglich der Porenwasserüberdrücke erzielt wird.

Ein weiterer indirekter Einfluß auf das Scherverformungsverhalten ist über das Verfestigungsgesetz durch die Parameter λ_c und λ_s gegeben. Durch Anpassung dieser Parameter könnte eine bessere Übereinstimmung erzielt werden, wobei jedoch das Kompressionsverhalten unzutreffender oder widersprüchlich erfaßt würde. Auf eine Parameteranpassung auf dieser Stufe soll verzichtet werden.

In Bild 5.7 b ist die Porenwasserüberdruckentwicklung in Probenmitte, wie sie sich bei der gekoppelten Analyse mit Randdrainage ergibt, dargestellt. Damit wird der zum Idealfall $p \equiv 0$ unterschiedliche Verlauf der entsprechenden Last-Verformungslinie in Bild 5.7 a weiter verdeutlicht. Meßergebnisse für den Porenwasserüberdruck in Probenmitte liegen nicht vor. Der Anfangsanstieg des Porenwasserüberdrucks entspricht etwa demjenigen des zum Vergleich dargestellten Sonderfalls des undrainierten Systems (CU-Versuch).

5.3 Nachrechnung der Lastplattenversuche von Ulrich

5.3.1 Numerische Voruntersuchungen

Nichtlineare Berechnungen des Lastplattenversuchs auf Konstanzer Seeton wurden bereits von THAMM (1974) und SCHAD (1979) durchgeführt. Hierbei wurden allerdings nur reine Verschiebungsansätze zur Analyse des undrainierten Anfangszustands bzw. des drainierten Endzustands verwendet.

Für die gekoppelte Berechnung des Lastplattenproblems wurden daher einige Voruntersuchungen, zunächst bei linear-elastischem Bodenverhalten, durchgeführt.

Hinweise auf die räumliche und z.T. auch auf die zeitliche Diskretisierung von ähnlichen Problemen (schlaffe Streifen- oder Kreislast) finden sich u.a. bei RUNESSON (1978), NISHIZAKI et al. (1982), MATSUMATO/KO (1982) und ADACHI et al. (1982). Die äußere Begrenzung des wegen der großen Mächtigkeit der Tonschicht als unendlicher Halbraum zu behandelnden Gebiets erfolgt bei den einzelnen Autoren unterschiedlich.

Nach den von GUSSMANN/SCHAD (1974) für Verschiebungsansätze angegebenen Kriterien sollten die äußeren Abmessungen des Elementnetzes bei einem Lastplattenradius von R = 0,3 m wie folgt sein (siehe Bild 5.8):

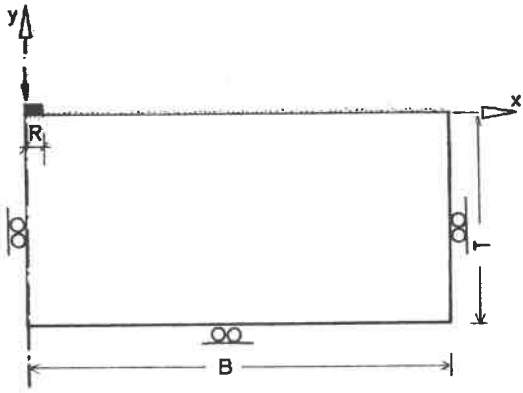


Bild 5.8:

Äußere Diskretisierung des Lastplattenproblems

Die Tiefe T soll 24 • R = 7,20 m betragen, wenn der Einfluß auf die Setzung vernachlässigbar klein sein soll, während der Einfluß des unteren Randes auf die Spannungen ab T = 12 • R = 3,60 m vernachlässigt werden kann. Dabei soll $B/T \geq 2$ gewählt werden. Die äußeren Abmessungen werden hier mit T = 4 m und B = 8 m festgelegt.

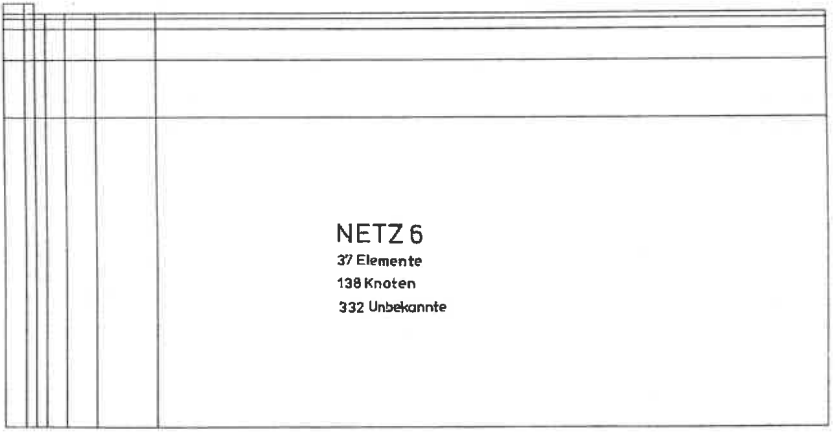
Es zeigt sich, daß der Einfluß der räumlichen Diskretisierung im undrainierten Anfangszustand im allgemeinen am größten ist. So betragen die Verschiebungs-Abweichungen von der exakten Lösung hier - je nach innerer Diskretisierung (s.u.)- 7 bis 9 %. Die Abweichung wird wesentlich geringer (1 - 2 %), wenn man die Ergebnisse der FEM-Lösung einer geschlossenen Lösung für die entsprechende Schichtdicke gegenüberstellt. Bei der letztgenannten Lösung werden näherungsweise Differenzen der nach dem weiter unten angegebenen Verfahren berechneten Verschiebungen gebildet.

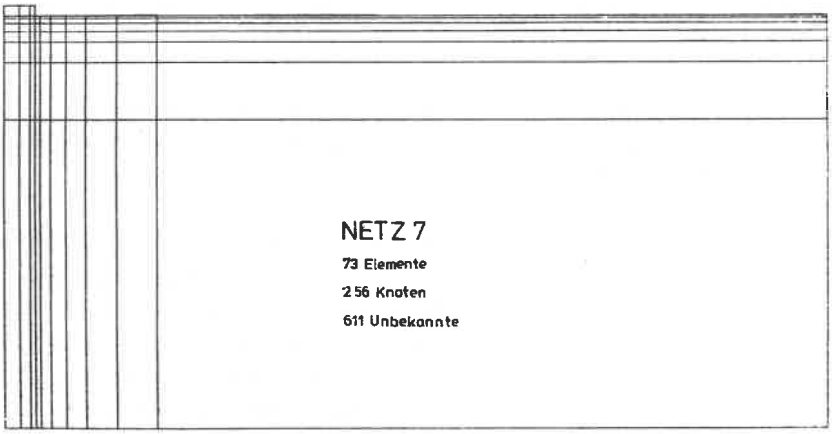
Da bei der nichtlinearen Berechnung der Hauptanteil der Verschiebungen durch die plastischen Verformungen im unmittelbaren Einflußbereich der Lastplatte bestimmt wird, ist der Fehler infolge der äußeren Begrenzung relativ klein.

Es ist zu bemerken, daß die Randabstände nicht dadurch beliebig geändert werden können, daß die am Rand liegenden Elemente entsprechend verlängert werden, da sonst zu ungünstige Element-Seitenverhältnise entstehen und sich dies in einer nicht mehr vernachlässigbaren numerischen Ungenauigkeit bemerkbar macht. Auf die Möglichkeit, in den Randbereichen entsprechend mehr Elemente anzuordnen, soll verzichtet werden, da dies unwirtschaftlich hohe Rechenzeiten ohne wesentliche Genauigkeitssteigerung mit sich bringt.

Für die innere Diskretisierung werden bei gleichen äußeren Abmessungen drei verschieden feine Elementnetze zugrunde gelegt, Netze 6 - 8, Bild 5.9. In den meisten der genannten Veröffentlichungen werden Netze verwendet, die bezüglich der Feinheit zwischen Netz 6 und Netz 7 liegen.

Die Aufteilung in Elemente wurde unter Berücksichtigung der in Abschnitt 4.6 gewonnenen Erkenntnisse und - im Hinblick auf den späteren Vergleich zwischen Rechnung und Versuch - der Lage der Porenwasserdruck-Meßstellen bei den Versuchen vorgenommen. Dabei wurden am oberen Rand 86- und im Innern 84-Elemente angeordnet; die Lastplatte wurde durch 80-Elemente diskretisiert.





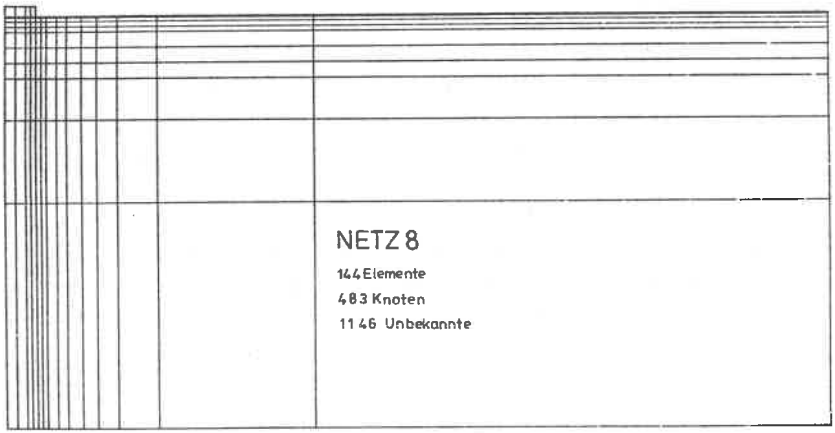


Bild 5.9: Räumliche Diskretisierung des Lastplattenproblems

Der Einfluß der räumlichen Diskretisierung soll anhand der Porenwasserüberdruck-Verteilung für den Anfangszustand (t = 0) gezeigt werden. Die Porenwasserdruck-Randbedingung am oberen Rand entspricht dabei derjenigen während der Konsolidationsphase (p = 0 für y = 0).

Die "exakte" Porenwasserüberdruck-Verteilung erhält man für $\nu_u = 0{,}5$ (Querdehnungszahl im undrainierten Zustand) unter Verwendung der Lösungen für Kreisringlasten auf unendlichem Halbraum. Die numerische Integration für die starre Platte erfolgt dabei nach Gußmann, siehe SMOLTCZYK/GUSSMANN (1981).

In Bild 5.10 sind die Porenwasserüberdruck-Verteilungen für t = 0 in verschiedenen Schnitten dargestellt. Es zeigt sich, daß Netz 7 im allgemeinen fein genug ist, um die Porenwasserdrücke genügend genau zu repräsentieren. Es zeigt sich aber auch, daß Störungen an den Unstetigkeitsstellen nicht zu vermeiden sind: Zum einen tritt die für eindimensionale Fälle bereits untersuchte Randstörung ebenfalls auf, siehe insbesondere Bild 5.10 a, zum andern erhält man in der Umgebung der Lastplattenkante (x = R, y = 0), an der nach der exakten Lösung ein unendlich großer Wert für p auftritt, Störungen. Diese Spannungspitze tritt um so stärker in Erscheinung, je feiner die Elementeinteilung um die Lastsplattenkante vorgenommen wird. Im Hinblick auf die nichtlineare Berechnung des Lastplattenproblems ist zu bemerken, daß dort eine Konvergenz durchaus festgestellt werden kann, da im Zuge der inkrementellen/iterativen Berechnung die in Wirklichkeit auch nicht auftretenden Spannungsspitzen umgelagert werden.

Die gegenseitige Beeinflussung der beiden Effekte zeigt Bild 5.11, wo für Netz 8 die Fälle "oberer Rand drainiert" und "oberer Rand undrainiert" einander gegenübergestellt sind.

In Bild 5.12 wird für denselben Schnitt (x = R = 0,3 m) der bei der Lastplattenberechnung sonst nicht verwendete Fall mit nur 84-Elementen zum Vergleich herangezogen. Es zeigt sich wiederum der Vorteil des 86-Elements, daß ohne wesentliche Erhöhung der Anzahl der Unbekannten der Verlauf des Porenwasserdrucks im Randbereich besser erfaßt werden kann.

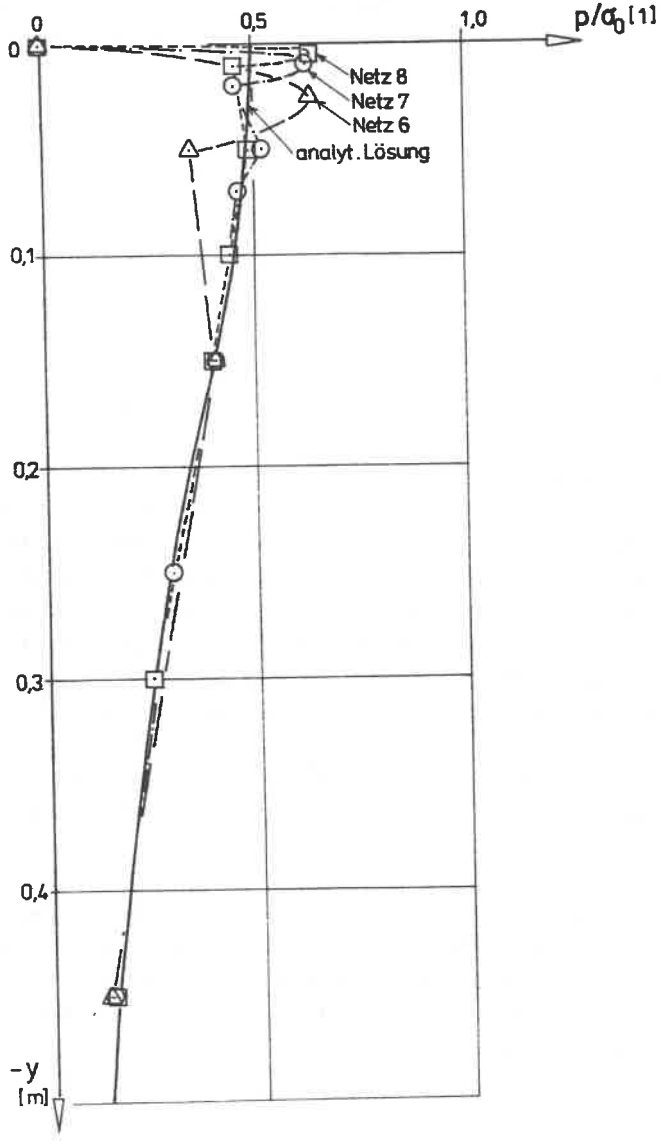


Bild 5.10: Lastplatte, linear-elastisch, t = 0
Porenwasserüberdruck-Verteilung
a) Vertikalschnitt x = 0 (Lastplattenachse)

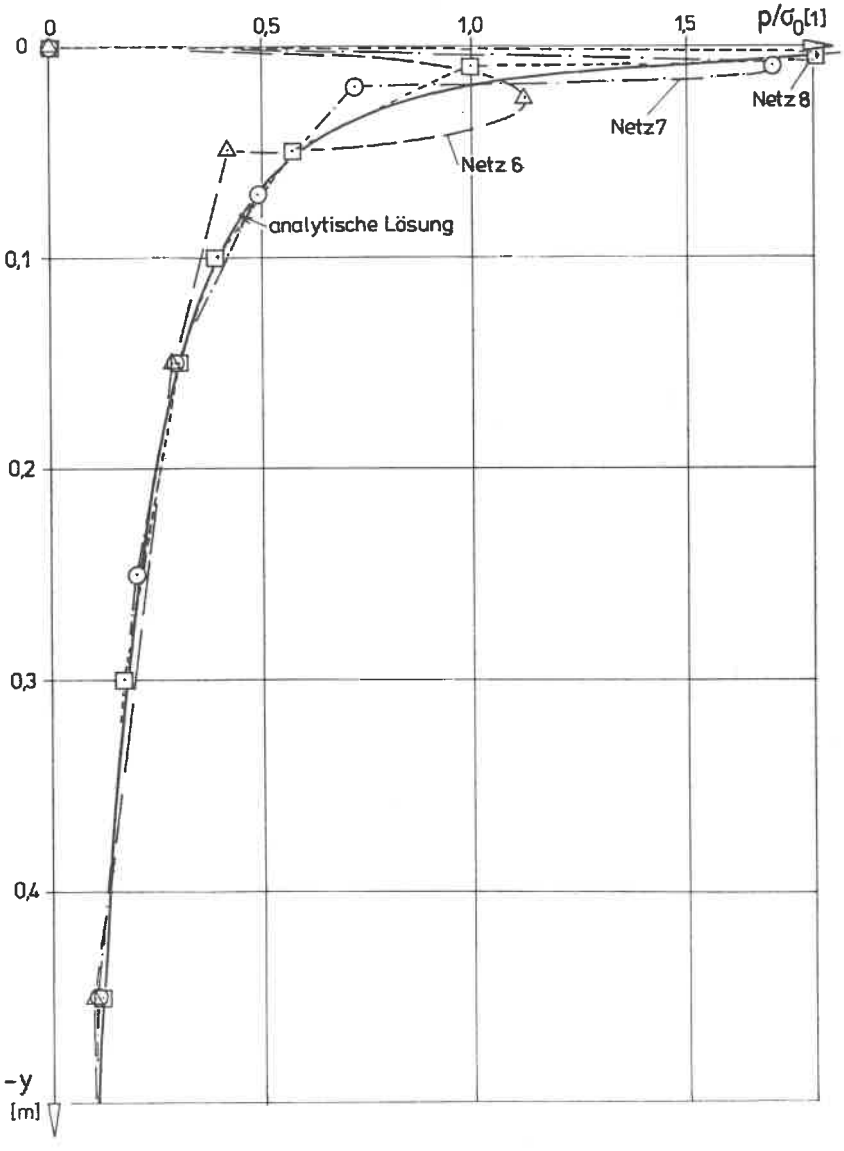


Bild 5.10: Lastplatte, linear-elastisch, t = 0
Porenwasserüberdruck-Verteilung
b) Vertikalschnitt x = 0,3 m (x=R, Lastplattenkante)

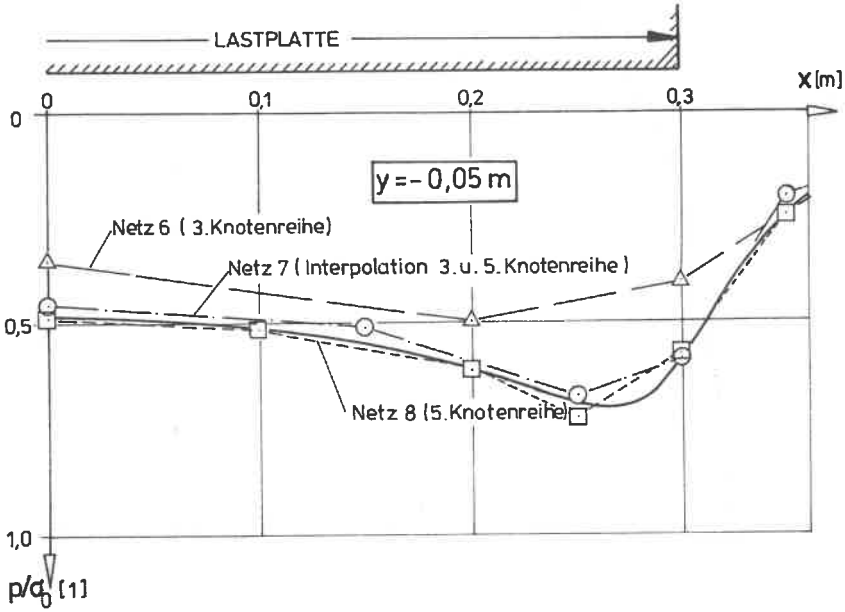


Bild 5.10: Lastplatte, linear-elastisch, t = 0
Porenwasserüberdruck-Verteilung
c) Horizontalschnitt y = 0,05 m

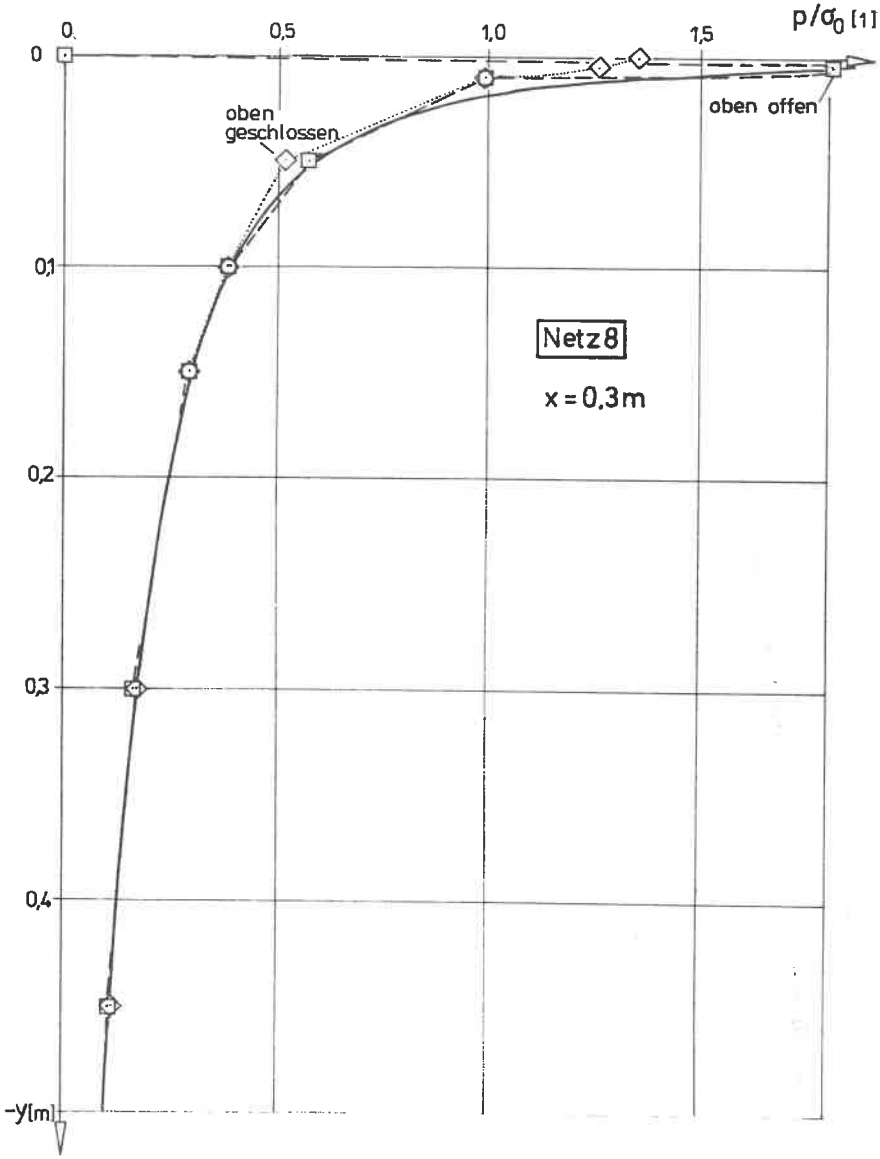


Bild 5.11: Lastplatte, linear-elastisch, t = 0
Vergleich Drainage-Randbedingung oben offen/oben zu
Vertikalschnitt x = 0,3 m (x=R, Lastplattenkante)

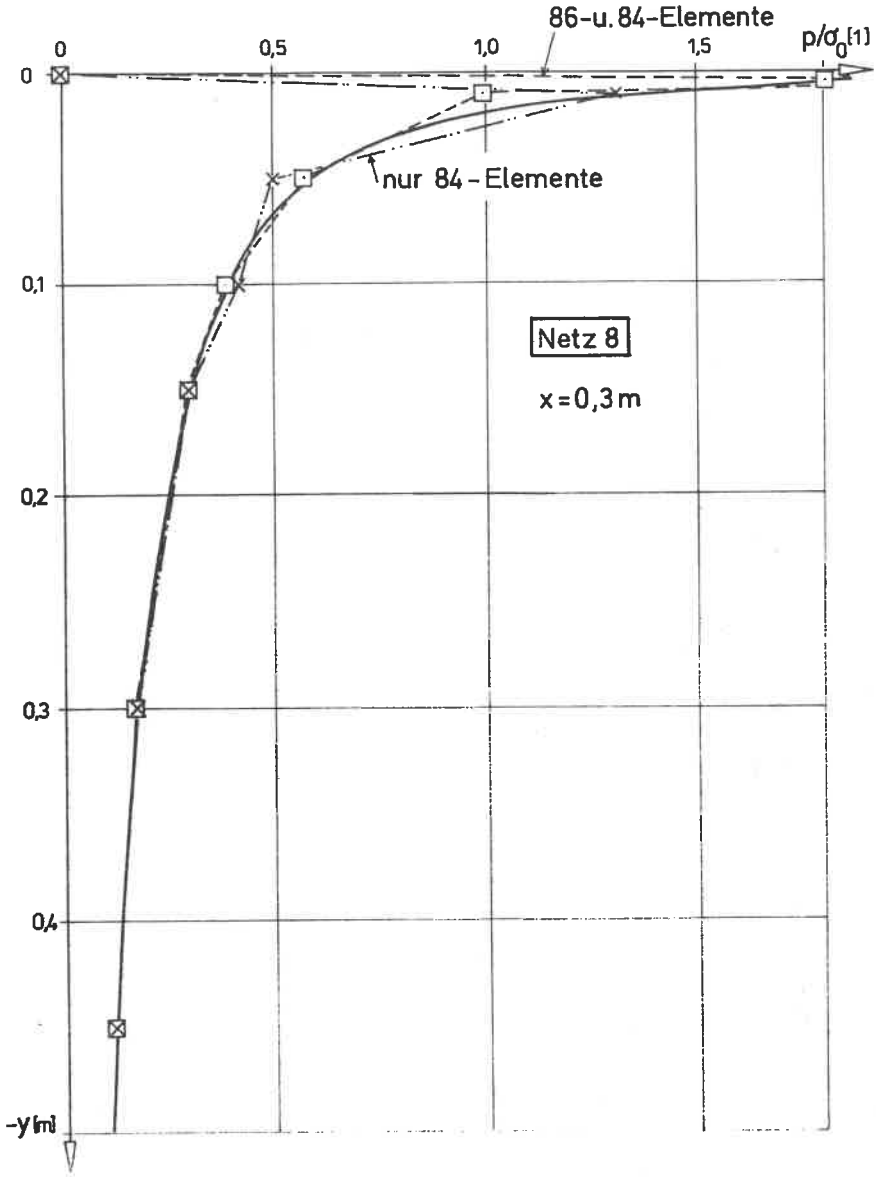


Bild 5.12: Lastplatte, linear-elastisch, t = 0
Vergleich nur "84-Elemente" mit "86- und 84-Elemente"
Vertikalschnitt x = 0,3 m (x=R, Lastplattenkante)

Im folgenden soll der Einfluß der zeitlichen Diskretisierung untersucht werden. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Belastung der Platte zum Zeitpunkt t = 0 plötzlich aufgebracht und über die Zeit konstant gehalten wird.

Es ist zweckmäßig, die Zeitschrittgröße dem Fortschritt der Konsolidation anzupassen, d.h. am Anfang sehr kleine und dann zunehmend größere Zeitschritte zu wählen. Eine feste Regel für die Wahl der Zeitschritte gibt es nicht. Für die praktische Berechnung von Problemen wie dem der Lastplatte hat sich das folgende Vorgehen zur Festlegung der Zeitschrittgröße als brauchbar erwiesen:

Der zeitliche Verlauf der Setzung (die als räumlicher Integralwert des Porenwasserüberdrucks angesehen werden kann) wird zunächst abgeschätzt. Hierzu können linearelastische Lösungen der eindimensionalen Konsolidationstheorie, der Diffusionstheorie oder Ergebnisse ganz grober numerischer Vorberechnungen herangezogen werden.

Es wird eine bestimmte Anzahl an Zeitschritten, n, vorgegeben. Die Zeitschrittgrößen werden festgelegt, indem die - abgeschätzte Kurve für den zeitlichen Verlauf des Verfestigungsgrades in n gleiche Inkremente des Verfestigungsgrades unterteilt wird. Die Zeitschrittinkremente können dann auf der Abszissenachse abgegriffen werden, siehe Bild 5.13.

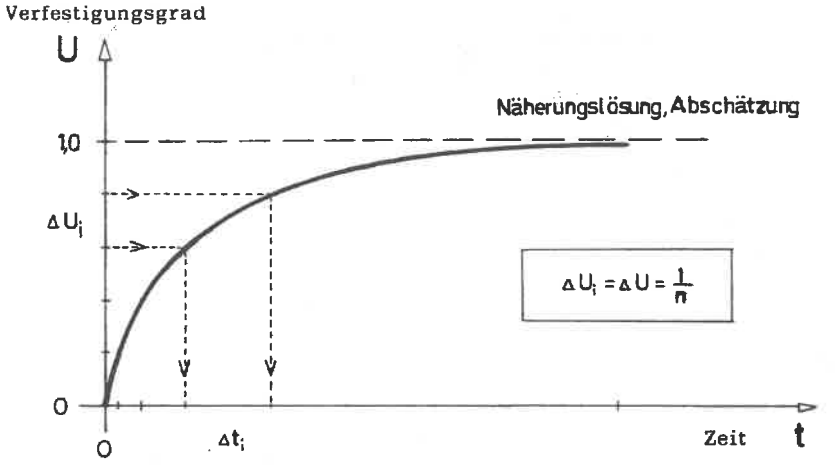


Bild 5.13: Festlegung der Zeitschrittgrößen

Der Verfestigungsgrad U ist definiert durch

$$U = \frac{w(t) - w(t=0)}{w(t=\infty) - w(t=0)} \tag{5.1}$$

wobei w die Setzung der Lastplatte ist. Der erste Zeitschritt wird, wie bereits erläutert, mit $\Delta t = 0$ berechnet.

Für das Beispiel Lastplatte (Netz 8) zeigt Bild 5.14 den Einfluß der Zeitschritteinteilung auf den Setzungsverlauf. Zur Festlegung der Zeitschritte wurde eine grobe (linear-elastische) Vorberechnung mit 5 Zeitschritten durchgeführt (Zeitpunkte 1, 110, ... 10000 h). Der daraus sich ergebende Verlauf des Verfestigungsgrades U (Ausgleichskurve) wurde zur Bestimmung der Zeitschritte nach dem oben beschriebenen Vorgehen zugrunde gelegt, und zwar für Berechnungen mit 10, 20, 40 und 80 Zeitschritten. Auf ein iteratives Vorgehen, d.h. Verbesserung der zur Festlegung der Zeitschritte notwendigen Ausgangskurve nach jeder Verfeinerung, kann dabei verzichtet werden.

Beim zeitlichen Verlauf der Setzung (Verfestigungsgrad) zeigt sich, daß bereits ab etwa 20 Zeitschritten keine wesentliche Genauigkeitssteigerung mehr erreicht werden kann.

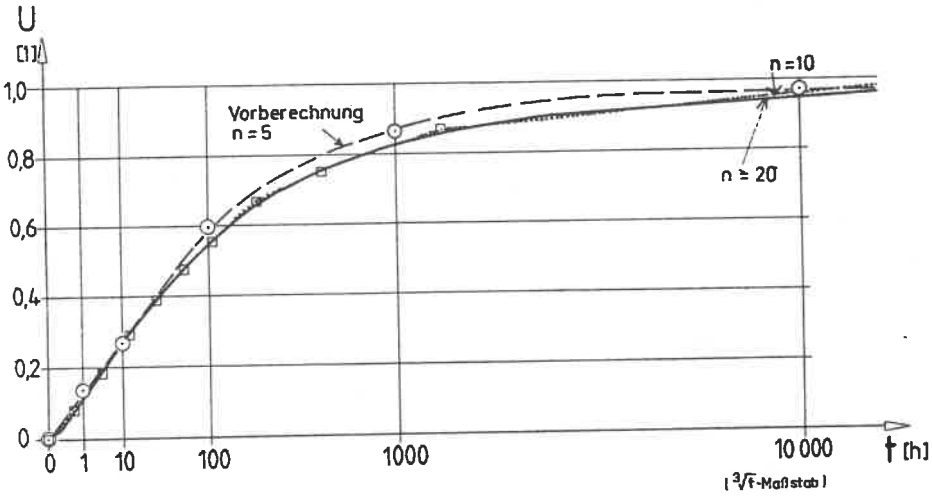


Bild 5.14: Einfluß der Zeitschritteinteilung auf den Zeitsetzungsverlauf (Setzung normiert)

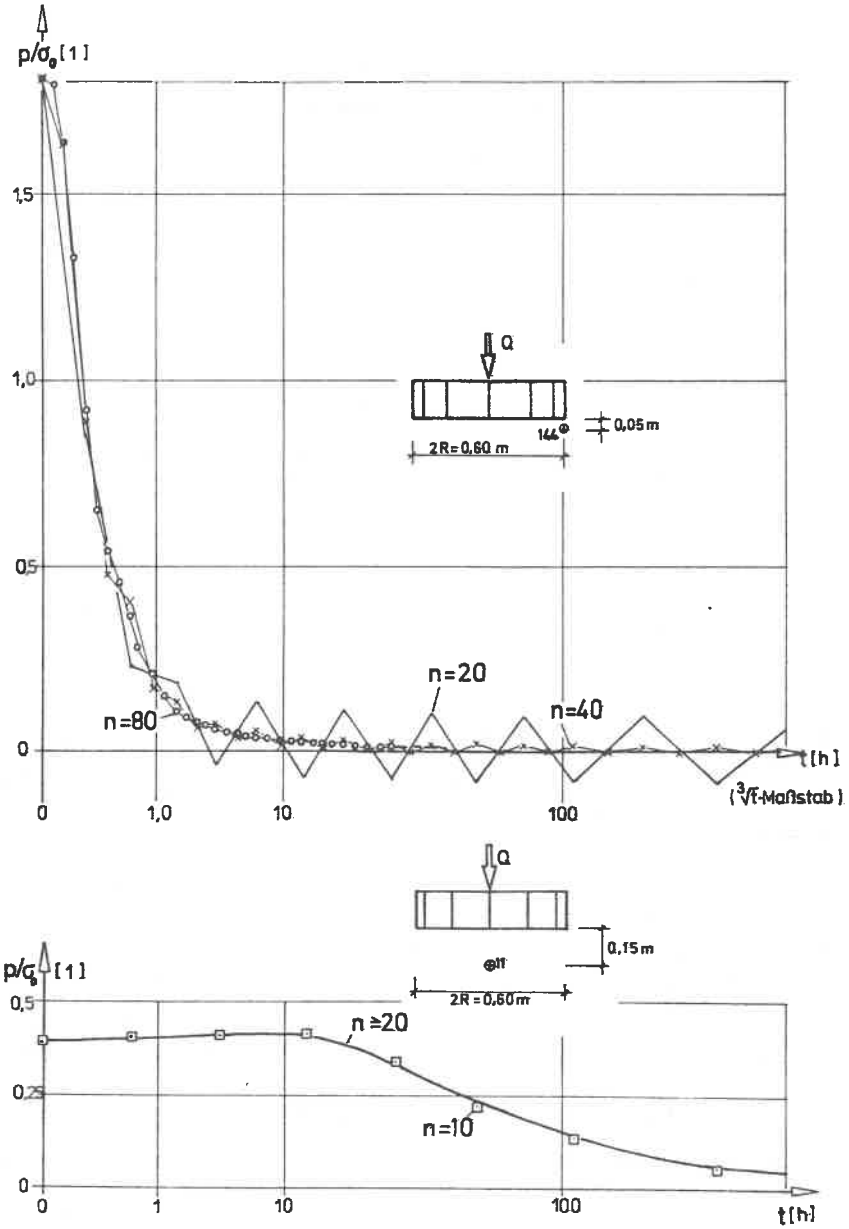


Bild 5.15: Einfluß der Zeitschritteinteilung auf die Porenwasserüberdruckentwicklung an zwei ausgesuchten Punkten

Der Verlauf des Porenwasserüberdrucks an zwei signifikanten Punkten ist in Bild 5.15 dargestellt: Punkt 11 in Lastplattenachse in einer Tiefe von 0,5 R (= 0,15 m) und Punkt 144 direkt (0,0167 R = 0,005 m) unter der Lastplattenkante. Hier zeigt sich, daß mit 20 Zeitschritten der Porenwasserdruck bei Punkt 11 mit genügender Genauigkeit approximiert werden kann, während an dem exponierten Punkt 114 erst ab etwa 40 Zeitschritten die Oszillationen ein erträgliches Maß unterschreiten.

Es kann also davon ausgegangen werden, daß für das vorliegende Problem etwa 20 - 40 nach der o.a. Methode festgelegte Zeitschritte genügen, je nachdem ob eine Aussage über das globale oder das lokale Verhalten getroffen werden soll. Da mit den Porenwasserdrücken auch die effektiven Spannungen oszillieren, sind bei einer nichtlinearen Berechnung die Zeitschritte so zu wählen, daß lokal keine zu großen Störungen auftreten.

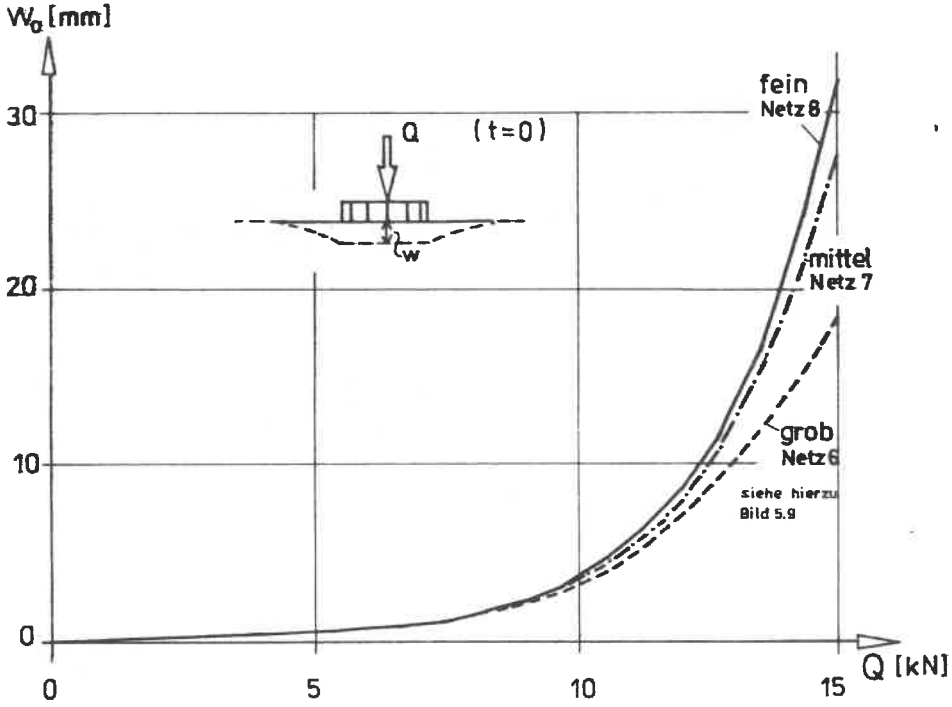


Bild 5.16: Einfluß der inneren Diskretisierung bei der Berechnung des Lastplattenversuchs, hypoelastisches Stoffgesetz (HE), 20 Lastschritte

Die oben getroffenen Aussagen gelten für linear-elastisches Stoffverhalten. Im folgenden werden noch einige wichtige Ergebnisse der unter Verwendung des hypoelastischen Stoffgesetzes durchgeführten Voruntersuchungen darstellt. In die Berechnungen gehen die in Abschnitt 5.1.1 festgelegten Stoffparameter ein. Als weitere Eingangsgröße wird eine geologische Vorbelastung von 20 kN/m² und ein rechnerischer Seitendruckbeiwert von $1-\sin\varphi' \approx 0{,}6$ vorgegeben. Die Art und die Dauer der Vorbelastung spielt - wie im nächsten Abschnitt noch gezeigt wird - insbesondere beim elastoplastischen Stoffgesetz eine wesentliche Rolle.

Bild 5.16 zeigt den Einfluß der inneren Diskretisierung des Lastplattenproblems auf die Last-Setzungskurve des undrainierten Zustands. Es werden die drei bereits im linearen Fall verwendeten verschieden feinen Netzeinteilungen herangezogen, s. Bild 5.9.

Die Ergebnisse der Berechnung mit dem groben Netz (Netz 6) weichen im stark nichtlinearen Bereich der Kurve von den mit Netz 7 und Netz 8 gerechneten Last-Verschiebungskurven erheblich ab. Wesentliche Abweichungen der beiden letztgenannten Kurven untereinander treten erst ab etwa Q = 13 kN mit zunehmender Annäherung an die Traglast in Erscheinung. Bei der im kraftgesteuerten Versuch aufgebrachten Last Q = 15 kN beträgt der Unterschied in den Setzungen 15 %. Durch die Berücksichtigung der tatsächlichen Belastungsvorgeschichte bei der Nachrechnung werden sich - nach einer noch durchzuführenden Parameteranpassung - geringere Unterschiede in den Anfangsverschiebungen ergeben.

Da der Rechenaufwand bei Netz 8 das 2,5-fache desjenigen bei Netz 7 beträgt, die Genauigkeitssteigerung in den Verschiebungen maximal 10 % beträgt, soll bei der Nachrechnung der Lastplattenversuche Netz 7 verwendet werden.

Der Einfluß der Lastinkrementierung beim Aufbringen der Last Q = 15 kN zum Zeitpunkt t = 0 ist in Bild 5.17 dargestellt. Über der Anzahl der Lastschritte sind die Sofortsetzung der Lastplatte w_o und der auf $\sigma_o = Q/\pi R^2$ normierte Porenwasserüberdruck an einem ausgewählten Punkt aufgetragen. Eine eindeutige Konvergenz läßt sich, insbesondere beim Porenwasserüberdruck, nicht feststellen. Eine ausreichende Genauigkeit kann ab 40 Zeitschritten erzielt werden.

Es ist anzumerken, daß die zwischen n = 80 und n = 100 auftretenden Diskrepanzen im Laufe der Belastung erst ab etwa Q = 13 kN in diesem Maße auftreten.

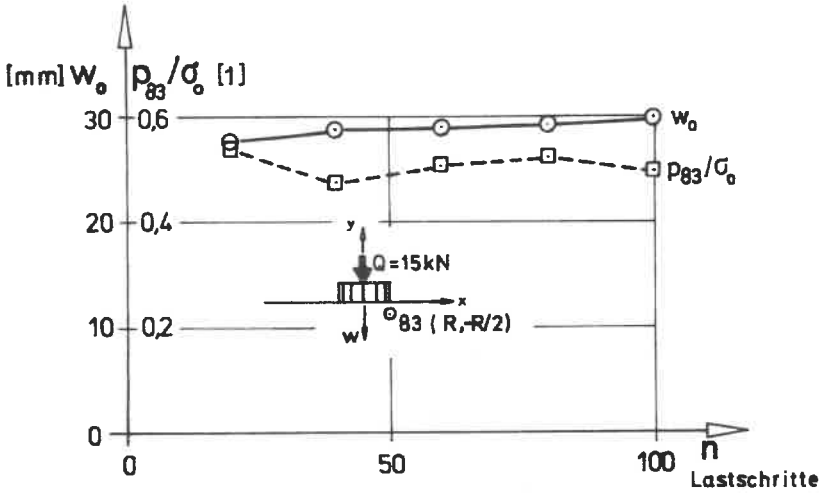


Bild 5.17: Einfluß der Lastinkrementierung auf die Sofortsetzung w_o und den Porenwasserüberdruck im Punkt (R, -R/2)

5.3.2 Kraftgesteuerter Versuch

Für die Nachrechnung eines kraftgesteuerten Versuchs wird aus der Arbeit von ULRICH (1980) der Versuch Nr. 7601 ausgewählt, da bei diesem die höchste Last über die volle Konsolidationsphase aufrecht erhalten wurde. Bei diesem Versuch wurde mittels der elektronisch-hydraulischen Belastungseinrichtung innerhalb weniger Millisekunden die Druckkraft von Q = 15 kN auf die Lastplatte aufgebracht und über die Zeit bis zum Ende der Konsolidation konstant gehalten. Daher wird bei der Nachrechnung eine plötzlich eingeleitete Last simuliert, die in 40 Lastschritten mit $\Delta t = 0$ aufgebracht wird. Die daran anschließende Konsolidationsphase wird mit 32 Zeitschritten berechnet, deren Größe unter Verwendung der gemessenen Zeitsetzungskurve nach 5.3.1 (s. Bild 5.13) gewählt wird.

Dem eigentlichen Versuch gingen zwei kurzfristige Vorbelastungen der Platte voraus. In der Rechnung wird dies durch einen separaten Vorlauf mit der höheren der beiden Vorbelastungen, Q = 11,5 kN, berücksichtigt. Aus diesem Vorlauf werden

die beim jeweiligen Stoffgesetz relevanten Parameter für die Belastungsvorgeschichte - das sind Porenzahl und Spannungsmaxima - für die eigentliche Konsolidationsberechnung gespeichert. Die Vorbelastung aus Bodenüberdeckung wird ebenfalls beim Vorlauf berücksichtigt. Beim Hauptlauf geht dann nur der Spannungszustand infolge Eigengewichts (Auftriebswichte 9 kN/m³, zugehöriger Ruhedruckbeiwert 0,8) des unterhalb der Lastplattensohle anstehenden Bodens ein. Der Einfluß der Stahlverschalung kann vernachlässigt werden, s. SCHAD (1979).

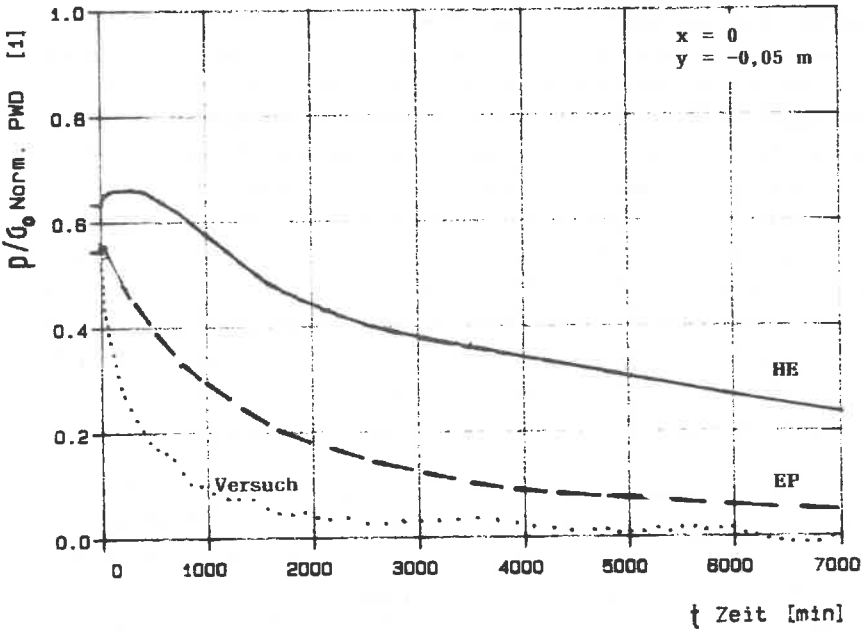
Die Nachrechnung des Versuchs 7601 mit den in Abschnitt 5.1 anhand von unabhängigen Laborversuchen bestimmten Stoffparametern ergibt die in Bild 5.18 dargestellten Ergebnisse: Die gerechneten Zeitsetzungs- und Porenwasserüberdruck-Kurven - als Beispiel p für Punkt x = 0, y = 0,05 - stimmen weder für das hypoelastische (HE) noch für das elastoplastische (EP) Stoffgesetz mit den gemessenen Kurven überein.

Während die Absolutbeträge der Setzungen beim hypoelastischen Stoffgesetz erheblich überschätzt werden, liegen diese beim elastoplastischen Stoffgesetz nach anfänglicher Übereinstimmung (Sofortsetzung) wesentlich unter den Meßwerten. Das Verhältnis von Endsetzung zu Sofortsetzung w_∞/w_o ergibt sich bei der Nachrechnung zu 1.4 bzw. 1.6 gegenüber dem aus den Meßwerten errechneten Quotienten 2,9.

Die Definition der gemessenen Sofortsetzung ist dabei nicht eindeutig. Nach ULRICH (1980) wird die beim ersten Meßzyklus gemessene Setzung als Sofortsetzung interpretiert, was eine gewisse Willkür bedeutet. Vernünftiger ist es, diese dort festzulegen, wo in der Zeitsetzungslinie ein Knick feststellbar ist. Diesem Punkt entspricht mit guter Näherung der Meßzyklus, bei dem die maximalen Porenwasserüberdrücke gemessen werden. Beim Versuch 7601 ergibt sich die Sofortsetzung zu $w_o \simeq 10$ mm.

Weiter ist bei der Nachrechnung festzustellen, daß sich die gerechneten Porenwasserüberdrücke im Vergleich zu den gemessenen wesentlich langsamer abbauen und sich damit auch die Setzungen entsprechend verzögert einstellen.

Die daraufhin durchgeführten Parametervariationen zeigen, daß die Größe der Setzungen beim hypoelastischen Stoffgesetz im wesentlichen von der Kohäsion c' abhängt. Beim elastoplastischen Stoffgesetz ergibt sich als maßgeblicher Parameter die geologische Vorbelastung σ_v, welche über die Porenzahl die Lage der Anfangsfließfläche festlegt.



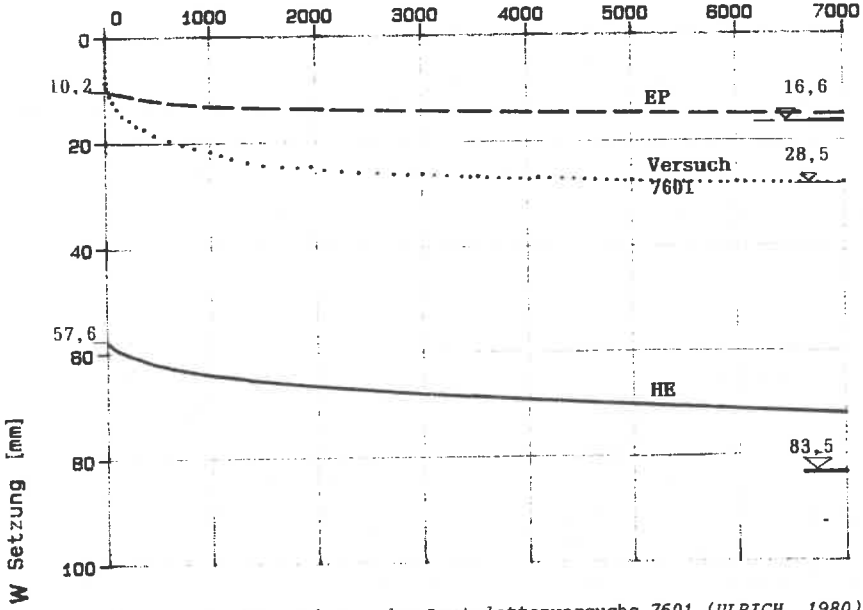


Bild 5.18: Nachrechnung des Lastplattenversuchs 7601 (ULRICH, 1980) mit den im Labor bestimmten Stoffparametern

Das zeitliche Abströmen des Porenwassers und damit der Verlauf der Setzung wird direkt durch den Durchlässigkeitsbeiwert k gesteuert, ist aber auch indirekt über die volumetrischen Verformungen von den Parametern des Spannungs-Verzerrungsgesetzes abhängig.

Daher wird als erster Schritt eine Parameteranpassung in der Weise durchgeführt, daß die rechnerischen und die gemessenen E n d setzungen w_∞ in Übereinstimmung gebracht werden. Bild 5.19 zeigt die Setzungen bei der Variation der Parameter c' und σ_v. Für die gemessene Endsetzung w_∞ = 28,5 mm ergeben sich

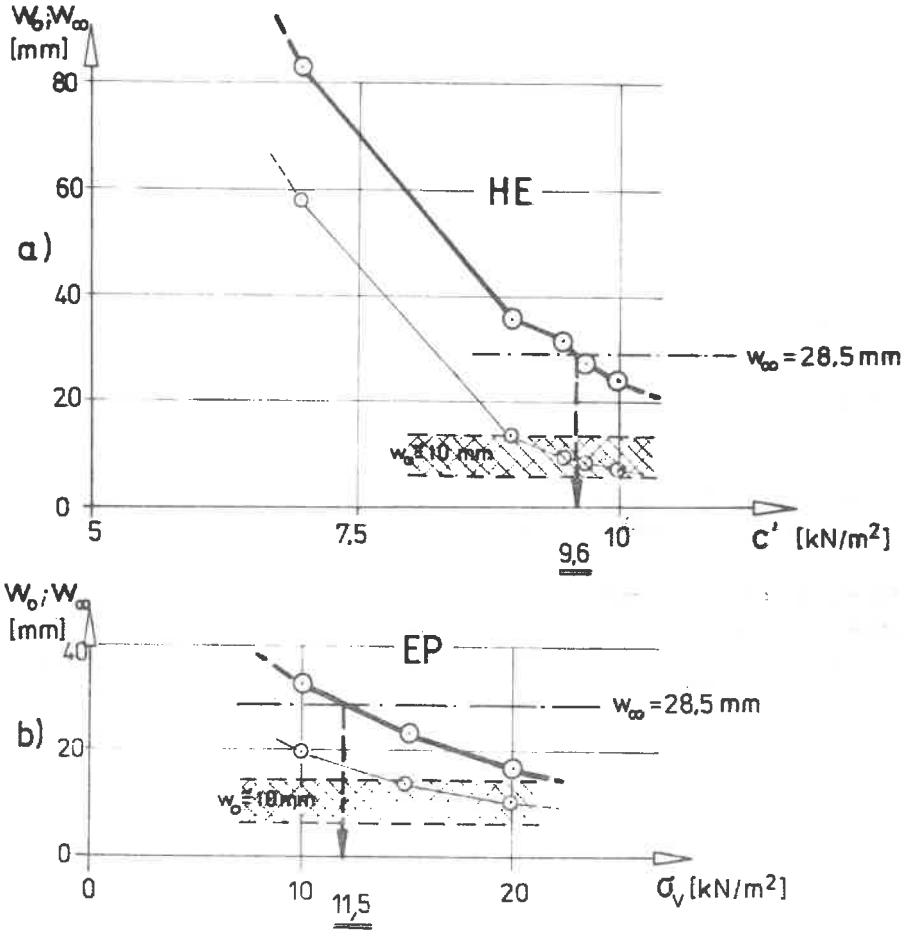


Bild 5.19: Parameteranpassung über die Endsetzung w_∞
a) Kohäsion c' beim hypoelastischen Stoffgesetz
b) Vorbelastung σ_v beim elastoplastischen Stoffgesetz

$c' = 9{,}6$ kN/m² (Laborversuche 7 ± 3 kN/m²) und $\sigma_v = 11{,}5$ kN/m². Beim hypoelastischen Stoffgesetz kann gleichzeitig eine Übereinstimmung bei der Sofortsetzung erzielt werden, während beim elastoplastischen Modell der Anteil der Sofortsetzung an der Gesamtverformung zu groß bleibt.

Eine daran anschließende Anpassung der Durchlässigkeit ergibt eine gute Übereinstimmung der zeitlichen Verläufe der Setzung und der Porenwasserüberdrücke bei $k = 5.10^{-9}$ m/s (gegenüber ursprünglich $5 \cdot 10^{-10}$ m/s, s.5.1.3). Diese kann direkt durch entsprechende Maßstabänderung bei der Zeitachse bestimmt werden, da das Produkt aus Zeitschrittgröße und Durchlässigkeit als Konstante in die Matrizengleichung (4.8) eingeht. Der genannte Durchlässigkeitsbeiwert wird als ein vom Spannungs-Verzerrungsgesetz unabhängiger Stoffparameter des Seetons angesehen, d.h. daß eine weitere, für die verschiedenen Stoffgesetze individuelle Anpassung nicht durchgeführt wird.

In Bild 5.20 sind die Ergebnisse der nach der Parameteranpassung durchgeführten Berechnungen den Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Bei der Zeitsetzungslinie, Bild 5.20 a, kann im Fall des hypoelastischen Stoffgesetzes eine gute Übereinstimmung festgestellt werden, während sich beim elastoplastischen Gesetz im Anfangsbereich zu große Setzungen ergeben. Die Porenwasserüberdrücke, die in Bild 5.20 b für 4 Meßstellen über der Zeit aufgetragen sind, weisen als lokale Größen erwartungsgemäß größere Schwankungen auf. Die mit dem hypoelastischen Stoffgesetz berechneten Drücke entsprechen entweder den Meßwerten oder liegen darüber, während die mit dem elastoplastischen Modell berechneten Werte überwiegend unter den Versuchswerten liegen.

Die mit den über die Parametervariation neu festgelegten Eingangswerten erzielte Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch kann als zufriedenstellend, teilweise auch als gut bezeichnet werden. Es ist festzustellen, daß diese modifizierten Parameter innerhalb der durch ihre Bestimmungsmöglichkeit vorgegebenen Schranken liegen.

Bei der im Laborversuch mit $c' = 7$ kN/m² festgelegten Kohäsion beträgt die Streubreite ± 3 kN/m². Auf den wesentlichen Einfluß der Kohäsion beim Lastplattenproblem wurde bereits von SCHAD (1979) hingewiesen.

Der ebenfalls anhand von Laborversuchen (Durchlässigkeitsbestimmung mit fallender Druckhöhe) bestimmte Durchlässigkeitsbeiwert k mußte um eine Zehnerpotenz

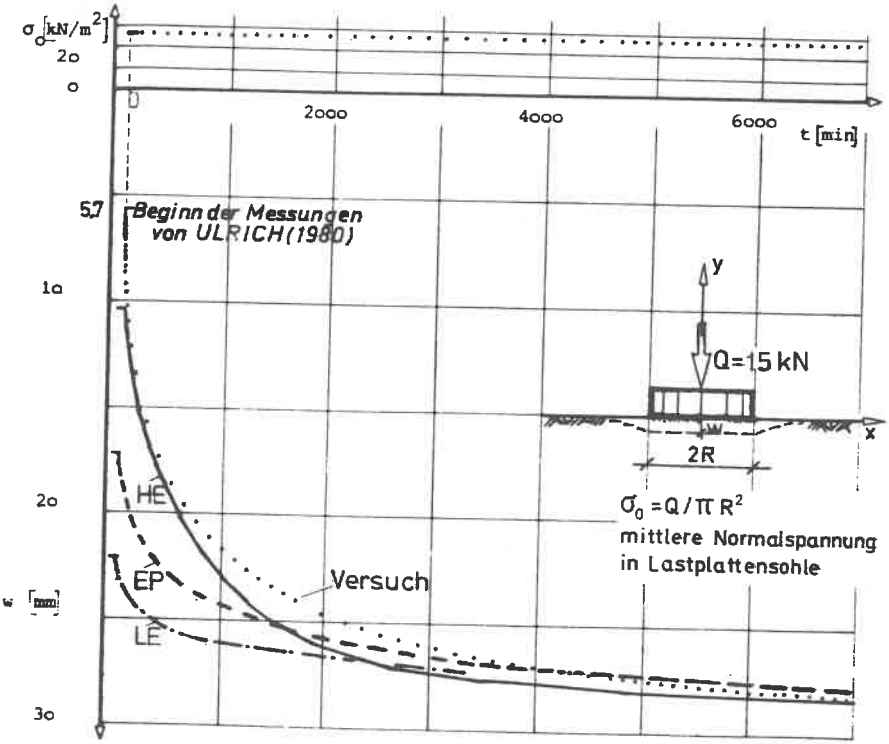


Bild 5.20: Nachrechnung des Lastplattenversuchs 7601 nach Parameteranpassung
a) Zeitsetzungslinie

erhöht werden, um eine hinreichend gute Übereinstimmung zu erreichen. Es ist bekannt, daß gerade der Durchlässigkeitsbeiwert nur sehr ungenau bestimmt werden kann und Abweichungen dieser Größenordnung üblich sind. Allerdings ergibt sich nach TRÜMPFF (1980) - auch unter Berücksichtigung der natürlichen Schwankung der Porenzahl in situ - eine kleinere Streubreite (ca. $\pm$ 3.10^{-10} m/s). Hier kommt zusätzlich eine systematische Abweichung ins Spiel, deren Ursache im Ansatz gesehen werden kann: Bei unterschiedlichen Druckgradienten zwischen Labor- und Feldversuch kann die Abweichung vom Darcyschen Filtergesetz, s. hierzu GABENER (1983), zum Tragen kommen.

Die Größe der Vorbelastung σ_v des Seetons an den Stellen der Lastplattenversuche kann ebenfalls nur sehr ungenau angegeben werden. Einen gewissen Anhalt liefert die von ULRICH (1980) angegebene Dicke der vorhandenen, überlagernden

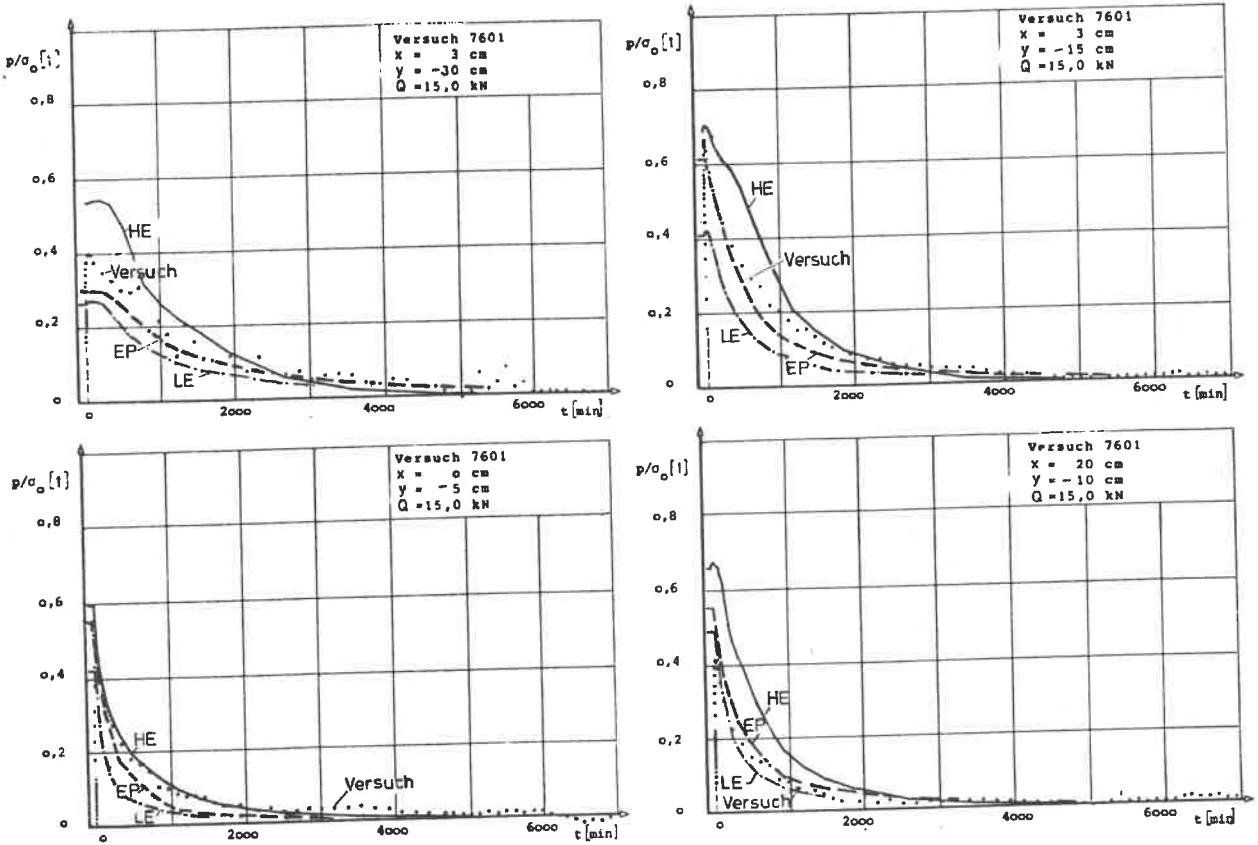


Bild 5.20: Nachrechnung des Lastplattenversuchs 7601 nach Parameteranpassung
b) Porenwasserüberdruck über Zeit an verschiedenen Meßpunkten

Sandschicht von 0,4 - 1,2 m, wobei nicht dokumentiert ist, welche Schichtmächtigkeit beim einzelnen Versuch vorhanden war. Aufgrund der geologischen Situation ist eine frühere Überlagerung in größerer Mächtigkeit nicht anzunehmen. Die in Frage kommende Vorbelastung aus der Sandschicht beträgt etwa 8 - 22 kN/m².

Die bisher durchgeführten Nachrechnungen des kraftgesteuerten Lastplattenversuchs sollen im folgenden durch die Berechnung einiger Sonderfälle ergänzt werden, um einmal den Unterschied "gekoppelt - entkoppelt", zum anderen den Einfluß der Nichtlinearität zu zeigen.

Als erster Sonderfall wird eine linear elastische Berechnung für den Versuch 7601 betrachtet. Der als Eingangsparameter notwendige Elastizitätsmodul wird hierbei auch so gewählt, daß die rechnerische Endsetzung w_∞ mit dem gemessenen Wert übereinstimmt, gleichzeitig wird die Querdehnungszahl mit $\nu = 0{,}35$ festgelegt. Beide Parameter beziehen sich auf das Korngerüst (effektive Spannungen). Eine labormäßige Bestimmung des E-Moduls scheidet von vornherein aus, da dieser keine Konstante ist und je nach Versuchsrandbedingung und zu durchfahrendem Spannungsbereich willkürlich festgelegt werden könnte. Der E-Modul ergibt sich aufgrund der o.g. Bedingung in Verbindung mit der bisher zugrunde gelegten FE-Diskretisiertung zu $E = 689$ kN/m². Die mit diesen beiden Verformungsmoduln und mit $k = 5 \cdot 10^{-9}$ m/s errechneten Kurven sind in Bild 5.20 bereits mit eingetragen (LE).

Unter den nachgerechneten Zeitsetzungslinien ist die Kurve für linear-elastisches Verhalten diejenige mit der größten Diskrepanz zu den Meßwerten. Das Verhältnis w_∞ / w_o ist hierbei am kleinsten und damit am unzutreffendsten. Die Porenwasserüberdrücke werden-außer bei Punkt (0.20 m / -0.10 m) - z.T. erheblich unterschätzt.

Als weitere Sonderfälle werden mit den drei verschiedenen Stoffgesetzen entkoppelte Analysen ($p \equiv o$) durchgeführt. Bei den beiden nichtlinearen Stoffgesetzen ergeben sich unter der Belastung $Q = 15$ kN im Vergleich zur Endsetzung w_∞ = 28,5 mm geringere Setzungen. Besonders deutlich tritt der Unterschied beim hypoelastischen Stoffgesetz in Erscheinung. Dies hängt damit zusammen, daß während der undrainierten Belastung und der anschließenden Konsolidation bei der gekoppelten Analyse - bedingt durch die Porenwasserüberdrücke Spannungswege durchlaufen werden, die größere bleibende Verformungen zur Folge haben.

Bei der Berechnung mit linear elastischem Stoffverhalten ergibt sich im entkoppelten Fall dieselbe Setzung wie diejenige nach Abschluß der Konsolidation im gekoppelten Fall. Denn das Stoffgesetz besitzt ein elastisches Potential, und die Verformungen sind daher unabhängig vom Spannungsweg.

In Bild 5.21 sind die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen in Form von Last-Setzungslinien dargestellt. Die Konsolidationssetzungen für t > 0 erscheinen dabei als vertikale Geradenstücke bei Q = 15 kN.

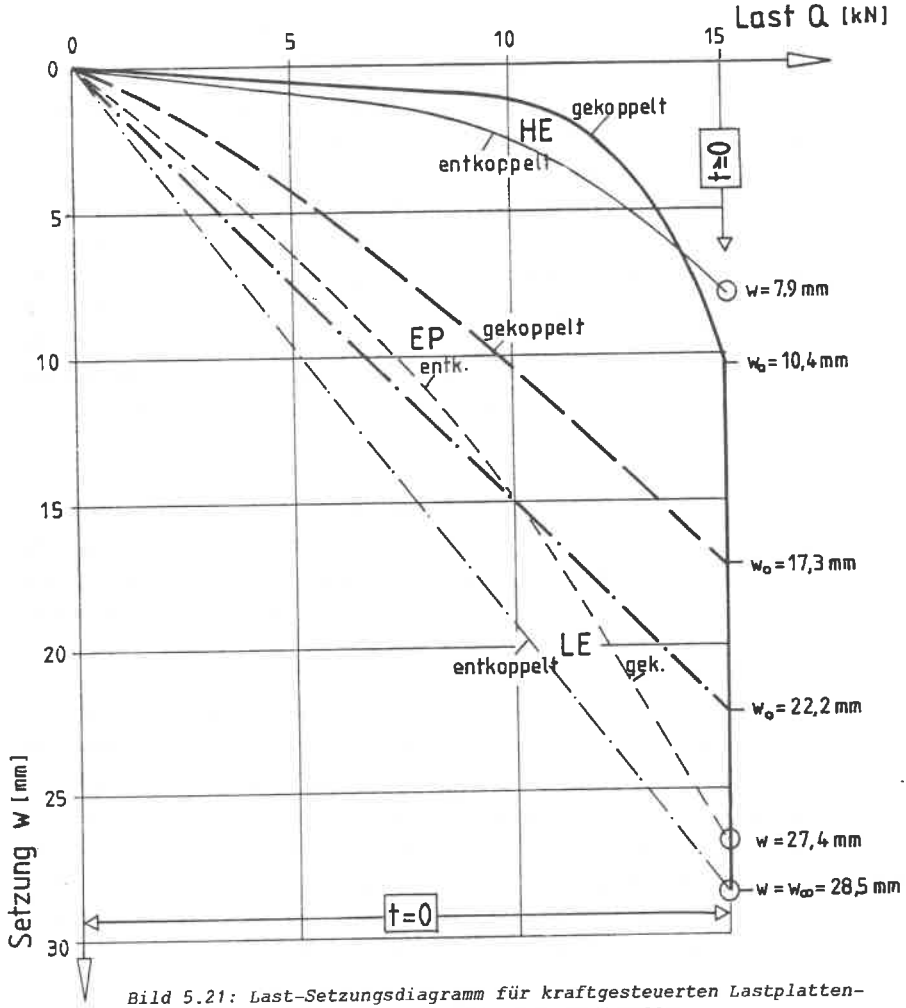


Bild 5.21: Last-Setzungsdiagramm für kraftgesteuerten Lastplattenversuch 7601 bei verschiedenen Modellen

In Tafel 5.1 sind die einzelnen Setzungsbeträge sowie das Verhältnis von Endsetzungen zu Sofortsetzung aufgelistet.

Lastplattenversuch 7601, kraftgesteuert; Q = 15 kN = const				
Stoffgesetz	w_o	w_∞	$\frac{w_\infty}{w_o}$	Berechnung
	[mm]	[mm]	[1]	
LE	22,2	28,5	1,28	gekoppelt
HE	10,4	28,5	2,75	"
EP	17,3	28,5	1,65	"
LE		28,5	–	entkoppelt
HE		7,9	–	"
EP		27,4	–	"
Versuch 7601	5,7	28,5	5,0	erster Meßwert
	10,0	28,5	2.85	≈ max p

Tafel 5.1: Zusammenstellung der Sofort- und Endsetzungen

Zur weiteren Verdeutlichung des Unterschieds zwischen gekoppelter und entkoppelter, ideal drainierter Berechnung einerseits und zwischen den verschiedenen Stoffgesetzen andererseits sind für die einzelnen Fälle Spannungswege in Bild 5.22 aufgetragen, und zwar für jeweils einen Punkt nahe der Lastplattenachse im "Kompressionsbereich" (x = 0,07 m, y = -0,15 m) und einen Punkt unterhalb der Lastplattenkante im "Scherbereich" (x = 0,325 m, y = -0,15 m).

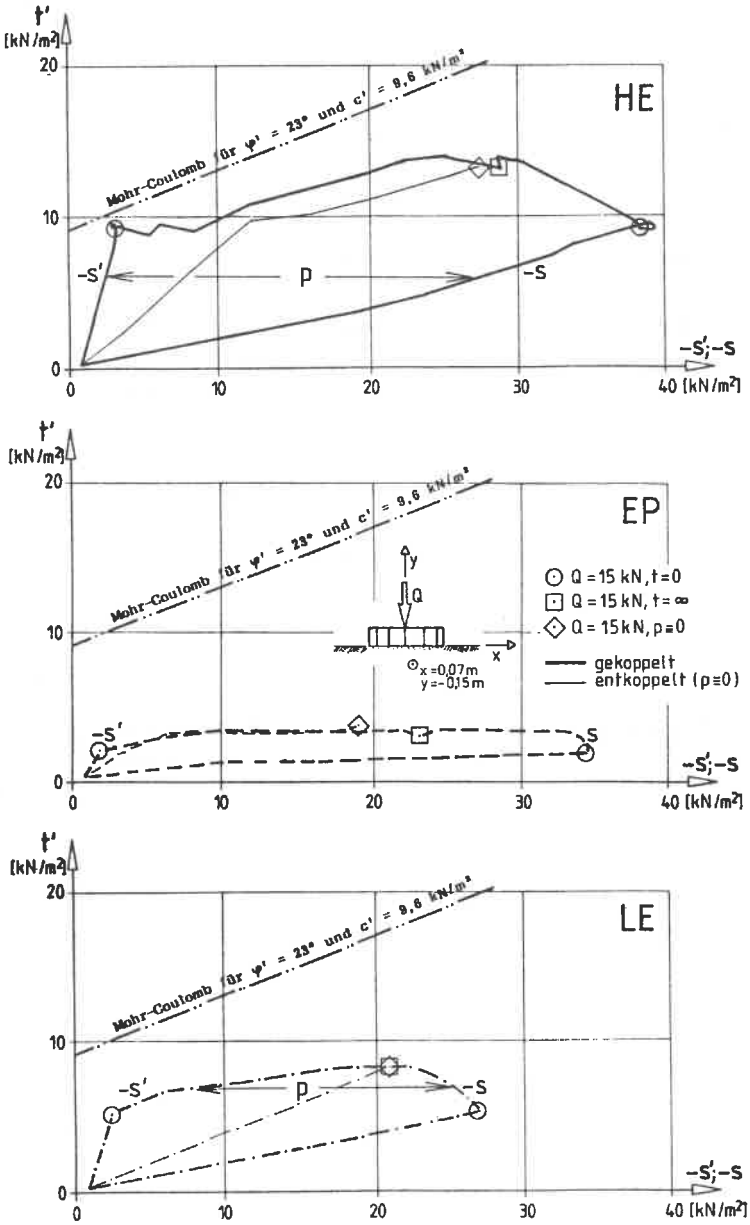


Bild 5.22: Spannungswege für verschiedene Modelle bei der Nachrechnung des kraftgesteuerten Versuchs 7601
a) Punkt (x = 0,07 m, y = - 0,15 m)

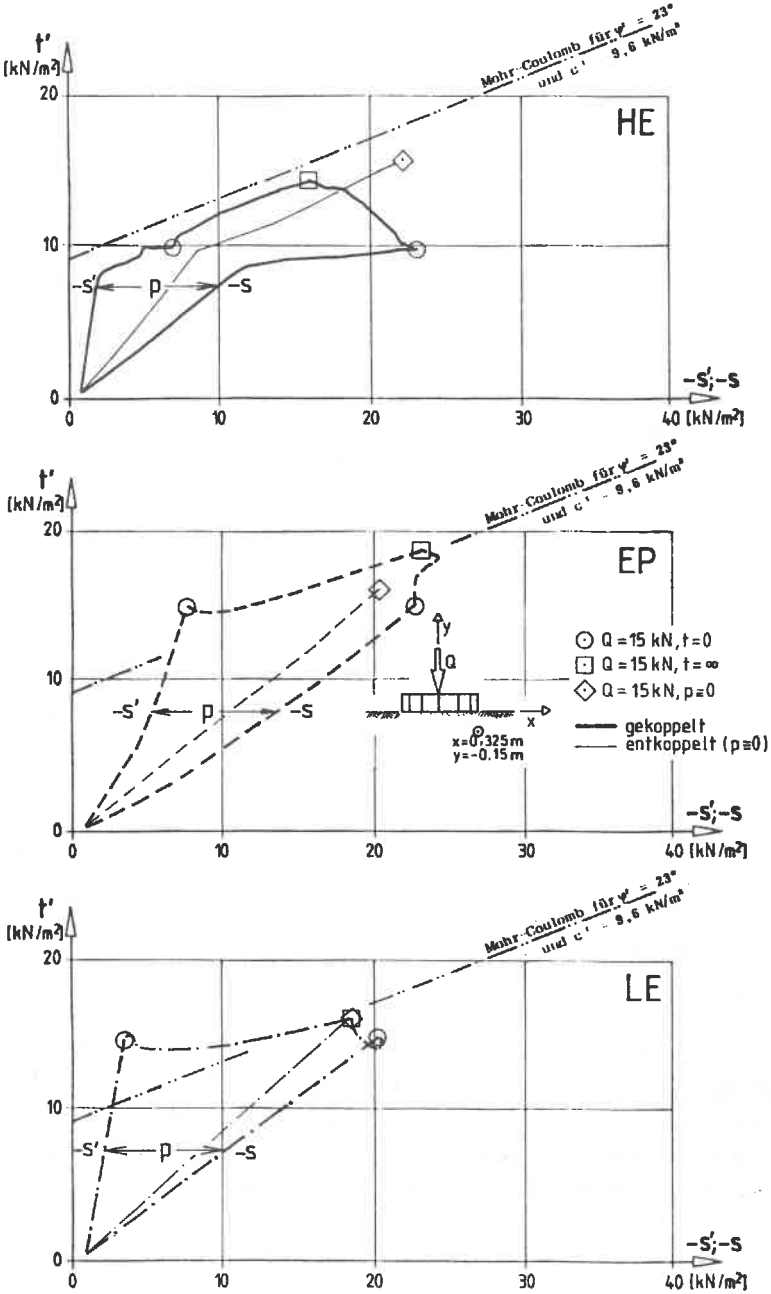


Bild 5.22: Spannungswege für verschiedene Modelle bei der Nachrechnung des kraftgesteuerten Versuchs 7601
b) Punkt (x = 0,325 m, y = - 0,15 m)

5.3.3 Verschiebungsgesteuerter Versuch

Für die Nachrechnung eines verschiebungsgesteuerten Versuchs wird der Versuch 7605 von ULRICH (1980) herangezogen. Statt der beim kraftgesteuerten Versuch aufgebrachten konstanten Kraft wird eine konstante Vorschubgeschwindigkeit von w = 0,226 mm/min vorgegeben, wobei neben der Stempelkraft wiederum die Porenwasserüberdrücke an verschiedenen Stellen gemessen werden. Dem eigentlichen Versuch ging eine relativ kleine Vorbelastung voraus (0,5 kN "Anlegelast"), die in der Berechnung unberücksichtigt bleibt.

Für die Nachrechnung werden die angepaßten Parameter des Abschnitts 5.3.2 als Eingangsgrößen benutzt. In der numerischen Berechnung wird die mitdiskretisierte Lastplatte über vorgeschriebene Verschiebungsinkremente belastet, wobei am Anfang 10 Verschiebungsinkremente zu je 0,113 mm in 1/2-min-Schritten aufgebracht werden, daran anschließend wird in 60 Schritten mit den 10-fachen Größen gerechnet.

In Bild 5.23 sind die Ergebnisse der Nachrechnungen den Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Beim hypoelastischen Stoffgesetz stimmen die Anfangsbereiche des zeitlichen Verlaufs der Last und der Porenwasserüberdrücke gut überein. Im weiteren Verlauf, ab etwa σ_o = 50 kN/m², liegt die gerechnete Zeit-Belastungskurve um bis zu 20 % über der gemessenen. Beim zeitlichen Verlauf des Porenwasserüberdrucks gibt es bei den relativ randnahen Aufpunkten mit zunehmender Zeit eine Unterschätzung der gemessenen Drücke. Bei dem 15 cm tief gelegenen Punkt stimmen bezüglich des Porenwasserüberdrucks Rechnung und Messung im ganzen Zeitintervall sehr gut überein.

Beim elastoplastischen Stoffgesetz ergibt sich lediglich in den sogenannten Porenwasserdruck-Plateauwerten der 5 cm tiefen Punkte eine Übereinstimmung. Bei der Berechnung mit dem linear-elastischen Stoffgesetz werden die gleichen Parameter wie unter 5.3.2 eingegeben. Die sich daraus ergebenden Kurvenverläufe können durchweg als nicht zutreffend bezeichnet werden.

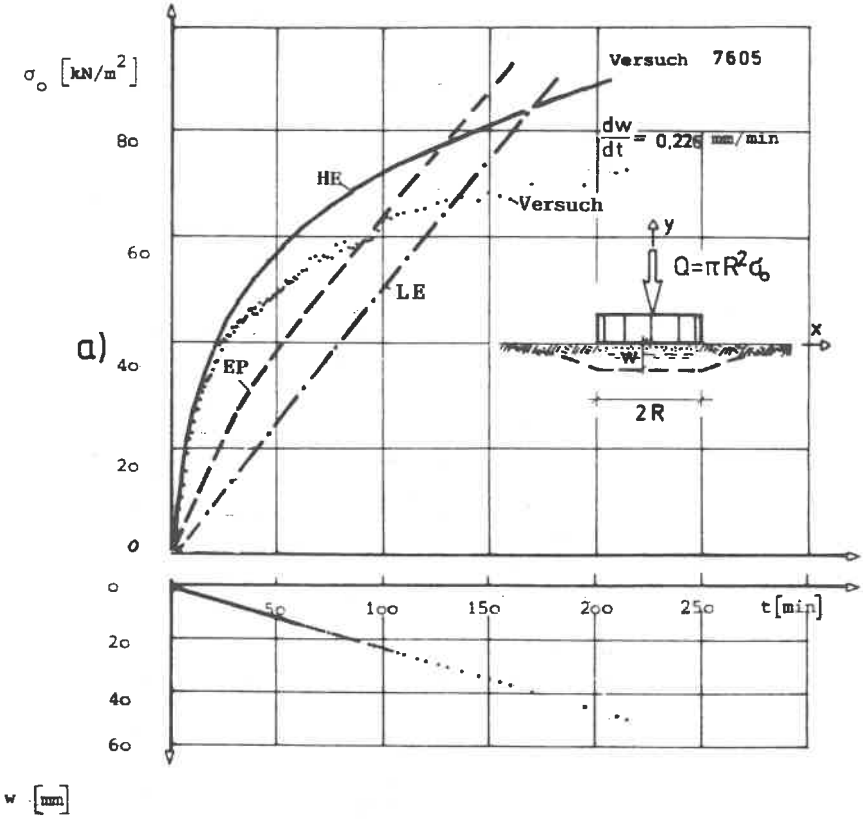


Bild 5.23: Verschiebungsgesteuerter Lastplattenversuch
a) Zeit-Belastungskurven

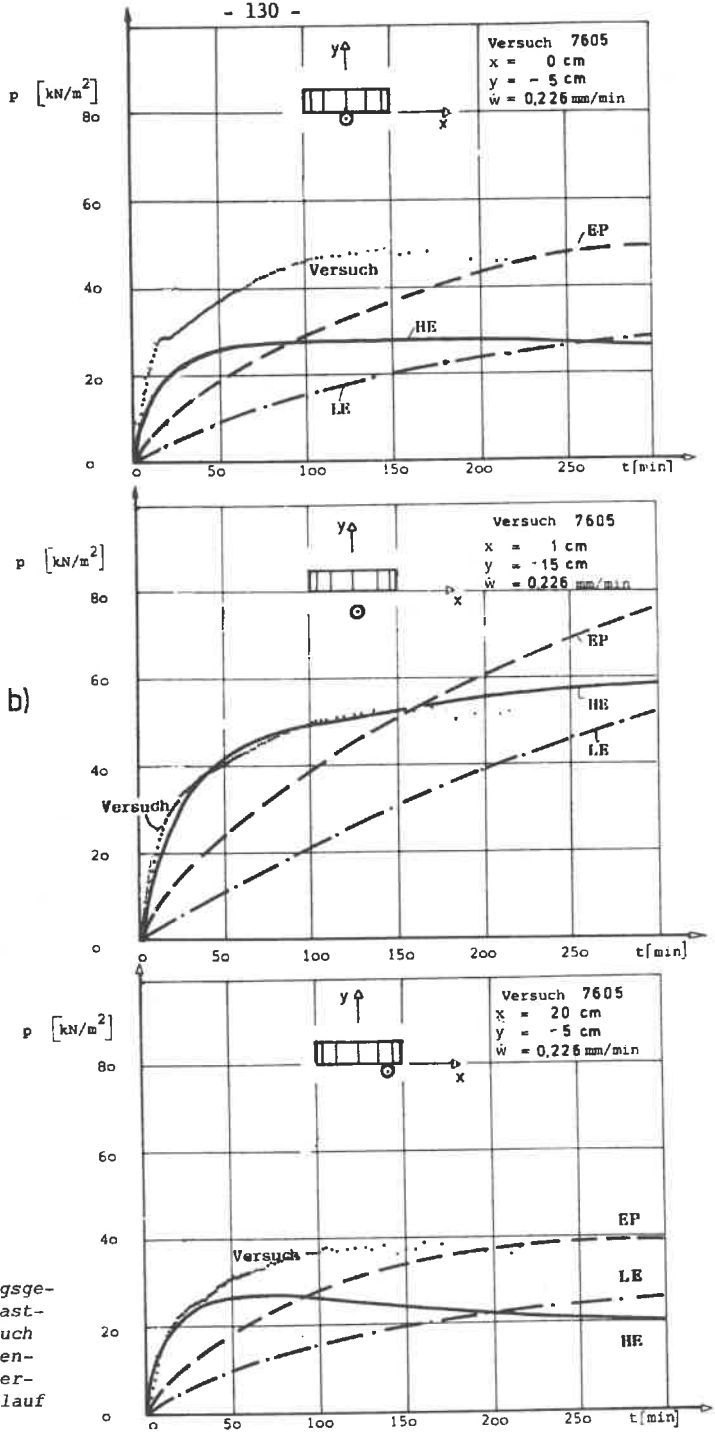


Bild 5.23:

Verschiebungsgesteuerter Lastplattenversuch
b) Zeit-Porenwasserüberdruckverlauf

Es erhebt sich nun die Frage, inwieweit die Krümmung der Zeit-Belastungskurve mit dem Abströmen des Porenwassers zusammenhängt. Wie ULRICH (1980) bereits zeigt, kann mit Hilfe der Konsolidationstheorie unter Zugrundelegung eines linear-elastischen Korngerüstes diese typische Kurve nicht nachvollzogen werden. Erst mit Einführung eines linear viskoelastischen Modells gelingt dort die Anpassung der gerechneten Kurven an die Meßergebnisse, wobei allerdings festgestellt werden muß, daß die zugehörigen Stoffparameter nicht mit denjenigen aus dem kraftgesteuerten Versuch übereinstimmen.

In Bild 5.24 ist die Abhängigkeit der Lastsetzungskurven von der Durchlässigkeit beim hypoelastischen Stoffgesetz dargestellt. Es sind zwei Tendenzen erkennbar: Zum einen kann bei einer größeren Durchlässigkeit das Porenwasser schneller abfließen, und das Korngerüst kann sich damit schneller verformen, das System wirkt insbesondere im Anfangsbereich etwas weicher. Zum anderen können bei kleiner werdender Durchlässigkeit durch das aufstauende Porenwasser höhere Drücke entstehen, die rasch zu großen Scherverformungen und weiter zum Bruch führen können.

Bei den hier eingesetzten Stoffgesetzen zeigt sich nur im Fall des hypoelastischen Stoffgesetzes der letztgenannte Anteil deutlich. Der indirekte Einfluß der Durchlässigkeit auf das Last-Verformungsverhalten ist auch bei der relativ großen Schwankungsbreite (ca. 1 Zehnerpotenz) dieser Größe von untergeordneter Bedeutung.

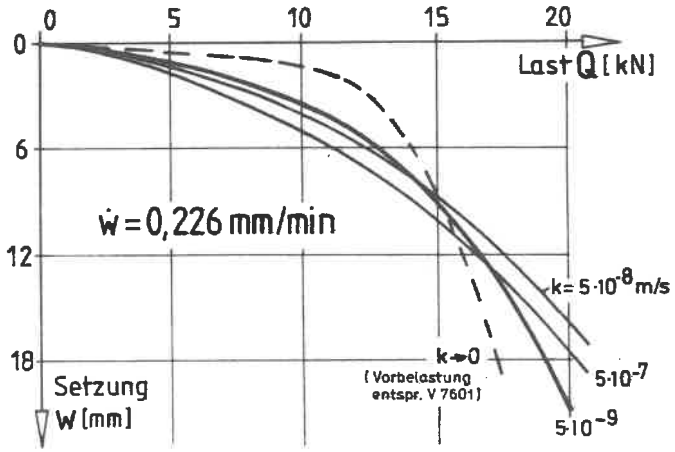


Bild 5.24: Variation des Durchlässigkeitsbeiwerts ($k = 5 \cdot 10^{-9}$ m/s aus dem kraftgesteuerten Versuch bestimmt)

5.4 Berechnung einer Dammschüttung

Als Anwendungsbeispiel für den ebenen Verzerrungs- und Strömungszustand soll im folgenden eine Dammschüttung auf bindigem Boden untersucht werden. Das Beispiel ist fiktiv, es sollen keine Vergleiche mit Meßdaten erfolgen.

Da sich von den beiden vorgeschlagenen nichtlinearen Stoffgesetzen das hypoelastische Modell bei den bisherigen Anwendungen als das zutreffendere erwiesen hat, soll nur dieses hier eingesetzt werden.

Folgende Idealisierung des Problems wird vorgegeben:
Der Damm soll auf einer 15 m dicken Tonschicht geschüttet werden, die von einem durchlässigen Material unterlagert wird, die Damm-Unterseite ist ebenfalls durchlässig. Der Ton soll die Stoffeigenschaften des Konstanzer Seetons haben, wie sie sich nach der Parameteranpassung in Abschnitt 5.3.2 ergeben haben. Die Auflast $q = 100$ kN/m² aus der Dammschüttung wirkt ohne Eigensteifigkeit in symmetrischer Trapezform an der Geländeoberkante. Der Damm soll in zwei gleich hohen Lagen geschüttet werden, wobei die Lastaufbringung affin zur Endlast erfolgt.

Die Diskretisierung des Gebiets geht aus Bild 5.25 hervor. Die Netzeinteilung entspricht dem feinen Netz 8, Abschnitt 5.3.1. Die Last wird in 2 mal 10 Lastschritten aufgebracht, die Konsolidationszeiten werden in 10 und 18 Zeitschritte eingeteilt. Eine Schüttung soll in 5 Tagen erfolgen, zwischen den beiden Schüttungen ist eine Wartezeit von 90 Tagen vorgesehen. Eine Vorbelastung ist nicht zu berücksichtigen.

Die Berechnung ergibt den in Bild 5.26 dargestellten Zeit-Setzungsverlauf. Die Endsetzung von 88 cm ist danach in ca. 1000 Tagen zu 90 % erreicht.

Bei einer konventionellen Setzungsberechnung ergibt sich unter Verwendung des von TRUMPFF (1980) im Oedometerversuch bestimmten Steifemoduls von E_s = 1,9 MN/m² (Mittelwert für den Spannungsbereich 50 - 150 kN/m²) nach OSTERBERG (1957), zit. von SMOLTCZYK (1983), ein w_∞ = 66 cm.

Der Unterschied zwischen den numerisch berechneten und den konventionell ermittelten Setzungswerten zeigt deutlich, daß die Scherverformungen einen nicht zu vernachlässigenden Anteil an der Setzung ausmachen. Noch deutlicher wird dies,

6. SCHLUSSBETRACHTUNG

Es wird untersucht, inwieweit durch die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der Berechnung mehrdimensionaler Konsolidationsprobleme zutreffendere Vorhersagen für das Verhalten bindiger, voll wassergesättigter Böden möglich sind. Die dazu verwendete Konsolidationstheorie wird kurz dargestellt. Die Theorie weicht von der klassischen Biotschen Theorie in den nichtlinearen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen ab.

Bei den Stoffgesetzen wird auf zwei nicht-viskose Formuliefungen, ein einfaches hypoelastisches (G/K-Modell) und ein elastoplastisches Gesetz (Kappenmodell) zurückgegriffen. Es zeigt sich, daß beim hypoelastischen Stoffgesetz Modifikationen im Hinblick auf eine wirklichkeitsgetreue Wiedergabe der Porenwasserüberdrücke - bereits schon bei einfachen Laborversuchen - notwendig sind.

Die Stoffgesetze werden in die entsprechenden Grundgleichungen der Konsolidationstheorie eingearbeitet, wobei im Hinblick auf die numerische Berechnung die Gleichungen mit Hilfe von Arbeitsprinzipen in integraler Form angeschrieben werden. Das numerische Lösungsverfahren sieht eine FEM-Diskretisierung im Raum und ein einfaches Differenzenschema in der Zeit vor.

Etwas breiteren Raum wird dem hypoelastischen Stoffgesetz gegeben, da dieses modifiziert wird. Insbesondere die Berücksichtigung der Dilatanz in der vorgeschlagenen Weise erscheint wichtig, um nicht schon bei einfachen Laborversuchen Widersprüche bezüglich der Porenwasserdruckverteilung bei der Kopplung des laminaren Strömungsvorgangs und des Spannungs-Verformungsproblems zu erhalten. Es kann gezeigt werden, daß die Berücksichtigung der Dilatanz in der vorgeschlagenen Weise als Sonderfall den klassischen Skempton-Ansatz - der allerdings in der ursprünglichen Form sich auf totale Spannungen bezieht - enthält.

Bei der Bestimmung der Parameter wird möglichst so vorgegangen, daß standardisierte Laborversuche und deren gängige Auswertungen mit herangezogen werden können.

In Zusammenhang mit der numerischen Berechnung auftretende Probleme wie Randstörungen und eine schlechte Konditionierung des Gleichungssystems beim gekoppelten Problem werden etwas ausführlicher behandelt. Es wird hierbei ein spezielles Element für Ränder mit freier Drainagemöglichkeit entwickelt.

Im Mittelpunkt bei der Nachrechnung von Versuchen stehen die auf Konstanzer Seeton kraft- und verschiebungsgesteuert durchgeführten Lastplattendruckversuche. Die notwendigen Bodenparameter werden zuvor in Laborversuchen unabhängig ermittelt. Auf die Bestimmung der Parameter des modifizierten hypoelastischen Stoffgesetzes wird hierbei etwas ausführlicher eingegangen.

Bei der Nachrechnung eines CD-Dreiaxialversuchs (die Parameter werden zuvor anhand von CU-Versuchen bestimmt) zeigt sich, daß mit dem hypoelastischen Stoffgesetz eine gute Übereinstimmung erzielt werden kann, daß aber beim elastoplastischen Modell bereits auf dieser Stufe ansatzbedingte Schwierigkeiten auftreten. Vor der Nachrechnung der Lastplattenversuche werden einige numerische Untersuchungen durchgeführt. Daran anschließend wird der kraftgesteuerte Versuch unter Verwendung der im Labor unabhängig bestimmten Parameter nachgerechnet, was zu erheblichen Diskrepanzen zwischen Rechnung und Versuch führt.

Eine daraufhin vorgenommene Parametervariation zeigt eine starke Abhängigkeit von den relativ ungenau zu bestimmenden Parametern c' bzw. σ_v und k. Eine Anpassung dieser Größen innerhalb ihrer Streubreite liefert eine z.T. gute Übereinstimmung. Mit den angepaßten Stoffparametern kann dann auch bei der Nachrechnung des verschiebungsgesteuerten Versuchs zumindest teilweise eine zufriedenstellende Übereinstimmung erzielt werden. Das modifizierte hypoelastische Stoffgesetz stellt sich dabei als das brauchbarere heraus.

Abschließend wird für die Praxisanwendung die Konsolidation unter einem Damm als ebenes Beispiel bei Verwendung der verbesserten Parameter des Seetons berechnet.

Sowohl hier als auch beim Lastplattenversuch zeigen sich einige für die praktische Berechnung interessante Aspekte. Der Vergleich bei den lastkonstanten Versuchen zwischen gekoppelter (Konsolidations-)Analyse und der entkoppelten (ideal drainierten) zeigt, daß die Endsetzung sehr stark abhängig sein kann vom durchfahrenen Spannungsweg und damit vom Porenwasserüberdruck. Es genügt also auf keinen Fall, nur eine "statische" Berechnung durchzuführen, selbst wenn nur die Frage nach den Endsetzungen gestellt ist.

Gleichermaßen empfiehlt es sich nicht, für den Anfangszustand (t = 0) eine gesonderte Analyse durchzuführen, die u.U. nicht mit einer daran anschließenden Berechnung konsistent ist.

Eine numerische Berechnung im aufgezeigten Rahmen wird immer ein gewisser Aufwand sein, den man im Grundbau nur bei größeren und schwierigeren Objekten be-

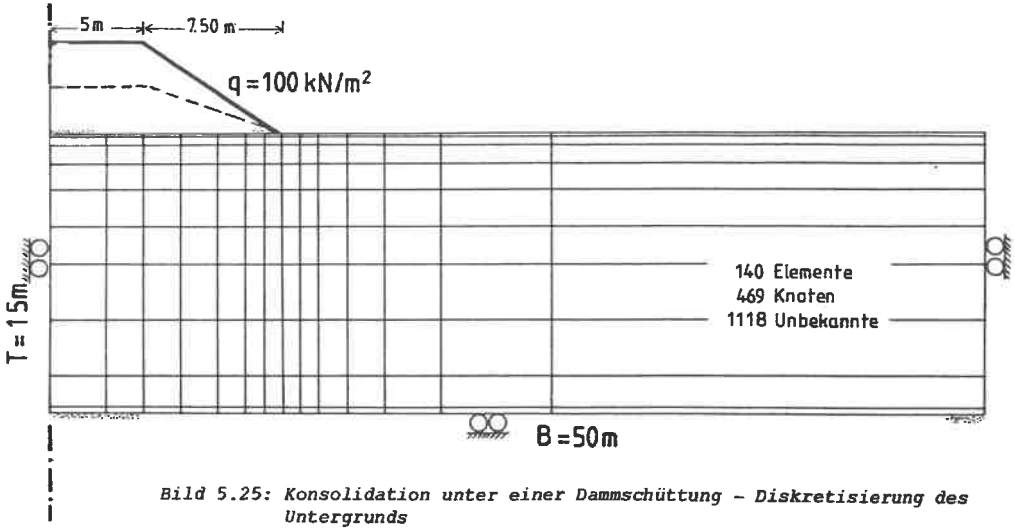


Bild 5.25: Konsolidation unter einer Dammschüttung - Diskretisierung des Untergrunds

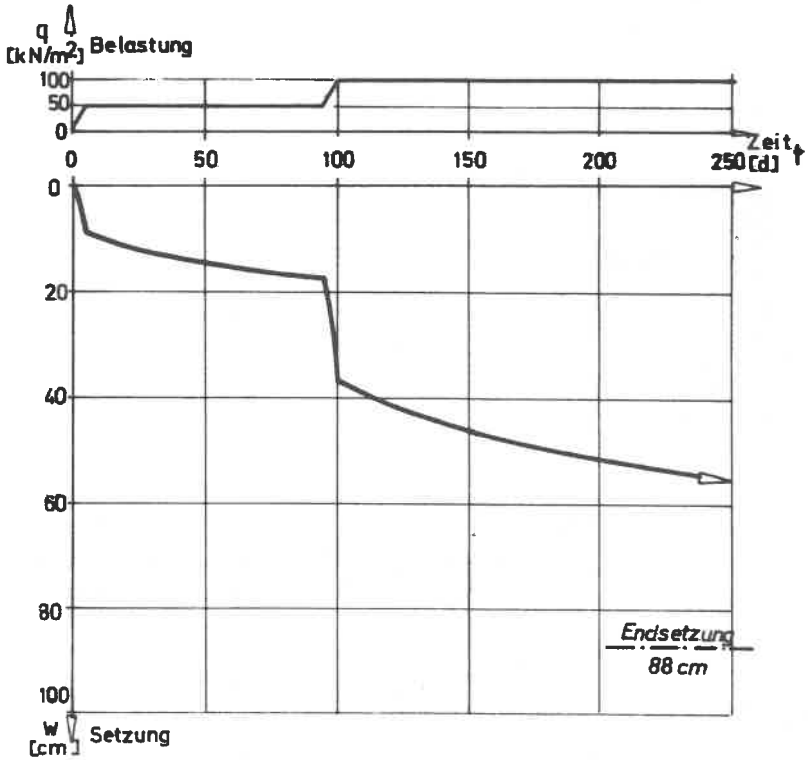


Bild 5.26: Zeitlicher Verlauf der Belastung und der Setzung des Damms

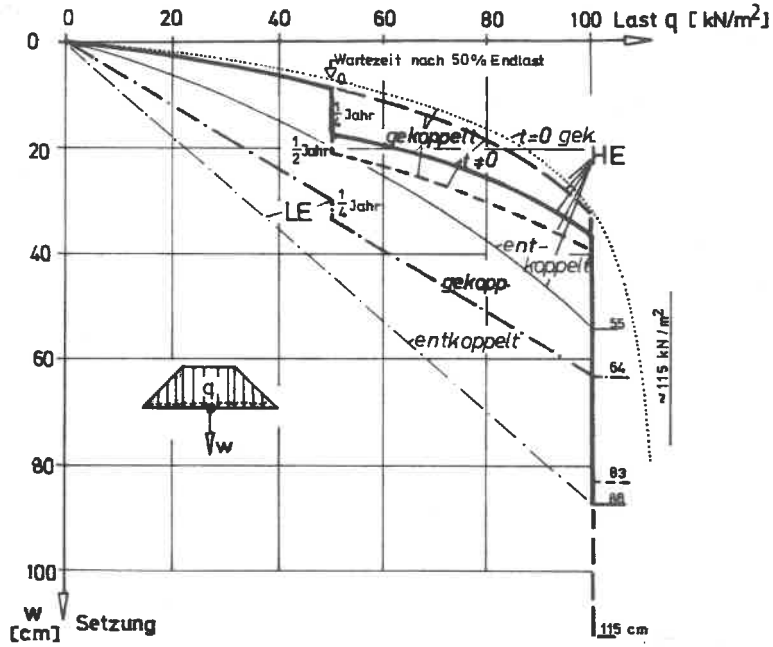


Bild 5.27: Lastsetzungslinien für das Dammbeispiel bei verschiedenen Modellen

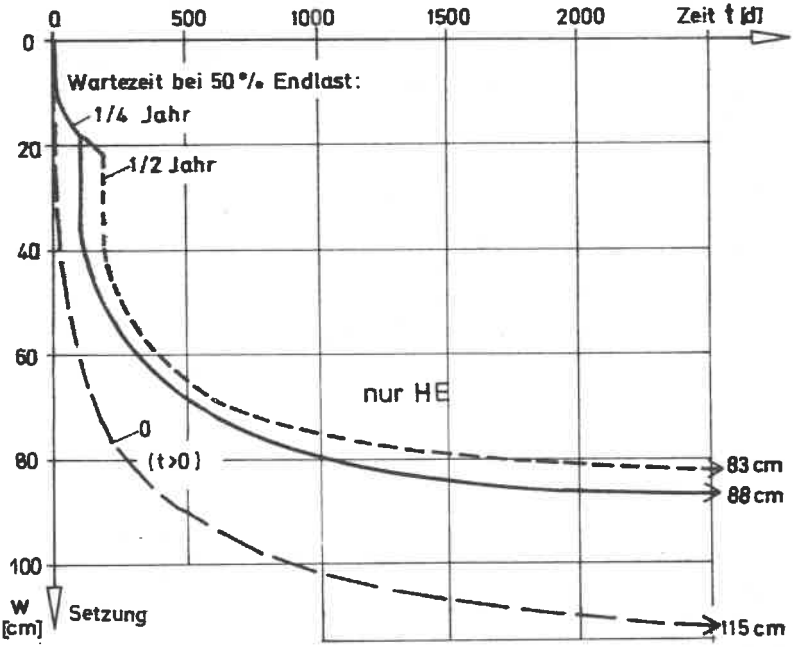


Bild 5.28: Zeitsetzungslinien für das Dammbeispiel bei Variation der Wartezeit zwischen den Schüttungen

wenn man beim Schütten des Dammes keine Zwischenpause vorsieht. Umgekehrt reduziert sich die Gesamtsetzung, wenn die Zwischenpause auf 1/2 Jahr verdoppelt wird.

In Bild 5.27 und 5.28 sind die Ergebnisse in einem Last- und einem Zeitsetzungs-Diagramm zusammengestellt. In Bild 5.27 mit enthalten sind die Ergebnisse einer linear-elastischen Berechnung, deren E-Modul, wie in Abschnitt 5.3.2, anhand der Endsetzung des eingangs beschriebenen Falls festgelegt wird ($\nu = 0{,}35$). Um dieselbe Endsetzung zu erzielen, müßte der E-Modul beim vorliegenden Randwertproblem mit $E = 1{,}29$ MN/m² in die Rechnung eingehen. Wegen der Unterschiede in den Randbedingungen und im Spannungsniveau läßt sich dieser nicht vergleichen mit dem durch Rückrechnung aus dem kraftgesteuerten Versuch (vgl. 5.3.2) ermittelten Wert von 0,69 MN/m².

In Bild 5.27 ebenfalls eingetragen sind die Ergebnisse einer undrainierten Berechnung ($t = 0$) mit einer Belastung $q > 100$ kN/m². Anhand der steil abfallenden Last-Setzungskurve läßt sich eine Bruchlast von 115 kN/m² feststellen. Wenn man diese mit CONSOL berechnete Bruchlast mittels der Grundbruchformel umrechnet in eine entsprechende undrainierte Scherfestigkeit c_u, dann erhält man

$$c_u = \frac{115}{\pi+2}\ \text{kN/m}^2 = 22{,}4\ \text{kN/m}^2 .$$

Dabei ist zwar der trapezförmige Verlauf der Dammauflast in der Grundbruchformel nicht berücksichtigt, spielt aber für eine Prüfung der Größenordnung von c_u keine Rolle.

c_u-Werte in dieser Größenordnung (25 - 30 kN/m²) wurden mit der Flügelsonde im Konstanzer Seeton gemessen. Der von ULRICH (1980) angegebene, anhand eines UU-Versuchs bestimmte Wert erscheint mit $c_u = 5{,}8$ kN/m² dagegen sehr niedrig. Von THAMM (1974) werden für einen ähnlichen, aber insgesamt weicheren Seeton c_u-Werte zwischen 8 und 12 kN/m² angegeben. (Es ist anzumerken, daß die undrainierte Scherfestigkeit c_u hier nur zu Vergleichszwecken für den Anfangszustand herangezogen wird, sie geht aber keineswegs in die numerische Berechnung ein!)

In Bild 5.27 sind außerdem noch die Ergebnise von entkoppelten Berechnungen (hypoelastisches und linear-elastisches Stoffgesetz) eingetragen. Beim hypoelastischen Stoffgesetz zeigt sich wiederum (vgl. 5.3.2), daß wegen der Span-

nungswegabhängigkeit die Berechnung unter Einbeziehung der Porenwasserüberdrücke eine wesentlich größere Endsetzung liefert als der idealisierte entkoppelte Fall.

Weiter ist noch anzumerken, daß der Anteil der Sofortsetzung an der Gesamtsetzung - wie beim Lastplattenproblem - bei linearem Stoffverhalten wesentlich höher ist als bei Verwendung der hypoelastischen Spannungs-Verzerrungsbeziehung.

treiben wird. Wenn man aber einen solchen Aufwand in Kauf nimmt, sollte man bei Gründungen auf wassergesättigten bindigen Böden mit der hier vorgeschlagenen Methode arbeiten, denn man erhält somit eine in sich geschlossene, widerspruchsfreie Aussage über Anfangszustand, Konsolidation und Endzustand und hat ggfs. durch den Wegfall einer getrennten Betrachtung von $t = o$ und $t = \infty$ weniger Aufbereitungskosten.

Die Aussagekraft der aufgezeigten Methode hängt sehr stark ab von der Genauigkeit, mit der die Parameter vorausbestimmt werden. Daher empfiehlt es sich, vor oder/und während der Bauausführung - insbesondere, wenn erste Meßergebnisse vorliegen - Parametervariationen durchzuführen. Das praktische Vorgehen ist in Tafel 6.1 schematisch dargestellt.

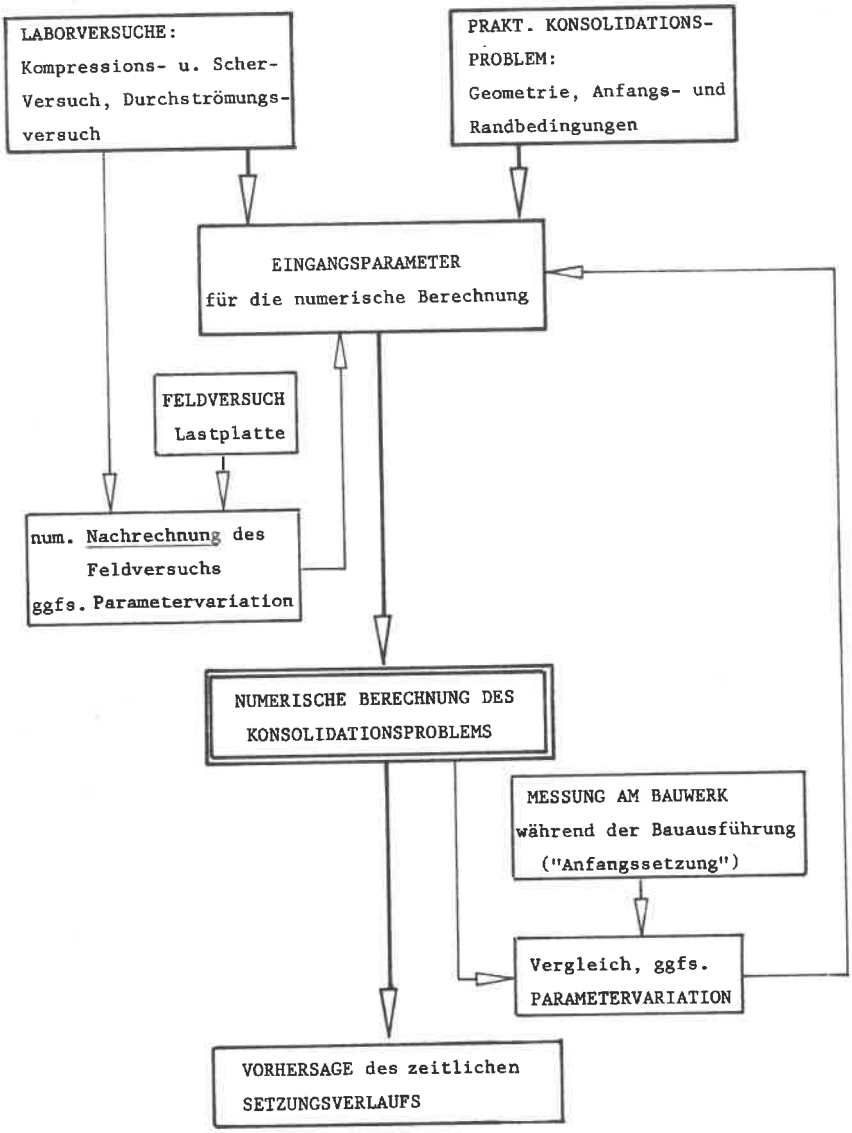
Die Berechnung der Traglast ist nicht Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchungen.Es soll aber erwähnt werden, daß das hier verwendete einfache Iterationsverfahren nicht gut dazu geeignet ist, um Traglasten genau zu bestimmen. Weiter muß, zumindest bereichsweise, die geometrische Nichtlinearität in Betracht gezogen werden.

Die Nachrechnungen haben nur in einigen wenigen Fällen gute Anhaltspunkte über die Grenztragfähigkeit geliefert. Gerade das elastoplastische Stoffgesetz hat in den meisten Fällen keine eindeutige oder gar keine Grenzlast geliefert. Dies kann am Iterationverfahren, am unzureichenden Verfestigungsgesetz oder an der Kombination der beiden Einflüsse liegen.

Die "Variable Modul-Modelle" finden in der Grundbaupraxis breite Anwendung. Wenn eine nichtlineare Berechnung mit einem entsprechenden Programm durchgeführt werden soll, ist es kein allzu großer Aufwand, die Dilatanz in der gezeigten Weise oder ähnlich mit einzubauen, denn bei gekoppelten Ansätzen, aber auch bei rein statischen Problemen mit großen kinematischen Zwängen, kann die Berücksichtigung der Dilatanz von Bedeutung sein.

Beim Vergleich mit der von Ulrich entwickelten Lösung für das Lastplattenproblem fällt auf, daß im Rahmen seiner Parameter-Rückrechnung eine um mindestens nochmal eine Zehnerpotenz größere Durchlässigkeit notwendig war als im vorliegenden Fall nach der Anpassung. Die so bestimmte Durchlässigkeit hängt direkt von den übrigen Parametern ab und ist nicht unabhängig von der Theorie bestimmbar.

Die von Ulrich primär angestrebten Effekte, die Übereinstimmung des Verhältnisses von End- zu Sofortsetzung und die Reproduzierbarkeit der nichtlinearen



Tafel 6.1: Schematischer Ablaufplan für eine Konsolidationsberechnung mit Parametervariation auf verschiedenen Stufen

$\sigma_o(t)$-Funktion beim verschiebungsgesteuerten Versuch, können mit dem vorliegenden Verfahren jetzt erreicht werden, ohne für die beiden verschiedenen Randwertprobleme unterschiedliche Parametersätze in die Berechnung eingeben zu müssen.

A N H A N G

Anmerkung: Die Numerierung des Anhangs entspricht den zugehörigen Hauptabschnitten im Text (Anh. 1 u. 2 entfallen)!

Anhang zu 3

3.1 Abhängigkeit des Schubmoduls von der Spannung nach SCHAD (1979)

$$G = G_0 - \alpha_G (\sigma_1' + \sigma_3') - \beta_G (\sigma_1 - \sigma_3) \qquad (3.1)^*$$

$$\beta_G = \alpha_G / \sin\varphi' \qquad (3.11)^*$$

$$G_0 = 2c' \cos\varphi' \beta_G \qquad (3.12)^*$$

(3.11) und (3.12) in (3.1) eingesetzt:

$$G = 2c'\cos\varphi' \cdot \frac{\alpha_G}{\sin\varphi'} - \alpha_G (\sigma_1' + \sigma_3') - \frac{\alpha_G}{\sin\varphi'} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$= \alpha_G \left[2c' \cot\varphi' - (\sigma_1' + \sigma_3') - \frac{1}{\sin\varphi'} (\sigma_1 - \sigma_3) \right]$$

Mit

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{-(\sigma_1' + \sigma_3')\sin\varphi' + 2c'\cos\varphi'}$$

ergibt sich

$$G = \alpha_G \left[2c'\cot\varphi' - (\sigma_1' + \sigma_3') + S \cdot \frac{1}{\sin\varphi'} \cdot (\sigma_1' + \sigma_3')\sin\varphi' - S \frac{2c'\cos\varphi'}{\sin\varphi'} \right]$$

$$= \alpha_G \left[(1-S) \cdot 2c'\cot\varphi' + (S-1)(\sigma_1' + \sigma_3') \right]$$

$$= 2\alpha_G (1-S) \left(c'\cot\varphi' + \frac{-\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right)$$

oder

$$\underline{G = 2\alpha_G (1-S) \cdot (\bar{c}' - s')}$$

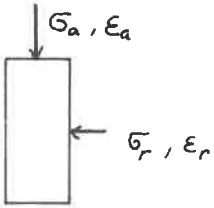
mit $\bar{c}' = c'\cot\varphi'$ und $s' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2}$

(α_G eignet sich gegenüber G_0 besser als dritter unabhänger Stoffparameter, da für $c' = 0$ $G_0 = 0$ und die Gleichung dann unbestimmt wird.)

---

* Numerierung nach SCHAD (1979)

3.2 Nachrechnung eines CU - Versuchs



Spannungszustand:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_r \end{pmatrix} ; \quad \underset{\sim}{\sigma}' = \begin{pmatrix} -\sigma_a + p & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r + p & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_r + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_a' & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r' \end{pmatrix}$$

$$\sigma_m = -\frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3} ; \quad \sigma_m' = -\frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3} + p = \sigma_m + p = -\frac{\sigma_a' + 2\sigma_r'}{3}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^D = \frac{\sigma_a - \sigma_r}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\sigma}'^D$$

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_a - \sigma_r)$$

Verzerrungszustand:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_r \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_v = -\varepsilon_a - 2\varepsilon_r$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^D = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_r}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für das Stoffgesetz werden auch die Geschwindigkeiten dieser Größen benötigt. Diese erhält man hier durch Ersetzen der Komponenten durch deren Geschwindigkeiten (alle Ausdrücke sind linear in den Spannungs- bzw.Verzerrungskomponenten), z.B.:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_a - \sigma_r) \longrightarrow \dot{\tau}_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r)$$

Zwischen den Geschwindigkeiten des Spannungs-und des Verzerrungs-deviators gilt:

$$2G(\underset{\sim}{\sigma}') = \frac{\dot{\sigma}_{ij}^{D}}{\dot{\varepsilon}_{ij}^{D}} = \frac{-\frac{2}{3}(\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r)}{-\frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r)} = \frac{\frac{1}{3}(\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r)}{\frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r)}$$

$$= \frac{\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r}{\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r}$$

Beim Standard-CU-Versuch ist

$$\dot{\varepsilon}_v = -\dot{\varepsilon}_a - 2\dot{\varepsilon}_r = 0$$

und $\dot{\sigma}_r = 0$

Damit ergibt sich

$$G(\underset{\sim}{\sigma}') = \frac{\dot{\sigma}_a}{3\dot{\varepsilon}_a}$$

Für den Schubmodul gilt der Ansatz:

$$G(\underset{\sim}{\sigma}') = 2\alpha_G (1-S)(\bar{c}' - s')$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$\dot{\sigma}_a = 6\alpha_G \cdot (1-S)(\bar{c}' - s') \cdot \dot{\varepsilon}_a$$

Aus Gleichung (3.13) folgt für $\dot{\sigma}_r = 0$:

$$\dot{p} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{K_{uR}}{M_0}\right)\dot{\sigma}_a$$

Die Geschwindigkeiten der effektiven Spannungen sind somit:

$$\dot{\sigma}_a' = \dot{\sigma}_a - \dot{p} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{K_{uR}}{M_0}\right)\dot{\sigma}_a$$

$$\dot{\sigma}_r' = 0 - \dot{p} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{K_{uR}}{M_0}\right)\dot{\sigma}_a$$

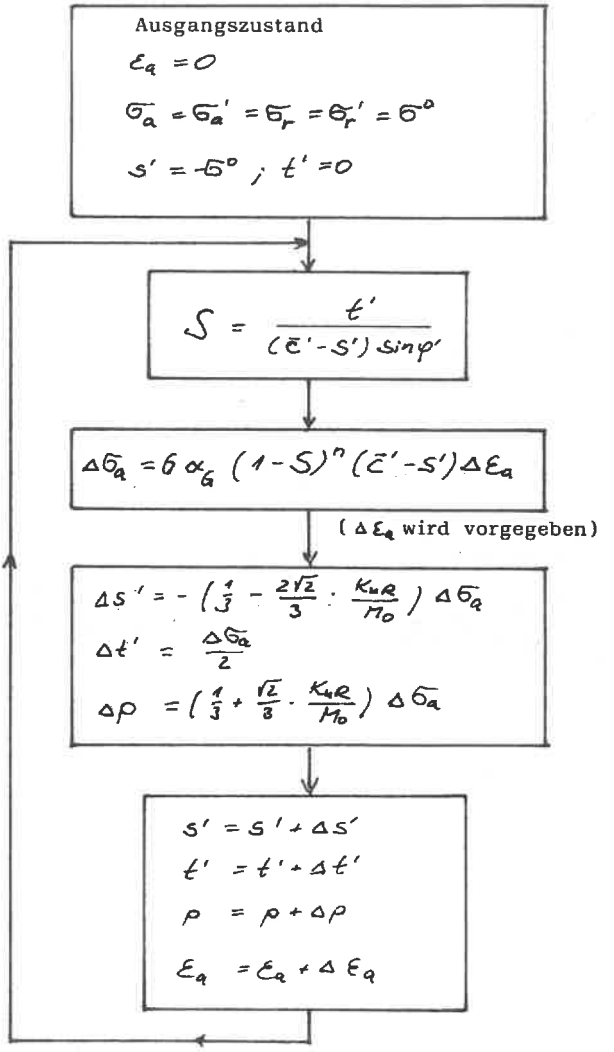
Daraus folgt:

$$\dot{s}' = -\frac{\dot{\sigma}_a' - \dot{\sigma}_r'}{2} = -\left(\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{K_{uR}}{M_0}\right) \cdot \frac{\dot{\sigma}_a}{2}$$

$$\dot{t}' = \frac{\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r}{2} = \frac{\dot{\sigma}_a}{2}$$

Die Gleichungen werden numerisch integriert, daher Übergang zur inkrementellen Darstellung.

Es ergibt sich folgendes Schema für den Rechenablauf (Programmierung auf Tischrechner):



3.3 Stoffmatrix für das hypoelastische Stoffgesetz

Spannungsgrößen und deren zeitlichen Ableitungen (Spannungsgeschwindigkeiten):

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\dot{\sigma}_m = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{xx}}\dot{\sigma}_{xx} + \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{yy}}\dot{\sigma}_{yy} + \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{zz}}\dot{\sigma}_{zz} = \frac{1}{3}(\dot{\sigma}_{xx} + \dot{\sigma}_{yy} + \dot{\sigma}_{zz})$$

$$\underline{\dot{\sigma}_m = \frac{1}{3}\dot{\sigma}_{ii}}$$

$$\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^D = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m) = \dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\sigma}_m$$

$$\underline{\dot{\sigma}_{ij}^D = \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\sigma}_{kk}}$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x) + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}$$

$$\dot{\tau}_{oct} = \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{\ldots}} \cdot \Big[\left(\tfrac{2}{3}\sigma_{xx} - \tfrac{1}{3}\sigma_{yy} - \tfrac{1}{3}\sigma_{zz}\right)\dot{\sigma}_{xx} + \left(-\tfrac{1}{3}\sigma_{xx} + \tfrac{2}{3}\sigma_{yy} - \tfrac{1}{3}\sigma_{zz}\right)\dot{\sigma}_{yy}$$

$$+ \left(-\tfrac{1}{3}\sigma_{xx} - \tfrac{1}{3}\sigma_{yy} + \tfrac{2}{3}\sigma_{zz}\right)\dot{\sigma}_{zz} + 2\sigma_{xy}\dot{\sigma}_{xy} + 2\sigma_{yz}\dot{\sigma}_{yz} + 2\sigma_{zx}\dot{\sigma}_{zx}\Big]$$

$$\dot{\tau}_{oct} = \frac{1}{3\tau_{oct}}\left[\sigma_{xx}^D\dot{\sigma}_{xx} + \sigma_{yy}^D\dot{\sigma}_{yy} + \sigma_{zz}^D\dot{\sigma}_{zz} + 2\sigma_{xy}\dot{\sigma}_{xy} + 2\sigma_{yz}\dot{\sigma}_{yz} + 2\sigma_{zx}\dot{\sigma}_{zx}\right]$$

$$\underline{\dot{\tau}_{oct} = \frac{1}{3\tau_{oct}}\sigma_{ij}^D\dot{\sigma}_{ij}}$$

Einsetzen der Spannungsgeschwindigkeiten in die Stoffgleichung (effektive Spannungen)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\frac{\dot{\sigma}_m'}{K} - \frac{\dot{\tau}_{oct}}{M}\right) + \frac{\dot{\sigma}_{ij}^{\,D}}{2G}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{3}\left[\frac{\dot{\sigma}_{xx}' + \dot{\sigma}_{yy}' + \dot{\sigma}_{zz}'}{3K} - \frac{1}{3M\tau_{oct}}\cdot\left(\sigma_{xx}^D\dot{\sigma}_{xx}' + \sigma_{yy}^D\dot{\sigma}_{yy}' + \sigma_{zz}^D\dot{\sigma}_{zz}' + 2\sigma_{xy}\dot{\sigma}_{xy} + 2\sigma_{yz}\dot{\sigma}_{yz} + 2\sigma_{zx}\dot{\sigma}_{zx}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2G}\left(\frac{2}{3}\dot{\sigma}_{xx}' - \frac{1}{3}\dot{\sigma}_{yy}' - \frac{1}{3}\dot{\sigma}_{zz}'\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} - \frac{\sigma_{xx}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{xx}' + \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} - \frac{\sigma_{yy}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{yy}' + \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} - \frac{\sigma_{zz}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{zz}'$$

$$- \frac{2\sigma_{xy}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{xy} - \frac{2\sigma_{yz}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{yz} - \frac{2\sigma_{zx}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{zx}$$

Entsprechend für ε_{yy} und ε_{zz} :

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} - \frac{\sigma_{xx}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{xx}' + \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} - \frac{\sigma_{yy}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{yy}' + \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} - \frac{\sigma_{zz}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{zz}'$$

$$- \frac{2\sigma_{xy}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{xy} - \frac{2\sigma_{yz}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{yz} - \frac{2\sigma_{zx}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{zx}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} - \frac{\sigma_{xx}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{xx}' + \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} - \frac{\sigma_{yy}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{yy}' + \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} - \frac{\sigma_{zz}^D}{9M\tau_{oct}}\right)\dot{\sigma}_{zz}'$$

$$- \frac{2\sigma_{xy}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{xy} - \frac{2\sigma_{yz}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{yz} - \frac{2\sigma_{zx}}{9M\tau_{oct}}\dot{\sigma}_{zx}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2G}\dot{\sigma}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2G}\dot{\sigma}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zy} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2G}\dot{\sigma}_{zx} = \dot{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx}$$

Zusammenfassung (Matrizenschreibweise):

$$\dot{\varepsilon} = \bar{C}\,\dot{\sigma}'$$

Mit

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}\right]^T$$

und

$$\sigma' = \left[\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\right]^T$$

ergibt sich $\bar{C}$ zu:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}-\frac{\sigma^D_{xx}}{9M\tau_{oct}} & \frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}-\frac{\sigma^D_{yy}}{9M\tau_{oct}} & \frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}-\frac{\sigma^D_{zz}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{xy}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{yz}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{zx}}{9M\tau_{oct}} \\
\frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}-\frac{\sigma^D_{xx}}{9M\tau_{oct}} & \frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}-\frac{\sigma^D_{yy}}{9M\tau_{oct}} & \frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}-\frac{\sigma^D_{zz}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{xy}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{yz}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{zx}}{9M\tau_{oct}} \\
\frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}-\frac{\sigma^D_{xx}}{9M\tau_{oct}} & \frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}-\frac{\sigma^D_{yy}}{9M\tau_{oct}} & \frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}-\frac{\sigma^D_{zz}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{xy}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{yz}}{9M\tau_{oct}} & -\frac{2\sigma_{zx}}{9M\tau_{oct}} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}
\end{bmatrix}$$

oder

$$\bar{C} = \begin{bmatrix}
c_1 & c_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\
c_3 & c_1 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\
c_3 & c_3 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2
\end{bmatrix} - \frac{1}{9M\tau_{oct}} \cdot \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}
\sigma^D_{xx} \\ \sigma^D_{yy} \\ \sigma^D_{zz} \\ 2\sigma_{xy} \\ 2\sigma_{yz} \\ 2\sigma_{zx}
\end{Bmatrix}$$

mit

$$c_1 = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}$$

$$c_2 = \frac{1}{G}$$

$$c_3 = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}$$

$$
\bar{C} = \frac{1}{18\,KGM\tau_{oct}} \cdot \begin{bmatrix}
2GM\tau_{oct} + 6KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{xx}^{D} & 2GM\tau_{oct} - 3KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{yy}^{D} & 2GM\tau_{oct} - 3KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{zz}^{D} & -4KG\sigma_{xy} & -4KG\sigma_{yz} & -4KG\sigma_{zx} \\
2GM\tau_{oct} - 3KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{xx}^{D} & 2GM\tau_{oct} + 6KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{yy}^{D} & 2GM\tau_{oct} - 3KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{zz}^{D} & -4KG\sigma_{xy} & -4KG\sigma_{yz} & -4KG\sigma_{zx} \\
2GM\tau_{oct} - 3KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{xx}^{D} & 2GM\tau_{oct} - 3KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{yy}^{D} & 2GM\tau_{oct} + 6KM\tau_{oct} - 2KG\sigma_{zz}^{D} & -4KG\sigma_{xy} & -4KG\sigma_{yz} & -4KG\sigma_{zx} \\
0 & 0 & 0 & 18KM\tau_{oct} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18KM\tau_{oct} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18KM\tau_{oct}
\end{bmatrix}
$$

Abkürzungen (Hilfsgrößen, die nur hier verwendet werden):

$$2GM\tau_{oct} = a \qquad a + 2b = e \qquad \alpha = 18\,KGM\tau_{oct}$$

$$3KM\tau_{oct} = b \qquad a - b = f$$

$$2KG = c$$

$$g_x = e - c\,\sigma_{xx}^D \qquad h_x = f - c\,\sigma_{xx}^D \qquad i_x = -2c\,\sigma_{xy} \qquad j = 6b$$

$$g_y = e - c\,\sigma_{yy}^D \qquad h_y = f - c\,\sigma_{yy}^D \qquad i_y = -2c\,\sigma_{yz}$$

$$g_z = e - c\,\sigma_{zz}^D \qquad h_z = f - c\,\sigma_{zz}^D \qquad i_z = -2c\,\sigma_{zx}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} g_x & h_y & h_z & i_x & i_y & i_z \\ h_x & g_y & h_z & i_x & i_y & i_z \\ h_x & h_y & g_z & i_x & i_y & i_z \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

- Auflösung nach den Spannungsgeschwindigkeiten

Die drei unteren Gleichungen ergeben:

$$\dot{\sigma}_{xy} = G \cdot 2\dot{\varepsilon}_{xy}$$

$$\dot{\sigma}_{yz} = G \cdot 2\dot{\varepsilon}_{yz}$$

$$\dot{\sigma}_{zx} = G \cdot 2\dot{\varepsilon}_{zx}$$

Eingesetzt in die drei oberen Gleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{\alpha}\left(g_x\dot{\sigma}'_{xx} + h_y\dot{\sigma}'_{yy} + h_z\dot{\sigma}'_{zz} + i_x G\,2\dot{\varepsilon}_{xy} + i_y G\,2\dot{\varepsilon}_{yz} + i_z G\,2\dot{\varepsilon}_{zx}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{\alpha}\left(h_x\dot{\sigma}'_{xx} + g_y\dot{\sigma}'_{yy} + h_z\dot{\sigma}'_{zz} + \ldots \quad \text{— " —} \quad \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{\alpha}\left(h_x\dot{\sigma}'_{xx} + h_y\dot{\sigma}'_{yy} + g_z\dot{\sigma}'_{zz} + \ldots \quad \text{— " —} \quad \right)$$

oder

$$g_x\dot{\sigma}'_{xx} + h_y\dot{\sigma}'_{yy} + h_z\dot{\sigma}'_{zz} = r_x$$

$$h_x\dot{\sigma}'_{xx} + g_y\dot{\sigma}'_{yy} + h_z\dot{\sigma}'_{zz} = r_y$$

$$h_x\dot{\sigma}'_{xx} + h_y\dot{\sigma}'_{yy} + g_z\dot{\sigma}'_{zz} = r_z$$

mit $r_i = \alpha \dot{\varepsilon}_{ii} - i_x G 2 \dot{\varepsilon}_{xy} - i_y G 2 \dot{\varepsilon}_{yz} - i_z G 2 \dot{\varepsilon}_{zx}$ (ε_{ii} wird nicht summiert)

$$D = \begin{vmatrix} g_x & h_y & h_z \\ h_x & g_y & h_z \\ h_x & h_y & g_z \end{vmatrix} = g_x g_y g_z + h_x h_y h_z + h_x h_y h_z - g_y h_x h_z - g_x h_y h_z - g_z h_x h_y$$

$$= (e - c\sigma_{xx}^D)(e - c\sigma_{yy}^D)(e - c\sigma_{zz}^D) + 2(f - c\sigma_{yy}^D)(f - c\sigma_{zz}^D)(f - c\sigma_{xx}^D)$$

$$-(f - c\sigma_{zz}^D)(e - c\sigma_{yy}^D)(f - c\sigma_{xx}^D) - (e - c\sigma_{xx}^D)(f - c\sigma_{zz}^D)(f - c\sigma_{yy}^D) - (e - c\sigma_{zz}^D)(f - c\sigma_{xx}^D)(f - c\sigma_{yy}^D)$$

$$= e^3 - ce^2\sigma_{yy}^D - ce^2\sigma_{xx}^D + c^2e\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D - ce^2\sigma_{zz}^D + c^2e\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D + c^2e\sigma_{xx}^D\sigma_{zz}^D - c^3\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D$$

$$+2f^3 - 2cf^2\sigma_{zz}^D - 2cf^2\sigma_{yy}^D + 2c^2f\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D - 2cf^2\sigma_{xx}^D + 2c^2f\sigma_{xx}^D\sigma_{zz}^D + 2c^2f\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D - 2c^3\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D$$

$$-ef^2 + cf^2\sigma_{yy}^D + cef\sigma_{zz}^D - c^2f\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D + cef\sigma_{xx}^D - c^2f\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D - c^2e\sigma_{xx}^D\sigma_{zz}^D + c^3\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D$$

$$-ef^2 + cef\sigma_{zz}^D + cf^2\sigma_{xx}^D - c^2f\sigma_{xx}^D\sigma_{zz}^D + cef\sigma_{yy}^D - c^2e\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D - c^2f\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D + c^3\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D$$

$$-ef^2 + cef\sigma_{xx}^D + cf^2\sigma_{zz}^D - c^2f\sigma_{xx}^D\sigma_{zz}^D + cef\sigma_{yy}^D - c^2e\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D - c^2f\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D + c^3\sigma_{xx}^D\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D$$

Unter Berücksichtigung von $\sigma_{ii}^D = 0$ ergibt sich

$$D = e^3 + 2f^3 - 3ef^2$$

$$= [(a+2b)^3 + 2(a-b)^3 - 3(a+2b)(a-b)^2]$$

$$= [(2G+6K)^3 + 2(2G-3K)^3 - 3(2G+6K)(2G-3K)^2] \cdot M^3 \tau_{oct}^3$$

$$= M^3 \tau_{oct}^3 [8G^3 + 72G^2K + 216GK^2 + 216K^3$$
$$+16G^3 - 72G^2K + 108GK^2 - 54K^3$$
$$-24G^3 + 72G^2K - 54GK^2 - 72G^2K + 216GK^2 - 162K^3]$$

$$D = 486 K^2 G M^3 \tau_{oct}^3$$

$$\dot{\sigma}_{xx}' = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} r_x & h_y & h_z \\ r_y & g_y & h_z \\ r_z & h_y & g_z \end{vmatrix}$$

$$D_x = r_x g_y g_z + r_z h_y h_z + r_y h_y h_z - r_z g_y h_z - r_x h_y h_z - r_y g_z h_y$$

$$= r_x (g_y g_z - h_y h_z) + r_y (h_y h_z - g_z h_y) + r_z (h_y h_z - g_y h_z)$$

$$= r_x (g_y g_z - h_y h_z) + r_y h_y (h_z - g_z) + r_z h_z (h_y - g_y)$$

$$= r_x [(e - c\sigma_{yy}^D)(e - \sigma_{zz}^D) - (f - c\sigma_{yy}^D)(f - c\sigma_{zz}^D)] + r_y (f - c\sigma_{yy}^D)(f - e) + r_z (f - c\sigma_{zz}^D)(f - e)$$

$$= r_x [e^2 - ec\sigma_{zz}^D - ec\sigma_{yy}^D + c^2\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D - f^2 + cf\sigma_{zz}^D + cf\sigma_{yy}^D - c^2\sigma_{yy}^D\sigma_{zz}^D] + \dots$$

$$= r_x [e^2 - f^2 + ce\sigma_{xx}^D - cf\sigma_{xx}^D] + \dots \qquad (\sigma_{xx}^D = -(\sigma_{yy}^D + \sigma_{zz}^D))$$

$$= r_x (a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 + 2ab - b^2 + c\sigma_{xx}^D \cdot 3b)$$

$$+ r_y (a - b - c\sigma_{yy}^D)(-3b)$$

$$+ r_z (a - b - c\sigma_{zz}^D)(-3b)$$

$$= 3b[r_x (2a + b + c\sigma_{xx}^D) - r_y (a - b - c\sigma_{yy}^D) - r_z (a - b - c\sigma_{zz}^D)]$$

$$= 3b[(\alpha\dot{\varepsilon}_{xx} - i_x G 2\dot{\varepsilon}_{xy} - i_y G 2\dot{\varepsilon}_{yz} - i_z G 2\dot{\varepsilon}_{zx})(2a + b + c\sigma_{xx}^D)$$

$$+ (\alpha\dot{\varepsilon}_{yy} - i_x G 2\dot{\varepsilon}_{xy} - i_y G 2\dot{\varepsilon}_{yz} - i_z G 2\dot{\varepsilon}_{zx})(-a + b + c\sigma_{yy}^D)$$

$$+ (\alpha\dot{\varepsilon}_{zz} - \dots \qquad)(\dots + c\sigma_{zz}^D)]$$

$$= 3b[2a\alpha\dot{\varepsilon}_{xx} - a\alpha\dot{\varepsilon}_{yy} - a\alpha\dot{\varepsilon}_{zz}$$

$$+ b\alpha\dot{\varepsilon}_{xx} + b\alpha\dot{\varepsilon}_{yy} + b\alpha\dot{\varepsilon}_{zz}$$

$$- 3bG(i_x 2\dot{\varepsilon}_{xy} + i_y 2\dot{\varepsilon}_{yz} + i_z 2\dot{\varepsilon}_{zx})$$

$$+ c\alpha(\sigma_{xx}^D\dot{\varepsilon}_{xx} + \sigma_{yy}^D\dot{\varepsilon}_{yy} + \sigma_{zz}^D\dot{\varepsilon}_{zz})]$$

$$D_x = 3b\alpha\Big[(2a + b + c\sigma_{xx}^D)\dot{\varepsilon}_{xx} + (-a + b + c\sigma_{yy}^D)\dot{\varepsilon}_{yy} + (-a + b + c\sigma_{zz}^D)\dot{\varepsilon}_{zz}$$

$$- \frac{3b}{\alpha} i_x G 2\dot{\varepsilon}_{xy} - \frac{3b}{\alpha} i_y G 2\dot{\varepsilon}_{yz} - \frac{3b}{\alpha} i_z G 2\dot{\varepsilon}_{zx}\Big]$$

$$\dot{\sigma}_{xx}' = \frac{3 \cdot 3\, KM\, \tau_{oct} \cdot 18\, KGM\, \tau_{oct}}{486\, K^2 G M^3 \tau_{oct}^3} \cdot [\dots] = \frac{1}{3M\tau_{oct}} \cdot [\dots]$$

$$\dot{\sigma}_{xx}' = \left(K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^D}{\tau_{oct}}\right)\dot{\varepsilon}_{xx} + \left(K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^D}{\tau_{oct}}\right)\dot{\varepsilon}_{yy}$$

$$+\left(K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^D}{\tau_{oct}}\right)\dot{\varepsilon}_{zz} + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}}2\dot{\varepsilon}_{xy}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}}2\dot{\varepsilon}_{yz} + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}}2\dot{\varepsilon}_{zx}$$

$$\dot{\sigma}_{yy}' = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} g_x & r_x & h_z \\ h_x & r_y & h_z \\ h_x & r_z & g_z \end{vmatrix}$$

$$D_y = r_y g_x g_z + r_x h_x h_z + r_z h_x h_z - r_y h_x h_z - r_z h_x h_z - r_x g_z h_x$$

Indexvertauschung: $x \to y;\ y \to z;\ z \to x$

$$\rightsquigarrow \quad \dot{\sigma}_{xx}' \to \dot{\sigma}_{yy}'$$

Entsprechend erhält man auch $\dot{\sigma}_{zz}'$.

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \boldsymbol{D}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$$

mit $\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}]^T$

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}]^T$

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix}
K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^{D}}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^{D}}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^{D}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}} \\
K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^{D}}{\tau_{oct}} & K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^{D}}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^{D}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}} \\
K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xx}^{D}}{\tau_{oct}} & K - \frac{2}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yy}^{D}}{\tau_{oct}} & K + \frac{4}{3}G + \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zz}^{D}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{xy}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{yz}}{\tau_{oct}} & \frac{2}{3}\frac{KG}{M}\frac{\sigma_{zx}}{\tau_{oct}} \\
0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot \operatorname{diag}\left(\sigma^D_{xx}, \sigma^D_{yy}, \sigma^D_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx} \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{K \; G}{M \; \tau_{oct}}
$$

$$
\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2
$$

Anhang zu 4

4.1 Elementmatrizen für den ebenen und den axialsymmetrischen Zustand

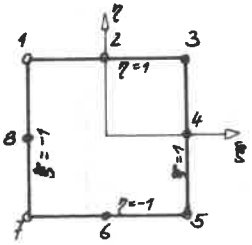
Siehe hierzu auch ZIENKIEWICZ (1977).

Fest vorgegeben: biquadratischer Ansatz für Verschiebungen; Ansätze für Porenwasserüberdruck biquadratisch (8 Knoten . quadratisch-linear (6 Knoten) und bilinear (4 Knoten).

Abkürzungen: EV = ebener Zustand (ebener Verzerrungs- und Fließzustand)
AX = axialsymmetrischer Zustand

Interpolationsfunktionen und deren Ableitungen in lokalen (natürlichen) Koordinaten:

* 8-Knoten-Interpolation für Koordinaten und Verschiebungen sowie für Porenwasserüberdruck beim 88-Element:



$$N_1^B = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$$
$$N_2^B = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_3^B = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$$
$$N_4^B = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$
$$N_5^B = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$$
$$N_6^B = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$N_7^B = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$
$$N_8^B = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial N_1^8}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - \eta)(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_1^8}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta)$$

$$\frac{\partial N_2^8}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_2^8}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial N_3^8}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + \eta)(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_3^8}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta)$$

$$\frac{\partial N_4^8}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2) \qquad \frac{\partial N_4^8}{\partial \eta} = -(1+\xi)\eta$$

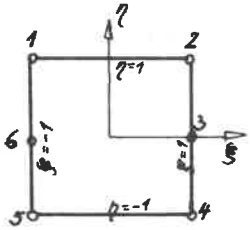
$$\frac{\partial N_5^8}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - \eta)(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_5^8}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(-\xi+2\eta)$$

$$\frac{\partial N_6^8}{\partial \xi} = -\xi(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_6^8}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial N_7^8}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + \eta)(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_7^8}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta)$$

$$\frac{\partial N_8^8}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta^2) \qquad \frac{\partial N_8^8}{\partial \eta} = -(1-\xi)\eta$$

* 6-Knoten- Interpolation für Porenwasserüberdruck beim 86-Element



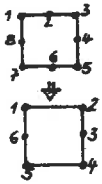
Die entsprechenden Ansatzfunktionen erhält man z.B.dadurch, daß im obigen 8-Knoten-Ansatz $p = N^8 p_e$ die Funktionswerte p_2 und p_6 eliminiert werden.
Lineare Interpolation entlang den Rändern $\eta = 1$ und $\eta = -1$ liefert die Bedingungen

$$p_2 = \frac{p_1 + p_3}{2} \quad \text{und} \quad p_6 = \frac{p_5 + p_7}{2}$$

Der Ansatz fürs ganze Element lautet dann:

$$p = N_1^8 p_1 + N_2^8 \frac{p_1 + p_3}{2} + N_3^8 p_3 + N_4^8 p_4 + N_5^8 p_5 + N_6^8 \frac{p_5 + p_7}{2} + N_7^8 p_7 + N_8^8 p_8$$

$$p = \left(N_1^8 + \frac{N_2^8}{2}\right) p_1 + \left(\frac{N_2^8}{2} + N_3^8\right) p_3 + N_4^8 p_4 + \left(N_5^8 + \frac{N_6^8}{2}\right) p_5 + \left(\frac{N_6^8}{2} + N_7^8\right) p_7 + N_8^8 p_8$$



Daraus folgt nach entsprechender Umnumerierung:

$$N_1^6 = N_1^8 + \frac{N_2^8}{2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_4^6 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\eta$$

$$N_2^6 = \frac{N_2^8}{2} + N_3^8 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) + (1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$$

$$N_2^6 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\eta$$

$$N_3^6 = N_4^8$$

$$N_5^6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_4^6 = N_5^8 + \frac{N_6^8}{2} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_4^6 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\eta$$

$$N_5^6 = \frac{N_6^8}{2} + N_7^8 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$

$$N_5^6 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\eta$$

$$N_6^6 = N_8^8$$

$$N_6^6 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial N_1^6}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)\eta \qquad \frac{\partial N_1^6}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+2\eta)$$

$$\frac{\partial N_2^6}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)\eta \qquad \frac{\partial N_2^6}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+2\eta)$$

$$\frac{\partial N_3^6}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2) \qquad \frac{\partial N_3^6}{\partial \eta} = -(1+\xi)\eta$$

$$\frac{\partial N_4^6}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)\eta \qquad \frac{\partial N_4^6}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-2\eta)$$

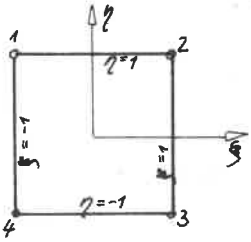
$$\frac{\partial N_5^6}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)\eta \qquad \frac{\partial N_5^6}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-2\eta)$$

$$\frac{\partial N_6^6}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta^2) \qquad \frac{\partial N_6^6}{\partial \eta} = -1(1-\xi)\eta$$

Analog läßt sich auch eine 7-Knoten-Interpolation ableiten. Diese ist in CONSOL ebenfalls enthalten (87-Element), wird jedoch in dieser Arbeit nicht verwendet.

Die 6-Punkt-Ansatzfunktion läßt sich auch nach ZIENKIEWICZ (1977), S.158, direkt anschreiben. Man muß dazu die dort angegebenen Schritte 1 und 3 durchführen.

* 4-Knoten-Interpolation für Porenwasserüberdruck beim 84-Element



$$N_1^4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$
$$N_2^4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_3^4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_4^4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_1^4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_1^4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_2^4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_2^4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_3^4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_3^4}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_4^4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_4^4}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)$$

Verschiebungsansatz, siehe Gl.(4.3):

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{N}_u \, \boldsymbol{u}_e$$

bei allen Elementen:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{Bmatrix}_{2,1} = \begin{bmatrix} N_1^8 & 0 & N_2^8 & 0 & \dots & N_8^8 & 0 \\ 0 & N_1^8 & 0 & N_2^8 & \dots & 0 & N_8^8 \end{bmatrix}_{2,16} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \vdots \\ u_{x8} \\ u_{y8} \end{Bmatrix}_{16,1}$$

Porenwasserüberdruck-Ansatz, siehe Gl.(4.4):

$$\tilde{p} = \boldsymbol{N}_p \, \boldsymbol{p}_e$$

beim 88-Element:

$$\tilde{p} = \left[N_1^8, N_2^8, \dots N_8^8 \right]_{1,8} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_8 \end{Bmatrix}_{8,1}$$

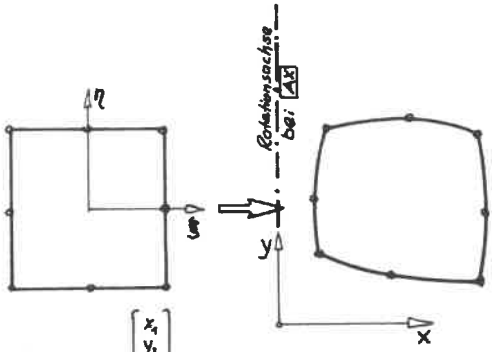
beim 86-Element:

$$\tilde{p} = \left[N_1^6, N_2^6, \dots N_6^6 \right]_{1,6} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_6 \end{Bmatrix}_{6,1}$$

beim 84-Element:

$$\tilde{p} = \left[N_1^4, N_2^4, N_3^4, N_4^4 \right]_{1,4} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}_{4,1}$$

Koordinatentransformation:



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}' \boldsymbol{x}_e$$

$$\underset{2,1}{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}} = \underset{2,16}{\begin{bmatrix} N_1^8 & 0 & N_2^8 & 0 & \dots & N_8^8 & 0 \\ 0 & N_1^8 & 0 & N_2^8 & \dots & 0 & N_8^8 \end{bmatrix}} \underset{16,1}{\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix}}$$

$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N}_u$: Isoparametrie bezüglich Verschiebungsansatz:

Räumliche Ableitungen:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^m}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial N_i^m}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}' \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^m}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial N_i^m}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{bzw.:} \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^m}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial N_i^m}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}'^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^m}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial N_i^m}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}'$ . . . Jacobi-Matrix:

$$\underset{2,2}{\boldsymbol{J}'} = \underset{2,16}{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^8}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^8}{\partial \xi} & \dots & \dfrac{\partial N_8^8}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1^8}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2^8}{\partial \eta} & \dots & \dfrac{\partial N_8^8}{\partial \eta} \end{bmatrix}} \cdot \underset{16,2}{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}}$$

Differentielles Flächenelement:

$$dx\,dy = \det \boldsymbol{J}' \, d\xi \, d\eta$$

Numerische Integration:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j f(\xi_j,\eta_i)$$

H_i und H_j sind die Gewichtungen an den Aufpunkten.

Für die Gaußsche Quadratur gilt:

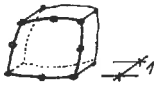
	$\pm\xi_i$	H_i
$n=1$:	0	2,0
$n=2$:	0,57735 02691 89626	1,0
$n=3$:	0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556
	0	0,88888 88888 88889
$n=4$:	0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
	0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546

u.s.w. siehe ZIENKIEWICZ (1977), S.198.

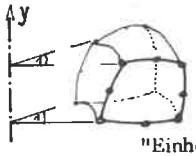
ELEMENTMATRIZEN

Integrationsbereich:

EV



"Einheitsdicke"



"Einheitsbogenlänge"

AX

Steifigkeitsmatrix:

EV

$$K_e = \int_{F_e} B_u^T D B_u \, dx\,dy$$

$$K_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j \, B_u^T D B_u \, \det J'$$

AX

$$K_e = \int_{F_e} B_u^T D B_u \, x \, dx\,dy$$

$$K_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j \, B_u^T D B_u \, x \, \det J'$$

H_i , H_j und J' (und x) hängen von ξ_i und η_i in oben dargestellterWeise ab.

Die Spannungs – Verzerrungsmatrix **D** ist im allgemeinen Fall ebenfalls von ξ und η abhängig, und zwar indirekt über den an jedem Aufpunkt unterschiedlichen Spannungszustand.
Im linear elastischen (K,G = const) und hypoelastischen Fall (K,G = f($\underset{\sim}{\sigma}'$)) gilt:

$$D = \begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}_{4,4}$$

Die umfangreichen Formeln für die elastoplastische **D** - Matrix sind bei SCHAD (1979), S.78, zu finden.

Die Ableitungsmatrix B_u ist ebenfalls von ξ_i und η_i abhängig; räumliche Ableitungen und deren Transformationen siehe oben.

EV

$$B_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^B}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^B}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8^B}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^B}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^B}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8^B}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1^B}{\partial y} & \frac{\partial N_1^B}{\partial x} & \frac{\partial N_2^B}{\partial y} & \frac{\partial N_2^B}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8^B}{\partial y} & \frac{\partial N_8^B}{\partial x} \end{bmatrix}_{4,16}$$

AX

$$B_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^B}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^B}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8^B}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^B}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^B}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8^B}{\partial y} \\ \frac{N_1^B}{x} & 0 & \frac{N_2^B}{x} & 0 & \cdots & \frac{N_8^B}{x} & 0 \\ \frac{\partial N_1^B}{\partial y} & \frac{\partial N_1^B}{\partial x} & \frac{\partial N_2^B}{\partial y} & \frac{\partial N_2^B}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8^B}{\partial y} & \frac{\partial N_8^B}{\partial x} \end{bmatrix}_{4,16}$$

Koppelmatrix:

EV	AX
$C_e = \int_{F_e} B_u^T J N_p \, dx\,dy$	$C_e = \int_{F_e} B_u^T J N_p \, x \, dx\,dy$
$C_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j B_u^T J N_p \det J'$	$C_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_u^T J N_p \, x \det J'$

$$J = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sickermatrix:

EV	AX
$H_e = \int_{F_e} \frac{k}{\gamma_w} B_p^T B_p \, dx\,dy$	$H_e = \int_{F_e} \frac{k}{\gamma_w} B_p^T B_p \, x \, dx\,dy$
$H_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{k}{\gamma_w} H_i H_j B_p^T B_p \det J'$	$H_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{k}{\gamma_w} H_i H_j B_p^T B_p \, x \det J'$

mit $$B_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^m}{\partial x} & \frac{\partial N_2^m}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_m^m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^m}{\partial y} & \frac{\partial N_2^m}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_m^m}{\partial y} \end{bmatrix}_{2,m}$$

$m = 8, 6$ oder 4

Knotenkräfte:

* infolge Randspannung:

EV $$f_{te} = \int_{S_{te}} N_u^T \hat{t}\, dS$$

AX $$f_{te} = \int_{S_{te}} N_u^T \hat{t} \times dS$$

(S_{te} bzw. dS in x-y-Ebene)

$$f_{te} = \sum_{i=1}^{n} H_i N_u^T \hat{t} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$f_{te} = \sum_{i=1}^{n} H_i N_u^T \hat{t} \times \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2}$$

für η = const,

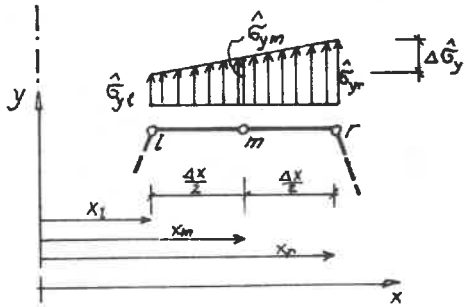
$$f_{te} = \sum_{i=1}^{n} H_i N_u^T \hat{t} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$f_{te} = \sum_{i=1}^{n} H_i N_u^T \hat{t} \times \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2}$$

für ξ = const. siehe z.B. RUNESSON (1978 ,II.6)

Sonderfälle, die für das Programm CONSOL vorgesehen sind (geschlossene Integration):

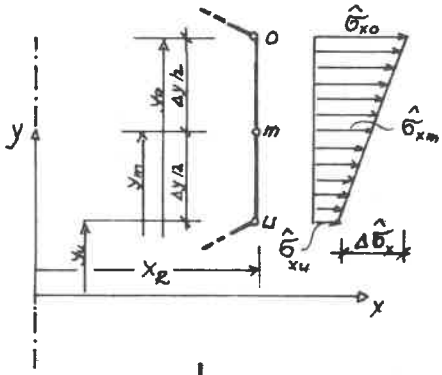
-Linear veränderliche Normalspannung auf geradem, parallel zur x-Achse verlaufendem Elementrand:



EV
$$f_{yl} = \frac{1}{6}\Delta x\, \hat{\sigma}_{yl}$$
$$f_{ym} = \frac{2}{3}\Delta x\, \hat{\sigma}_{ym}$$
$$f_{yr} = \frac{1}{6}\Delta x\, \hat{\sigma}_{yr}$$

AX
$$f_{yl} = \frac{1}{60}\Delta x\,(10 x_l\, \hat{\sigma}_{yl} - \Delta x\, \Delta\hat{\sigma}_y)$$
$$f_{ym} = \frac{1}{30}\Delta x\,(20 x_m\, \hat{\sigma}_{ym} + \Delta x\, \Delta\hat{\sigma}_y)$$
$$f_{yr} = \frac{1}{60}\Delta x\,(10 x_r\, \hat{\sigma}_{yr} - \Delta x\, \Delta\hat{\sigma}_y)$$

-Linear veränderliche Normalspannung auf geradem, parallel zur y-Achse verlaufendem Elementrand:



EV

$$f_{xo} = \frac{1}{6}\Delta y\,\hat{\sigma}_{xo}$$

$$f_{xm} = \frac{2}{3}\Delta y\,\hat{\sigma}_{xm}$$

$$f_{xu} = \frac{1}{6}\Delta y\,\hat{\sigma}_{xu}$$

AX

$$f_{xo} = \frac{1}{6}\Delta y\,x_R\,\hat{\sigma}_{xo}$$

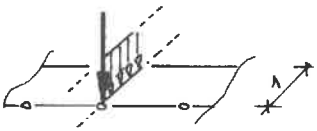
$$f_{xm} = \frac{2}{3}\Delta y\,x_R\,\hat{\sigma}_{xm}$$

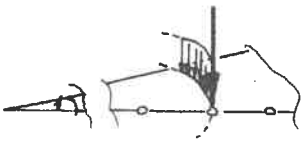
$$f_{xu} = \frac{1}{6}\Delta y\,x_R\,\hat{\sigma}_{xu}$$

* Einzelkräfte:

Darüber hinaus können beliebige äußere Einzelkräfte in den Knoten durch Addition an entsprechender Stelle des globalen Lastvektors berücksichtigt werden. Diese Kräfte stellen dann integrierte Linienlasten dar, wobei zu beachten ist, daß sich die Integrationsbereiche senkrecht zur x-y-Ebene über die Einheitsdicke bzw. die Einheitsbogenlänge erstrecken.

EV





AX

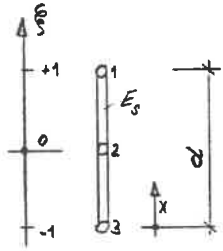
4.2 FE-Lösung für einfache eindimensionale Fälle bei $\Delta t=0$

(linear elastisches Stoffgesetz)

Gleichung (4.10):

$$\begin{aligned} K \cdot u - C \cdot p &= f \\ -C \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

1. Elementmatrizen



- quadratische Ansatzfunktion
  (u;p bei 33-Element):

$$N_1 = \frac{1}{2}(\xi+1)\xi$$

$$N_2 = 1-\xi^2$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(\xi-1)\xi$$

$$\xi = \frac{2x}{d} - 1 \quad ; \quad x = \frac{d}{2}(\xi+1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{d} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{d}{2}$$

- lineare Ansatzfunktion
  (p bei 32-Element):

$$N_1 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

a. Steifigkeitsmatrix (für 32- und 33- Element):

$$K = \int_d B_u^T D B_u \, dx$$

mit $$B_u = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tfrac{1}{2}(\xi+1)\xi\,,\ 1-\xi^2\,,\ \tfrac{1}{2}(\xi-1)\xi\right]\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$= \left[\xi+\tfrac{1}{2}\ ,\ -2\xi\ ,\ \xi-\tfrac{1}{2}\right]\cdot\frac{2}{d}$$

$$D = E_s$$

$$K = \frac{4E_s}{d^2}\cdot\int_d \begin{Bmatrix}\xi+\frac{1}{2}\\ -2\xi\\ \xi+\frac{1}{2}\end{Bmatrix}\left[\xi+\tfrac{1}{2}\ ,\ -2\xi\ ,\ \xi-\tfrac{1}{2}\right]dx$$

$$= \frac{2E_s}{d}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}\xi^2+\xi+\frac{1}{4} & -2\xi^2-\xi & \xi^2-\frac{1}{4}\\ -2\xi^2-\xi & 4\xi^2 & -2\xi^2+2\xi\\ \xi^2-\frac{1}{4} & -2\xi^2+\xi & \xi^2-\xi+\frac{1}{4}\end{bmatrix}d\xi$$

$$\left[\int_{-1}^{+1}\xi^2 d\xi = \tfrac{2}{3}\ ;\ \int_{-1}^{+1}\xi\, d\xi = 0\ ;\ \int_{-1}^{+1}\text{const}\, d\xi = 2\cdot\text{const}\right]$$

$$K = \frac{E_s}{3d}\cdot\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\\ -8 & 16 & -8\\ 1 & -8 & 7\end{bmatrix}$$

b. Koppelmatrix

$$C = \int_d B_u^T N_p\, dx$$

– 32-Element (p-Verlauf linear)

$$C = \frac{2}{d}\int_d \begin{Bmatrix}\xi+\frac{1}{2}\\ -2\xi\\ \xi-\frac{1}{2}\end{Bmatrix}\cdot\left[\tfrac{1}{2}(1+\xi)\ ,\ \tfrac{1}{2}(1-\xi)\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}\frac{\xi^2}{2}+\frac{3}{4}\xi+\frac{1}{4} & -\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi}{4}+\frac{1}{4}\\ -\xi^2-\xi & \xi^2-\xi\\ \frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi}{4}-\frac{1}{4} & -\frac{\xi^2}{2}+\frac{3}{4}\xi-\frac{1}{4}\end{bmatrix}d\xi$$

$$C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

– 33-Element (p-Verlauf quadratisch)

$$C = \frac{2}{d}\cdot\int_d \begin{Bmatrix} \xi+\frac{1}{2} \\ -2\xi \\ \xi-\frac{1}{2} \end{Bmatrix}\cdot\left[\tfrac{1}{2}(1+\xi)\xi\ ,\ 1-\xi^2\ ,\ \tfrac{1}{2}(\xi-1)\xi\right]dx$$

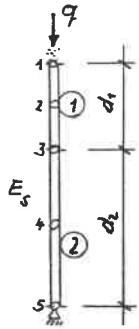
$$C = \int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} \frac{\xi^3}{2}+\frac{3}{4}\xi^2+\frac{\xi}{4} & -\xi^3-\frac{\xi^2}{2}+\xi+\frac{1}{2} & \frac{\xi^3}{2}-\frac{\xi^2}{4}-\frac{\xi}{4} \\ -\xi^3-\xi^2 & 2\xi^3-2\xi & -\xi^3+\xi^2 \\ \frac{\xi^3}{2}+\frac{\xi^2}{4}-\frac{\xi}{4} & -\xi^3+\frac{\xi^2}{2}+\xi-\frac{1}{2} & \frac{\xi^3}{2}-\frac{3}{4}\xi^2+\frac{\xi}{4} \end{bmatrix}d\xi$$

$$C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Eindimensionales Problem, zwei Elemente, oben entwässert

Unbekannte Verschiebungen: u_1, u_2, u_3, u_4

$d_1/d_2 = \alpha$



Steifigkeitsmatrix:

$$K = K_{①} + K_{②}$$

$$K = \frac{E_s}{3}\cdot\begin{bmatrix} \frac{7}{d_1} & -\frac{8}{d_1} & \frac{1}{d_1} & 0 \\ -\frac{8}{d_1} & \frac{16}{d_1} & -\frac{8}{d_1} & 0 \\ \frac{1}{d_1} & -\frac{8}{d_1} & \frac{7}{d_1}+\frac{7}{d_2} & -\frac{8}{d_2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{d_2} & \frac{16}{d_2} \end{bmatrix}$$

(reduziert, da $u_5 = 0$)

Inversion:

$$K^{-1} = \frac{d_1}{\alpha E_s} \cdot \begin{bmatrix} \alpha+1 & \frac{\alpha}{2}+1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{7}{16}\alpha+1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

Koppelmatrix und Lösung für :

a. ① und ② = 32-Elemente

unbekannte Porenwasserüberdrücke: p_3 und p_5

Koppelmatrix $C = C_{①} + C_{②}$

$$C = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$ (reduziert, da $p_1 = 0$ und $u_5 = 0$)

Auflösung nach Porenwasserüberdruck:

Aus Gl. (4.10) folgt $C^T K^{-1} C \, p = -C^T K^{-1} f$

$$C^T K^{-1} = \frac{d_1}{6\alpha E_s} \cdot \begin{bmatrix} 3\alpha+3 & \frac{9}{4}\alpha+3 & 3 & \frac{3}{4} \\ 3 & 3 & 3 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$$C^T K^{-1} C = \frac{d_1}{6\alpha E_s} \cdot \begin{bmatrix} 2(\alpha+1) & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-C^T K^{-1} f = \frac{d_1}{2\alpha E_s} \cdot q \begin{Bmatrix} \alpha+1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

LGS:

$$\begin{bmatrix} 2(\alpha+1) & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_3 \\ p_5 \end{Bmatrix} = 3 \cdot \begin{Bmatrix} \alpha+1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot q$$

$$\rightsquigarrow p_3 = \frac{6\alpha+3}{4\alpha+3}\cdot q \quad ; \quad \varepsilon_{p3} = \frac{p_3 - q}{q} = \frac{2\alpha}{4\alpha+3}$$

$$p_5 = \frac{3\alpha+3}{4\alpha+3}\cdot q \quad ; \quad \varepsilon_{p5} = \frac{p_5 - q}{q} = -\frac{\alpha}{4\alpha+3}$$

Durch lineare Interpolation:

$$p_2 = \frac{1}{2}(p_3 + 0) = \frac{6\alpha+3}{8\alpha+6}\cdot q \quad , \quad \varepsilon_{p2} = -\frac{2\alpha+3}{8\alpha+6}$$

b. (1) = 33-Element, (2) = 32-Element

unbekannte Porenwasserüberdrücke: p_2, p_3, p_5

Koppelmatrix $\quad C = C_{(1)} + C_{(2)}$

$$C = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$ (reduziert, da $p_1 = 0$ und $u_5 = 0$)

$$C^T K^{-1} = \frac{d_1}{6\alpha E_s}\cdot\begin{bmatrix} 4\alpha & 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha+3 & \frac{5}{4}\alpha+3 & 3 & \frac{3}{4} \\ 3 & 3 & 3 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$C^T K^{-1} C = \frac{d_1}{16\alpha E_s}\begin{bmatrix} 16\alpha & 4\alpha & 0 \\ 4\alpha & 4\alpha+12 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$-C^T K^{-1} f = \frac{d_1}{6\alpha E_s}\cdot\begin{Bmatrix} 4\alpha \\ \alpha+3 \\ 3 \end{Bmatrix}\cdot q$$

LGS:

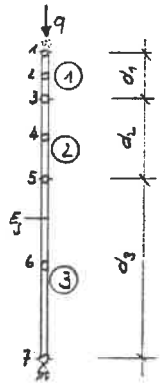
$$\begin{bmatrix} 8\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha+6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_5 \end{Bmatrix} = 3\cdot\begin{Bmatrix} 4\alpha \\ \alpha+3 \\ 3 \end{Bmatrix}\cdot q$$

$$\rightsquigarrow p_3 = \frac{3}{\alpha+3}\cdot q \quad ; \quad \varepsilon_{p3} = -\frac{\alpha}{\alpha+3}$$

$$p_2 = \frac{6\alpha+15}{4\alpha+12} \quad ; \quad \varepsilon_{p2} = \frac{2\alpha+3}{4\alpha+12}$$

$$p_5 = \frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+3} \qquad \varepsilon_{p5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+3}$$

3. Eindimensionales Problem, drei Elemente, oben entwässert



$d_1/d_2 = \alpha$

$d_2/d_3 = \beta$

Unbekannte Verschiebungen: $u_1, u_2, \dots u_6$

Steifigkeitsmatrix $K = K_{①} + K_{②} + K_{③}$

$$K = \frac{E_s}{3d_1}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 7+7\alpha & -8\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -8\alpha & 16\alpha & -8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -8\alpha & 7\alpha+7\beta & -8\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8\beta & 16\beta \end{bmatrix}$$ (reduziert, da $u_7 = 0$)

Inversion:

$$K^{-1} = \frac{d_1}{\alpha\beta E_s} \cdot \begin{bmatrix} \alpha\beta+\alpha+\beta & \frac{\alpha\beta}{2}+\alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha+\frac{\beta}{2} & \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha\beta}{2}+\alpha+\beta & \frac{7}{16}\alpha\beta+\alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha+\frac{\beta}{2} & \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha+\frac{\beta}{2} & \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \alpha+\frac{\beta}{2} & \alpha+\frac{\beta}{2} & \alpha+\frac{\beta}{2} & \alpha+\frac{7}{16}\beta & \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{7}{16}\alpha \end{bmatrix}$$

Koppelmatrix und Lösung für

a. ①, ② und ③ = 32-Elemente:

unbekannte Porenwasserüberdrücke p_3, p_5, p_7

Koppelmatrix $C = C_{①} + C_{②} + C_{③}$

$$C = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$ (reduziert, da $p_1 = 0$ und $u_7 = 0$)

$$C^T K^{-1} = \frac{d_1}{6 E_s \alpha\beta} \begin{bmatrix} 3\alpha\beta + 3\beta & \frac{9}{4}\alpha\beta + 3\beta & 3\beta & \frac{3}{4}\beta & 0 & 0 \\ 3\alpha + 3\beta & 3\alpha + 3\beta & 3\alpha + 3\beta & 3\alpha + \frac{9}{4}\beta & 3\alpha & \frac{3}{4}\alpha \\ 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha & \frac{9}{4}\alpha \end{bmatrix}$$

$$C^T K^{-1} C = \frac{d_1}{6 E_s \alpha\beta} \cdot \begin{bmatrix} 2(\alpha+1)\beta & \beta & 0 \\ \beta & 2(\alpha+\beta) & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$-C^T K^{-1} f = \frac{d_1}{2 E_s \alpha\beta} \cdot \begin{Bmatrix} (\alpha+1)\beta \\ \alpha+\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot q$$

LGS:

$$\begin{bmatrix} 2(\alpha+1)\beta & \beta & 0 \\ \beta & 2(\alpha+\beta) & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_7 \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} (\alpha+1)\beta \\ \alpha+\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot q$$

$$p_3 = \frac{9\alpha^2 + 6\alpha + 12\alpha\beta + 6\beta}{6\alpha^2 + 6\alpha + 8\alpha\beta + 6\beta} \cdot q \quad ,$$

mit $\gamma = d_3 / d_2$:

$$p_3 = \frac{9\alpha\gamma + 12\alpha + 6\gamma + 6}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 6\gamma + 6} \cdot q \quad ; \quad \varepsilon_{p3} = \alpha \cdot \frac{3\gamma + 4}{6\alpha\gamma + 8\alpha + 6\gamma + 6}$$

Durch lineare Interpolation:

$$p_2 = \frac{9\alpha\gamma + 12\alpha + 6\gamma + 6}{12\alpha\gamma + 16\alpha + 12\gamma + 12} \cdot q \quad ; \quad \varepsilon_{p2} = -\frac{3\alpha\gamma + 4\alpha + 6\gamma + 6}{12\alpha\gamma + 16\alpha + 12\gamma + 12}$$

b. (1) = 33-Element, (2) und (3) = 32-Elemente

unbekannte Porenwasserüberdrücke : p_2, p_3, p_5, p_7

$$C = C_{(1)} + C_{(2)} + C_{(3)}$$

Koppelmatrix

$$C = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(reduziert, da $p_1 = 0$ und $u_7 = 0$)

$$C^T K^{-1} = \frac{d_1}{6E_J\,\alpha\beta}\begin{bmatrix} 4\alpha\beta & 2\alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta+3\beta & \frac{5}{4}\alpha\beta+3\beta & 3\beta & \frac{3}{4}\beta & 0 & 0 \\ 3\alpha+3\beta & 3\alpha+3\beta & 3\alpha+3\beta & 3\alpha+\frac{9}{4}\beta & 3\alpha & \frac{3}{4}\alpha \\ 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha & \frac{9}{4}\alpha \end{bmatrix}$$

$$C^T K^{-1} C = \frac{d_1}{36E_J\,\alpha\beta}\begin{bmatrix} 16\alpha\beta & 4\alpha\beta & 0 & 0 \\ 4\alpha\beta & 4\alpha\beta+12\beta & 6\beta & 0 \\ 0 & 6\beta & 12\alpha+12\beta & 6\alpha \\ 0 & 0 & 6\alpha & 12\alpha \end{bmatrix}$$

$$-C^T K^{-1} f = \frac{d_1}{6E_J\,\alpha\beta}\cdot\begin{Bmatrix} 4\alpha\beta \\ \alpha\beta+3\beta \\ 3\alpha+3\beta \\ 3\alpha \end{Bmatrix}\cdot q$$

LGS

$$\begin{bmatrix} 8\alpha\beta & 2\alpha\beta & 0 & 0 \\ 2\alpha\beta & 2\alpha\beta+6\beta & 3\beta & 0 \\ 0 & 3\beta & 6\alpha+6\beta & 3\alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha & 6\alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_5 \\ p_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\alpha\beta \\ 3\alpha\beta+9\beta \\ 9\alpha+9\beta \\ 9\alpha \end{Bmatrix}\cdot q$$

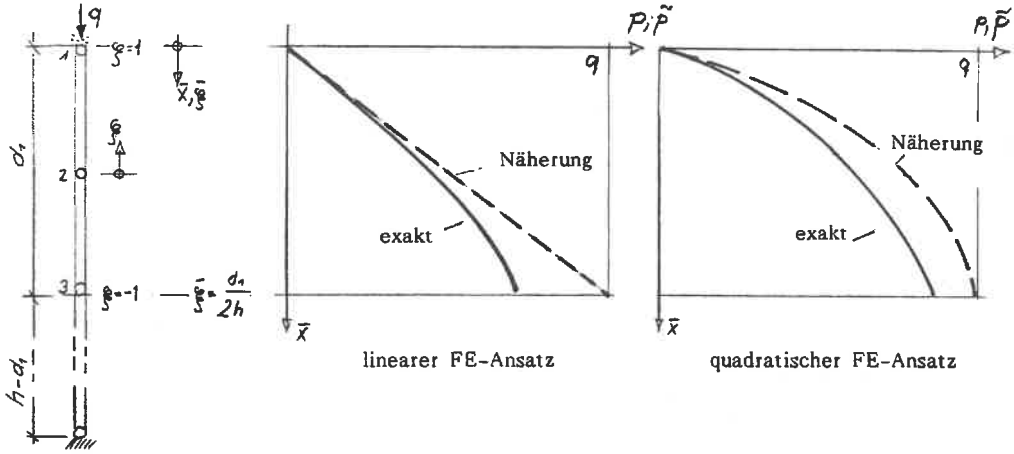
$$p_2 = \frac{9\alpha^2+12\alpha\beta+30\alpha+30\beta}{6\alpha^2+8\alpha\beta+24\alpha+24\beta}\cdot q \;;\quad p_3 = \frac{12\alpha+12\beta}{3\alpha^2+4\alpha\beta+12\alpha+12\beta},$$

mit $\gamma = d_3/d_2$:

$$p_2 = \frac{9\alpha\gamma+12\alpha+30\gamma+30}{6\alpha\gamma+8\alpha+24\gamma+24}\cdot q \;;\quad \varepsilon_{p2} = \frac{3\alpha\gamma+4\alpha+6\gamma+6}{6\alpha\gamma+8\alpha+24\gamma+24}$$

$$p_3 = \frac{12\gamma+12}{3\alpha\gamma+4\alpha+12\gamma+12}\cdot q \;;\quad \varepsilon_{p3} = -\alpha\,\frac{3\gamma+4}{6\alpha\gamma+8\alpha+24\gamma+24}$$

4.3 Zeitschrittschranken $\Delta t_{1\,min}$ für lineare und für quadratische Porenwasserüberdruck-Interpolation



Die Steigung der exakten Lösung $\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}$ soll an der Stelle $\bar{x} = 0$ kleiner sein als diejenige, welche durch den FE-Ansatz

$$\tilde{p} = \boldsymbol{N}_p \boldsymbol{p}_e$$

ohne "Überschießen" bei $\bar{x} = d_1$ erzeugt werden kann.
Beim quadratischen Ansatz wird weiter gefordert: $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}=d_1)=0$ (Maximum)

Linearer Ansatz:

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}(1+\xi)\cdot p_1 + \frac{1}{2}(1-\xi)\, p_3 \quad \text{(s.a. Anhang 4.2)}$$

mit $p_1 = 0$ und $p_3 = q$

folgt :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = -\frac{q}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} = \frac{q}{d_1}$$

Quadratischer Ansatz:

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}(\xi+1)\xi\, p_1 + (1-\xi^2)\, p_2 + \frac{1}{2}(\xi-1)\xi\, p_3 \qquad \text{(s. Anh. 4.2)}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = (\xi+\tfrac{1}{2})\cdot p_1 - 2\xi\, p_2 + (\xi-\tfrac{1}{2})\cdot p_3$$

Mit $p_1 = 0$ und $p_3 = q$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = -2\xi\, p_2 + (\xi-\tfrac{1}{2})\, q$$

Weiter soll sein $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}(\xi=-1) = 0$ $\quad\left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \xi^2} < 0 \text{ erfüllt} \right)$

$$0 = 2p_2 - \tfrac{3}{2}q \rightsquigarrow p_2 = \tfrac{3}{4}\cdot q$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}(\xi=1) = -2\cdot 1\cdot \tfrac{3}{4}q + (1-\tfrac{1}{2})\cdot q = -q$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} = \frac{2q}{d_1}$$

Exakte Lösung nach TÖLKE (1962):

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{\xi}} = 2\cdot q\cdot D_{2,0}(\bar{\xi}, \varkappa) \qquad \text{mit } \bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{2h} \text{ und } \varkappa = \frac{4\pi c_v}{(2h)^2}\cdot t$$

Für kleine $\varkappa$ (normierte Zeit) ist die Verwendung folgender Entwicklung für $D_{2,0}$ zweckmäßig:

$$D_{2,0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varkappa}}\, e^{-\frac{\pi}{\varkappa}(\bar{\xi}-n)^2}$$

Nimmt man näherungsweise nur das 1. Glied (n = 0), so ergibt sich

$$D_{2,0} \approx \frac{e^{-\frac{\tau}{\varkappa}\bar{\xi}^2}}{\sqrt{\varkappa}} ,$$

für $\bar{\xi} = 0$

$$D_{2,0} \approx \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\xi}} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} = 2 \cdot q \cdot \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{1}{2h} = \frac{q}{h \cdot \sqrt{\varkappa}} = \frac{q}{h \cdot \sqrt{\frac{4\pi c_v t}{4h^2}}} = \frac{q}{\sqrt{\pi c_v t}}$$

Für lineare Interpolation soll nun gelten :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{d\bar{x}} = \frac{q}{d_1} \geq \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} = \frac{q}{\sqrt{\pi c_v t}}$$

Daraus folgt mit $t = \Delta t_1$:

$$\underline{\underline{\Delta t_1 \geq \frac{d_1^2}{\pi \cdot c_v}}}$$

Für quadratische Interpolation gilt entsprechend:

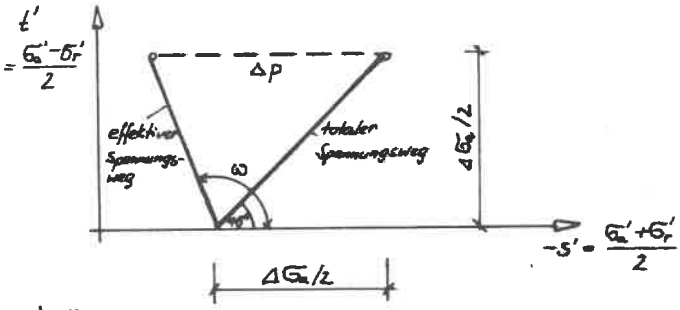
$$\frac{2q}{d_1} \geq \frac{q}{\sqrt{\pi c_v t}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\Delta t_1 \geq \frac{d_1^2}{4\pi c_v}}}$$

Anhang zu 5

5.1 Bestimmung der Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes - allgemeine Ergänzungen zu Abschnitt 5.1.1

a. Bestimmung von M_0 aus CU-Versuch, σ_r = const



Nach Gl. (3.13) gilt:

$$\Delta p = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{K_{uR}}{M_0}\right) \cdot \Delta\sigma_a$$

Aus der Zeichnung:

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_a}{2} + \frac{\Delta\sigma_a}{2} \tan(\omega - 90°)$$

Durch Gleichsetzen:

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{K_{uR}}{M_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan(\omega - 90°)$$

$$2\sqrt{2} \frac{K_{uR}}{M_0} = 1 + 3 \tan(\omega - 90°)$$

$$M_0 = \frac{2\sqrt{2}\, K_{uR}}{1 + 3 \tan(\omega - 90°)}$$

b. Bestimmung von α_G und G_{UR} aus CU-Versuch

Es ist
$$2G = \frac{\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r}{\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r}$$

Wegen Volumenkonstanz gilt:

$$\dot{\varepsilon}_v = -\dot{\varepsilon}_a - 2\dot{\varepsilon}_r = 0$$

Daraus folgt:

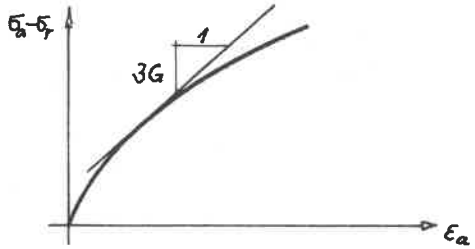
$$\dot{\varepsilon}_r = -\tfrac{1}{2}\dot{\varepsilon}_a$$

Somit ist
$$2G = \frac{\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r}{\dot{\varepsilon}_a + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_a}$$

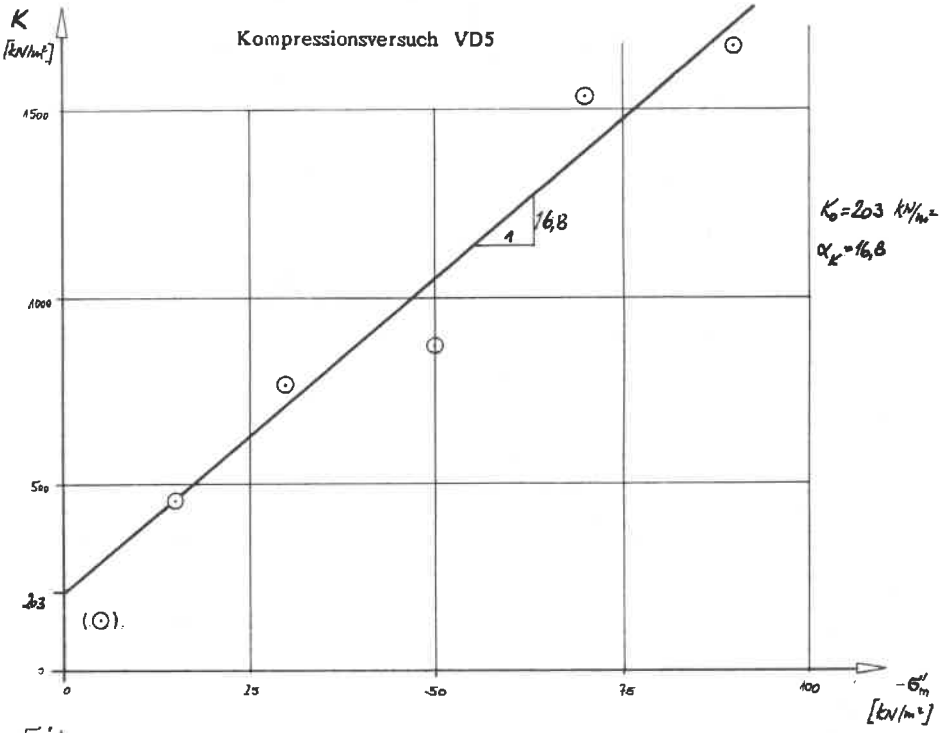
$$\boxed{G = \frac{\dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r}{3\dot{\varepsilon}_a}}$$

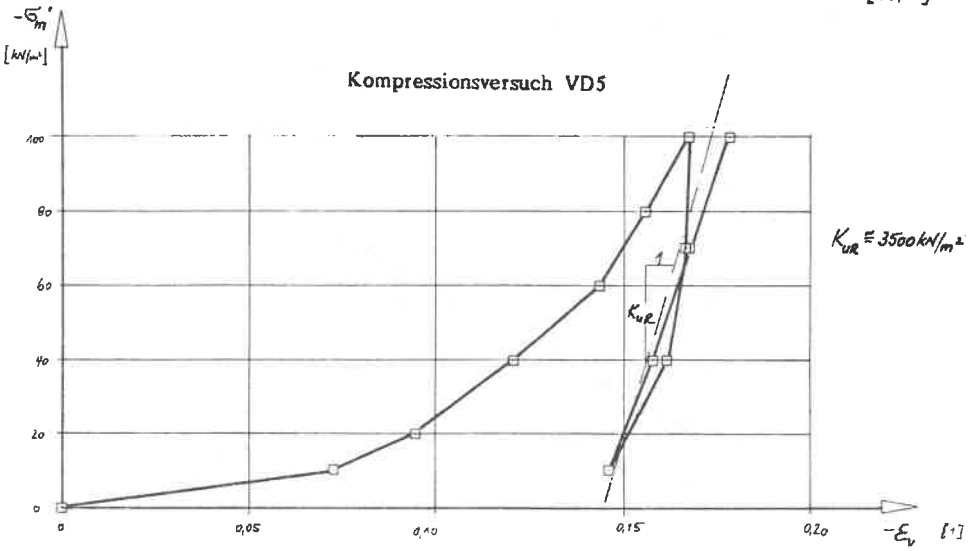
und mit $\dot{\sigma}_r = 0$ (σ_r = const) $\hat{=}$ Standard-Dreiaxialversuch:

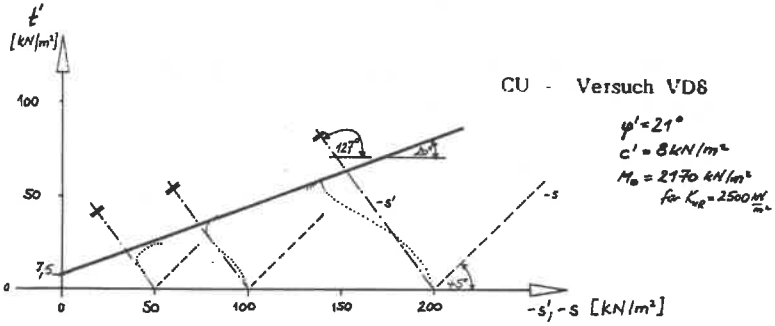
$$\boxed{G = \frac{\dot{\sigma}_a}{3\dot{\varepsilon}_a}}$$

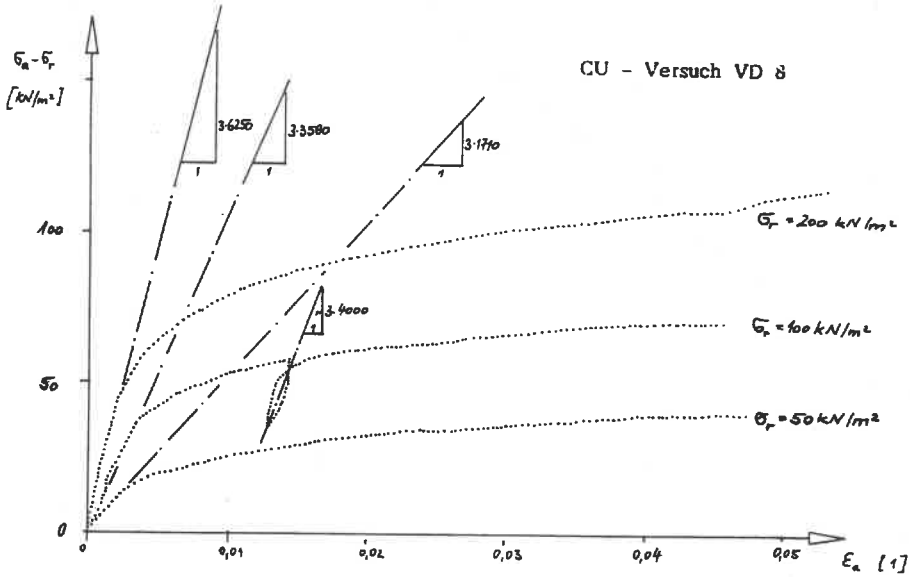


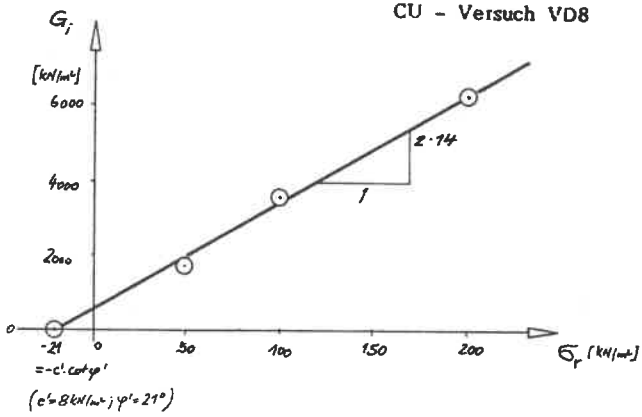
5.2 Bestimmung der Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes für den Konstanzer Seeton – Auswertung von Einzelversuchen






t'
[kN/m²]
100
50
7,5
0
0
50
100
150
200
-s'; -s [kN/m²]
127°
-s'
-s
+s'
CU - Versuch VD8
φ' = 21°
c' = 8 kN/m²
M_o = 2170 kN/m²
for K_ur = 2500 kN/m²


σ_a - σ_r
[kN/m²]
CU - Versuch VD 8
3·6250
3·3580
3·1770
3·4000
1
100
50
0
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
ε_a [1]
σ_r = 200 kN/m²
σ_r = 100 kN/m²
σ_r = 50 kN/m²


G_i
[kN/m²]
CU - Versuch VD8
6000
4000
2000
0
2·14
1
-21
=-c'·cotφ'
(c' = 8 kN/m²; φ' = 21°)
0
50
100
150
200
σ_r [kN/m²]

5.3 Zusammenstellung der Parameter des hypoelastischen Stoffgesetzes für den Konstanzer Seeton

Folgende Parameter wurden durch Auswerten mehrerer Versuchsreihen (VD1 - VD13) als Eingangsgrößen für die numerische Berechnungen festgelegt.

Parameter	Wert	Schwankungs-breite ca. ±	Dimension
K_o	400	200	kN/m^2
α_K	15	3	1
K_{UR}	2500	1000	kN/m^2
φ'	23	2	Grad
c'	7	3	kN/m^2
M_o	2000	500 1)	kN/m^2
α_G	19	5	1
G_{UR}	3700	– 2)	kN/m^2
n	1 3)	–	1

1) bei K_{UR} = 2500 kN/m² = const

2) nur 1 Versuch

3) angenommen

5.4 Einige grafische Darstellungen zum elastoplastischen Stoffgesetz aus der Arbeit von SCHAD (1979)

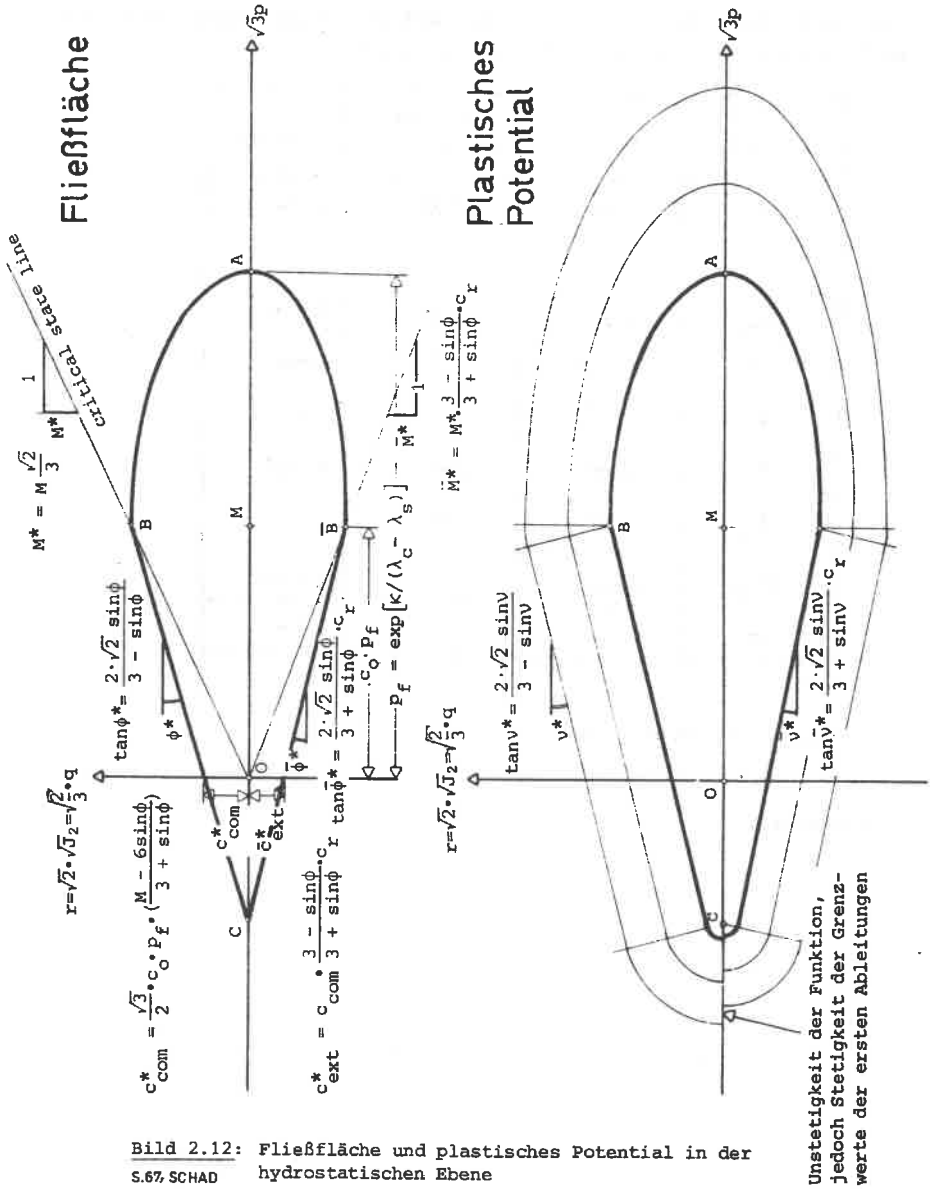


Bild 2.12: Fließfläche und plastisches Potential in der hydrostatischen Ebene
S.67, SCHAD

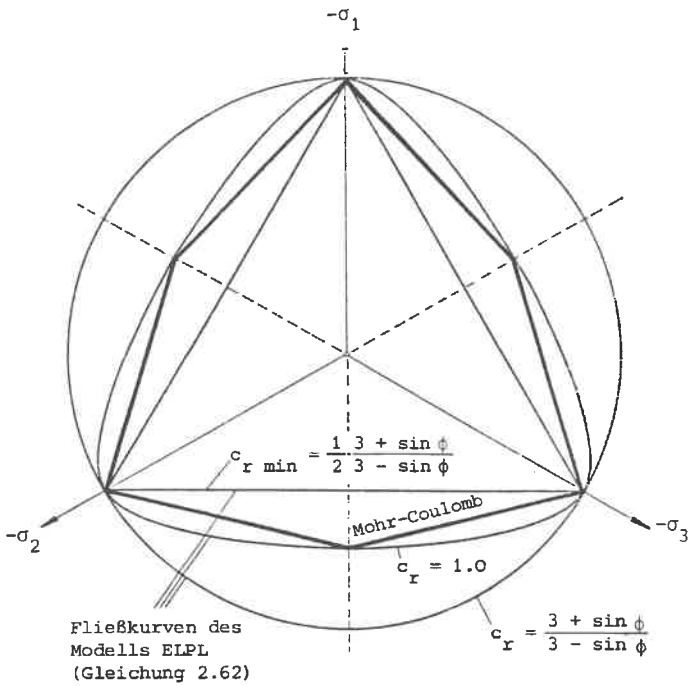


Bild 2.21: Fließkurve des Modells ELPL im Vergleich zu der Fließkurve von Mohr-Coulomb in der Deviatorebene

S.79, SCHAD

5.5 Ergänzende Versuchsergebnisse für den Konstanzer Seeton

Versuche zur Festlegung der Stoffparameter

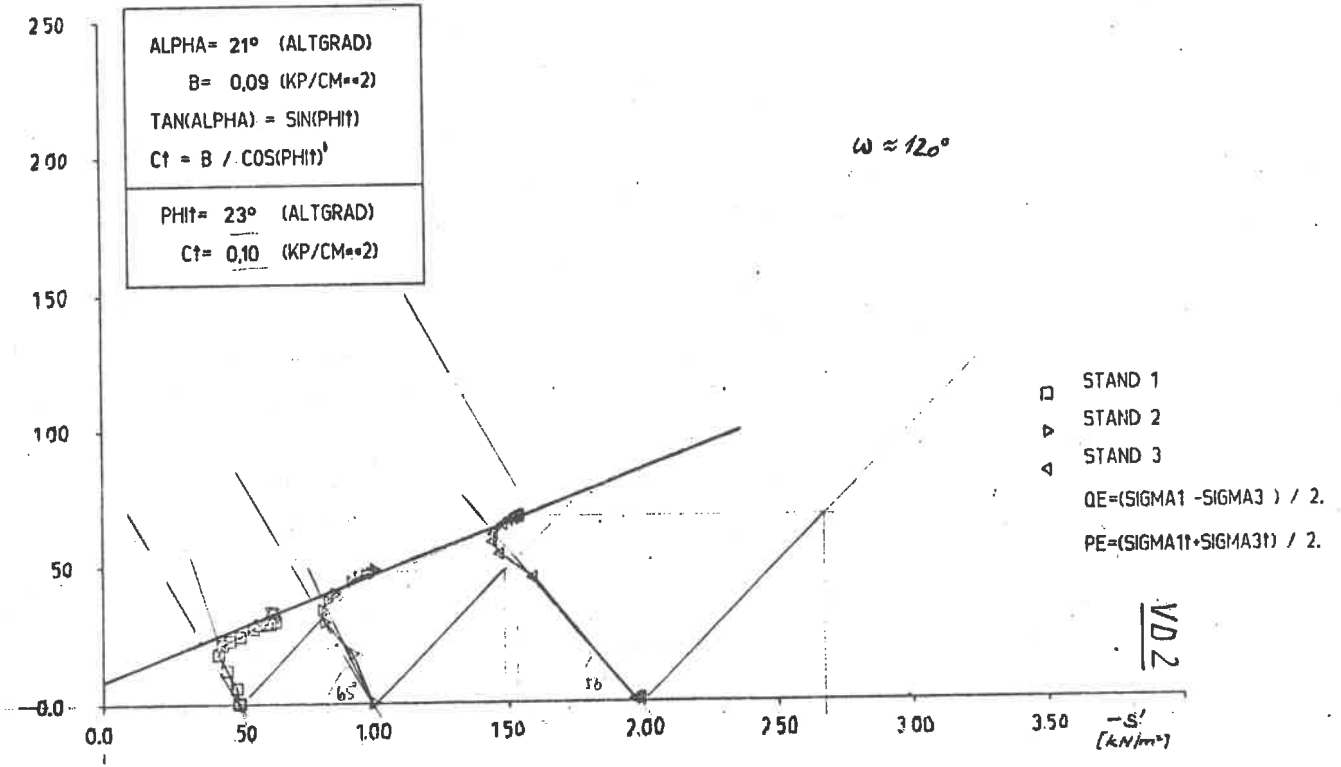
Nr. (neu)	Quelle	Bezeichnung (alt)	Art	Bemerkung
VD1	Ulrich, 1976*	7605	CD	wird in 5.2 nachgerechnet
VD2	"	7606	CU	
VD3	Ulrich , 1978	Kläranl.Konstanz	CU	
VD4	"	"	CU	
VD5	Bu,1979	V4	Kompr.	s. Anh.5.2
VD6	Bu,1979	V2	"	
VD7	Braig,1980 **	Versuch 1	CU	
VD8	"	" 2	CU	s.Anh. 5.2
VD9	"	" 3	Kompr.	
VD10	"	" 4	" + CU	Ent-Wiederbelastung
VD11	"	" 5	CU	"
VD12	Bu,1981	–	CU	
VD13	Kreidler,1982**	–	CU	

* siehe hierzu auch ULRICH (1980)

** Diplomarbeiten am Institut für Grundbau und Bodenmechanik, Universität Stuttgart

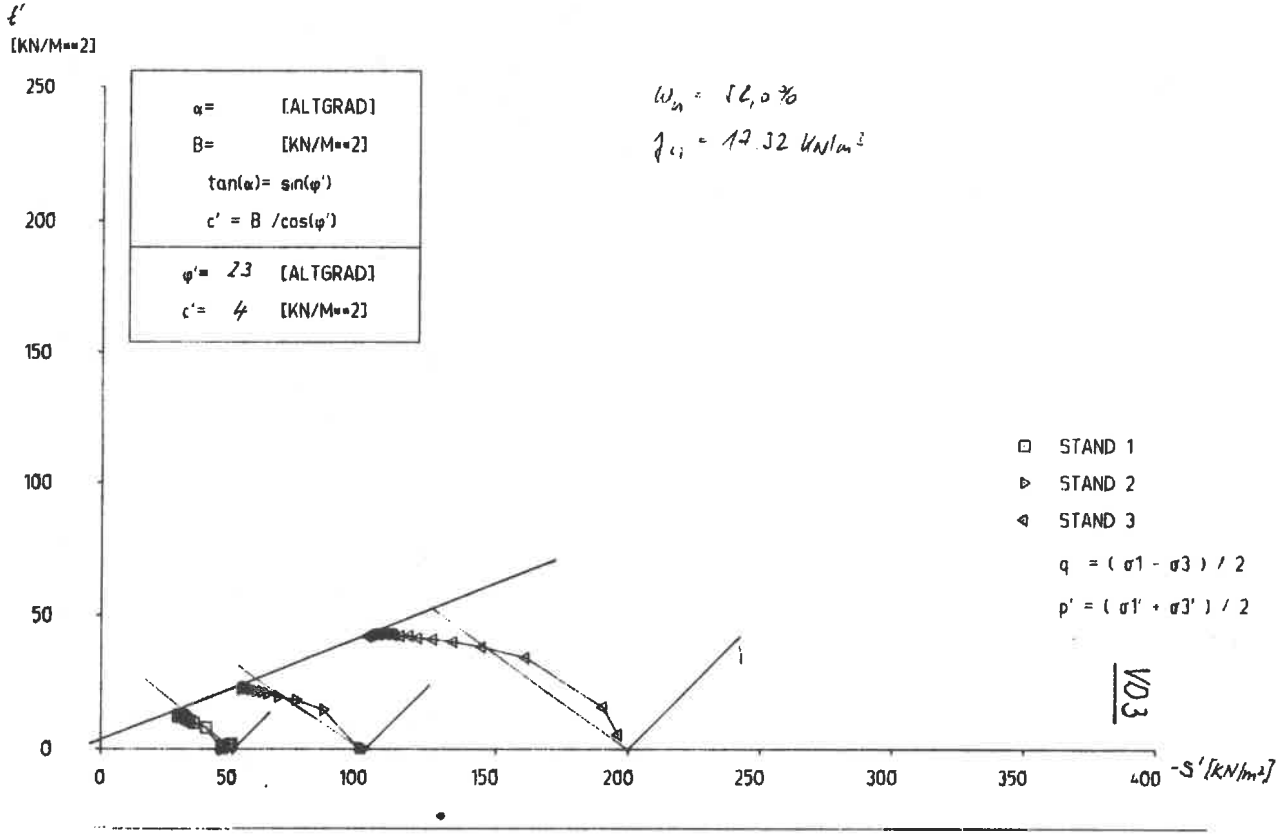
DREIAXIALVERSUCH

DFG - SEETON , 7606 AUSSEN , CU - VERSUCH



DREIAXIALVERSUCH

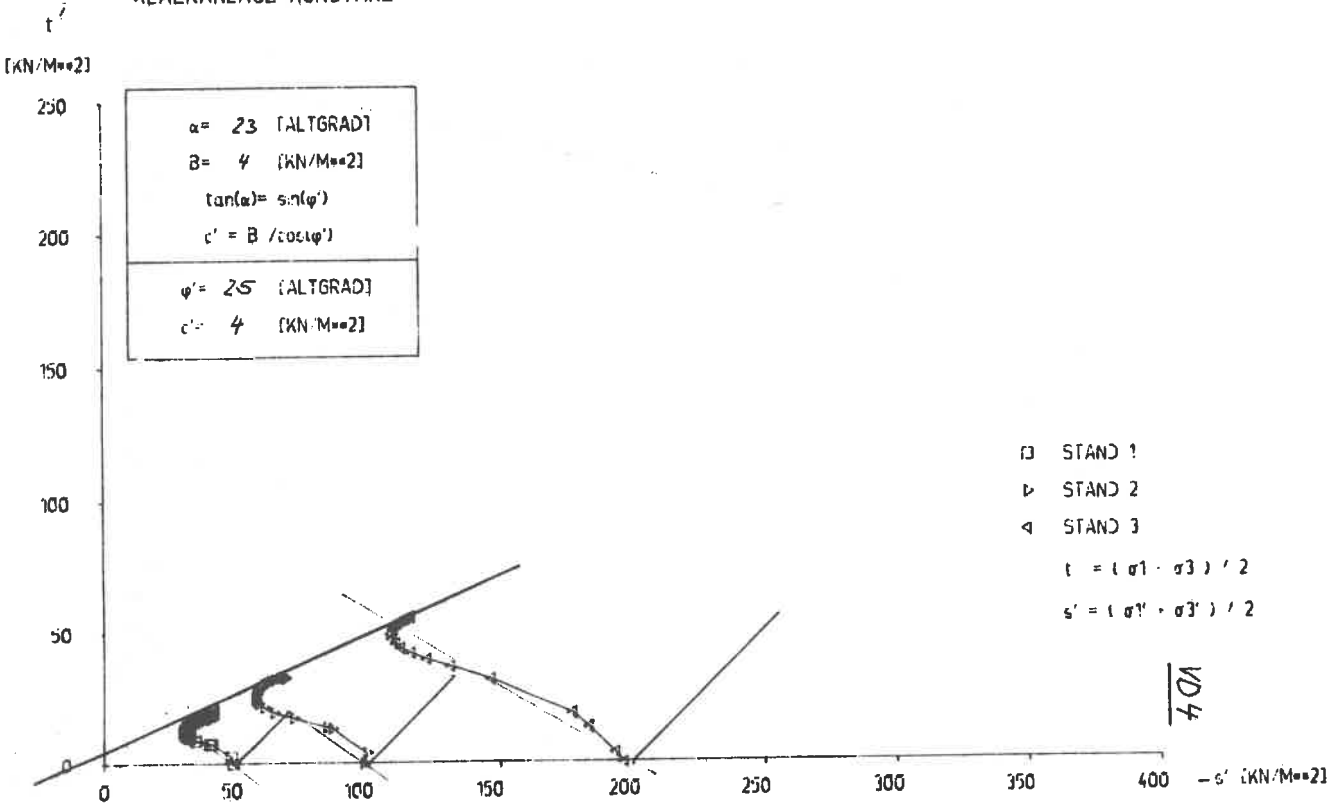
KLAERANLAGE KONSTANZ 4.75-5.0 M CU-VERSUCH M BP 18.8.78



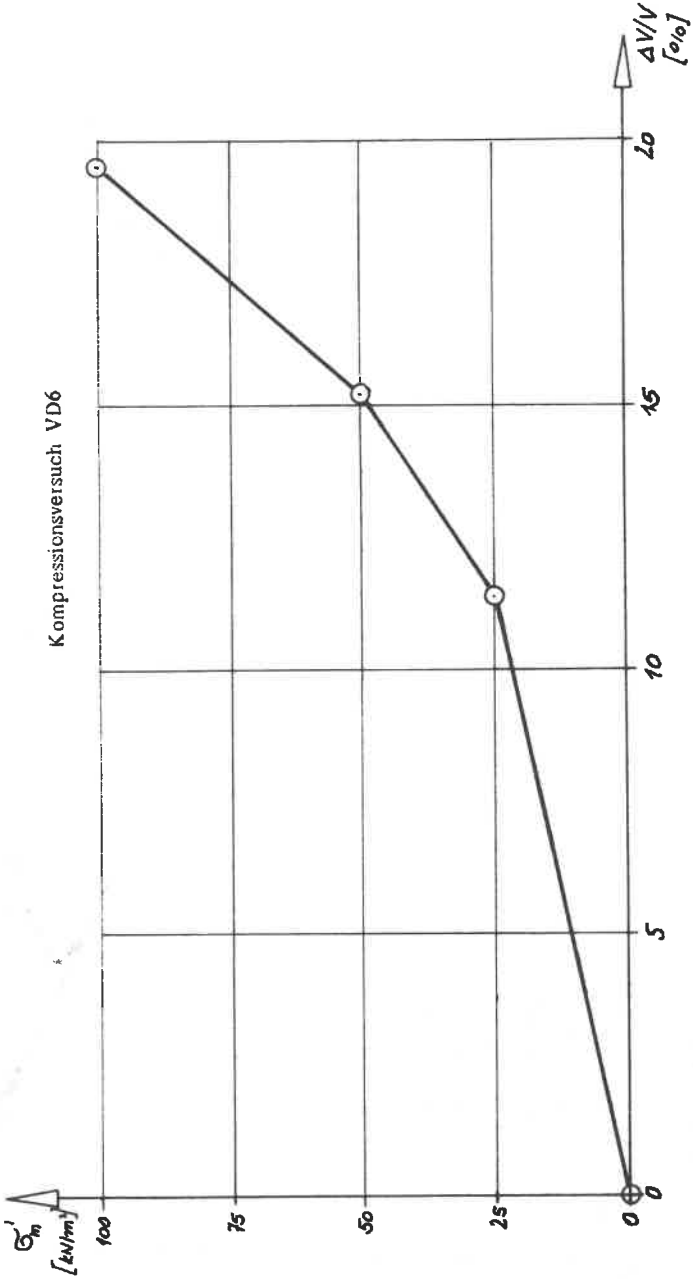
DREIAXIALVERSUCH

KLAERANLAGE KONSTANZ

CU-VERSUCH 23.11.78

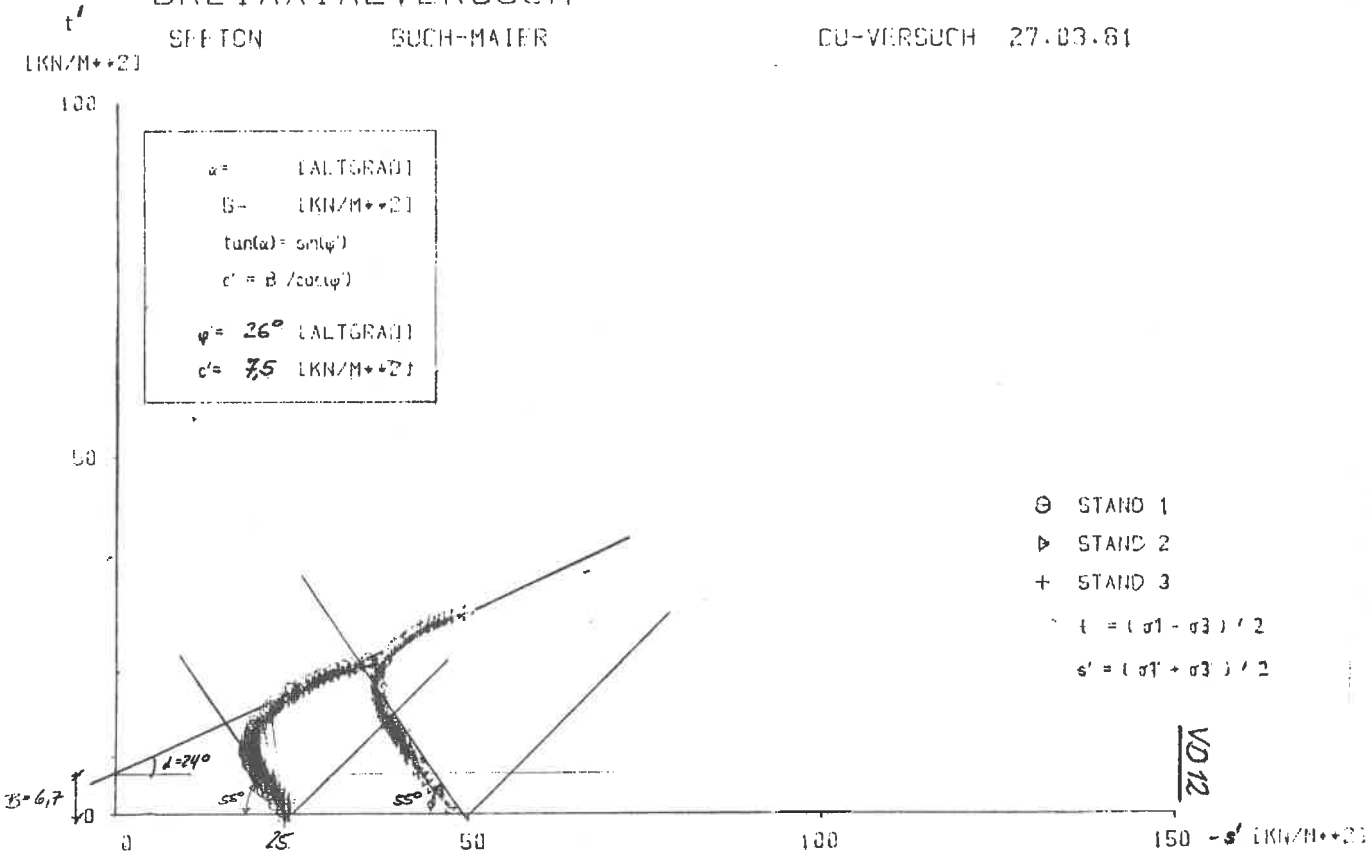


VD 4


Kompressionsversuch VD6
σ'n [kN/m²]
100
75
50
25
0
0
5
10
15
20
ΔV/V [%]

DREIAXIALVERSUCH

SPRTON SUCH-MAIER CU-VERSUCH 27.03.81



MITTEILUNGEN DES BAUGRUNDINSTITUTS STUTTGART

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. U. Smoltczyk

Nr. 1	Thamm,B.	(1974)	Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wassergesättigten Tones Preis: DM 10,--
Nr. 2	Gußmann,P.	(1975)	Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch Preis: DM 5,--
Nr. 3	Feeser,V.	(1975)	Die Bedeutung des Kalziumkarbonats für die bodenphysikalischen Eigenschaften von Löß Preis: DM 10,--
Nr. 4	Du Thinh,K.	(1976)	Standsicherheit von Böschungen: Programm-Dokumentation Preis einschließlich Quellenprogramm: DM 200,--
Nr. 5	Smoltczyk,U./ Pertschi,O./ Hilmer,K.	(1976)	Messungen an Schleusen in der UdSSR Schleusennorm der UdSSR (SN 303-65) Preis: DM 18,--
Nr. 6	Hilmer,K.	(1976)	Erddruck auf Schleusenkammerwände Preis: DM 18,--
Nr. 7	Laumans,Q.	(1977)	Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens Preis: DM 18,--
Nr. 8	Lächler,W.	(1977)	Beitrag zum Problem der Teilflächenpressung bei Beton am Beispiel der Pfahlkopfanschlüsse Preis: DM 15,--
Nr. 9	Spotka,H.	(1977)	Einfluß der Bodenverdichtung mittels Oberflächen-Rüttelgeräten auf den Erddruck einer Stützwand bei Sand Preis: DM 15,--
Nr. 10	Schad,H.	(1979)	Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben Preis: DM 20,--
Nr. 11	Ulrich,G.	(1980)	Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden
	Gußmann,P.	(1980)	Zum Modellgesetz der Konsolidation Preis: DM 20,--
Nr. 12	Salden,D.	(1980)	Der Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten Preis: DM 25,--
Nr. 13	Seeger,H.	(1980)	Beitrag zur Ermittlung des horizontalen Bettungsmoduls von Böden durch Seitendruckversuche im Bohrloch Preis: DM 25,--

Nr. 14	Schmidt, H.-H.	(1981)	Beitrag zur Ermittlung des Erddrucks auf Stützwände bei nachgiebigem Baugrund Preis: DM 25,--
Nr. 15	Smoltczyk, U. Schweikert, O.	(1981)	Vorstudie über bauliche Alternativen für Durchgangsstraßen in Siedlungen Preis: DM 12,--
Nr. 16	Malcharek, K.	(1981)	Vergleich nationaler Richtlinien für die Berechnung von Fundamenten Preis: DM 15,--
Nr. 17	Gruhle, H.-D.	(1981)	Das Verhalten des Baugrundes unter Einwirkung vertikal gezogener Ankerplatten als räumliches Problem des Erdwiderstandes Preis: DM 30,--
Nr. 18	Kobler, W.	(1982)	Untersuchungen über Böschungs- und Grundbruch bei begrenzten Lastflächen Preis: DM 25,--
Nr. 19	Lutz, W.	(1983)	Tragfähigkeit des geschlitzten Baugrunds neben Linienlasten Preis: DM 25,--
Nr. 20	Smoltczyk, U.	(1983)	Studienunterlagen "Bodenmechanik und Grundbau" Preis: DM 35,--
Nr. 21	Schweikert, O.	(1984)	Der Einfluß des Böschungswinkels β auf die Berechnung des aktiven Erddruckes Preis: DM 20,--
Nr. 22	Vogt, N.	(1984)	Erdwiderstandsermittlung bei monotonen und wieholten Wandbewegungen in Sand Preis: DM 25,--
Nr. 23	Buchmaier, R.	(1985)	Zur Berechnung von Konsolidationsproblemen bei nichtlinearem Stoffverhalten Preis: DM 25,--
Nr. 24	Schad, H.	(1985)	Möglichkeiten der Böschungssicherung bei kleinen Baugruben Preis: DM 25,--
Nr. 25	Gußmann, P.	(1985)	Die Methode der Kinematischen Elemente Preis: DM 20,--
Nr. 26	Steinmann, B.	(1985)	Zum Verhalten bindiger Böden bei monotoner einaxialer Beanspruchung Preis: DM 25,--

Weitere Veröffentlichungen des Baugrundinstituts und seiner Mitarbeiter

|1| Smoltczyk,U. (1983) *Studienunterlagen.*
s.a. "Mitteilungen des Baugrundinstituts Stg."

|2| Gußmann,P. (1973) *Ausgleichsvorgänge eindimensionaler Strömungen bei beliebiger Anfangsbedingung unter besonderer Berücksichtigung der Konsolidation einseitig dränierter Tonschichten*
Die Bautechnik 50, 20 - 25 Sonderdruck

|3| Thamm,B.R. (1973) *Die "Cam-Clay"-Theorie und das "Critical-State"-Konzept*
Der Bauingenieur 48, 311 - 314 Sonderdruck

|4| Gußmann,P./ Spotka,H. (1973) *Eindimensionale Konsolidation mehrschichtiger Tonböden*
Die Bautechnik 50, 265 - 272 Sonderdruck

|5| Thamm,B.R. (1973) *Anwendung der Finite-Element-Methode zur Berechnung von Spannungen in wassergesättigten Böden*
Der Bauingenieur 48, 370 - 374 Sonderdruck

|6| Gußmann,P. (1974) *Different methods of evaluating the influence of seepage forces on slope stability*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 61 -73

|7| Gußmann,P./ Schad,H. (1974) *Practical considerations in the application of finite element techniques to soil problems*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 74 - 90

|8| Gußmann,P./ Spotka,H. (1974) *One-demensional consolidation of multi-layered clays*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 91 - 102

|9| Gußmann,P./ Thamm,B. (1974) *Two-dimensional consolidation of triaxial test specimen*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 103 - 117

|10| Schad,H. et al. (1974) *Stresses in concrete caisson bells*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 118 - 121

|11| Smoltczyk,U. (1974) *Improved technique for foundations on slopes*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 122 - 129

|12| Smoltczyk,U./ Diem,P./Spotka,H. (1974) *Pressure cell for the measurement of normal and shear stress*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 130 - 136

|13| Smoltczyk,U./ Ljöterud,L. (1974) *Stabilizing sand grains by overhead water pressure in bell bottoms of caisson piles*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 137 - 141

Die Nrn. 6 bis 13 enthält das o.g. Heft 2, das von der DEUTSCHEN GESELLSCHAFT FÜR ERD- UND GRUNDBAU E.V., Essen, zum Preise von DM 20,-- verkauft wird.

|14| Smoltczyk,U. et al. (1975) *Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente in der Grundbaupraxis*
CAD-Berichte Heft 1 der Gesellschaft für Kernforschung Karlsruhe

|15| Gußmann,P./ Thamm,B.R. (1974) *Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer Versuchsproben*
Der Bauingenieur 49, 293 - 298 Sonderdruck

|16| Gußmann,P. (1974) *Über den Einfluß unterschiedlicher Wasserdruckansätze auf die Standsicherheit von durchströmten Böschungen*
Der Bauingenieur 49, 298 - 301 Sonderdruck

|17| Smoltczyk,U./ Gußmann,P./Schulz,H. (1974) *DIN 4084 Beiblatt, Erläuterungen und Berechnungsbeispiele*
20 S., Beuth-Verlag Berlin/Köln DM 18,--

|18| Laumans,Q. (1975) *Die Anwendung der Methode finiter Elemente auf Flächengründungen*
Technische Akademie Wuppertal, Heft 14

|19| Smoltczyk,U. (1975) *Graving Dock Foundation on Deep Fill*
Proc. 1 Baltic Conf.Soil Mech.Found.Engg.III, 213 - 222

|20| Smoltczyk,U./ Du Thinh (1975) *Zur Bebaubarkeit von vorbelasteten Verwitterungsböden*
Fortschritt-Berichte VDI-Z., Reihe 4, Nr. 25, 70 S.

|21| Smoltczyk,U. (1975) *Anmerkungen zum Gleitkreisverfahren*
in: Festschrift Lorenz, Techn.Univ.Berlin, 203-218

|22| Smoltczyk,U. (1975) *Wie kann man Baugruben verbilligen?*
Der Architekt 2, 94 - 103

|23| Smoltczyk,U. (1975) *Schwierigkeiten beim Bauen im entfestigten Tonstein*
Veröff. Inst.Felsmech.Bodenmech.Univ.Karlsruhe 63, 21 - 50

|24| Smoltczyk,U. (1976) *Pfahlgründung eines Eisenbahndammes*
Proc. 6. Europ. Conf. SMFE, 1.2, 561 - 566

|25| Smoltczyk,U./ Hilmer,K. (1976) *Erddruck auf Schleusenkammerwände*
Vortr. Baugrundtagung, Nürnberg, 245 - 265

|26| Laumans,Q./ Schad,H. (1976) *Calculation of mat foundations on clayey silts*
Proc. Sec.Int.Conf.Num.Meth. in Geomechanics, Blacksburg, Vol 1

|27| Smoltczyk,U./ Hilmer,K./Franke,E./ Schuppener,B. (1977) *Earth Pressure Variations Due to Temperatur Change*
ICOSFME Tokyo, Vol. 2, 225 - 233

|28| Smoltczyk,U./ Seeger,H. (1977) *Lateral Deformation Testing in Keuper Marl Boreholes*
Int. Symp.The Geotechnics of Structurally Complex Formations, Capri, Vol. 1, 443 - 447

|29| Smoltczyk,U. (1978) *Wagnis Baugrund*
Deutsche Architekten- u. Ingenieurzeitschrift, 8/9, 12 - 16

|30| Hilmer,K./ Vogt,N. (1978) *Der Einfluß der Temperatur auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden*
Geotechnik 1, 75 - 83

|31| Schad,H. (1978) *Die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben*
Vorträge Baugrundtagung Berlin, 141 - 161

|32| Schulz,H./Smoltczyk,U. (1978) *Zur Ermittlung der Scherparameter überkonsolidierter Böden für Erddruckberechnungen*
Vorträge Baugrundtagung Berlin, 275 - 296

|33| Smoltczyk,U. (1978) *DFG-Schwerpunktprogramm Bodenmechanik*
GEOTECHNIK 1, 29 - 42

|34| Gußmann,P. (1978) *Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von äußeren Kräften*
GEOTECHNIK 1, 68 - 74

|35| Hilmer,K./Vogt,N. (1978) *Der Einfluß der Temperaturverformung auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden*
GEOTECHNIK 1, 75 - 84

|36| Schmidt,H.-H. (1978) *Entwicklung einer Eignungsprüfung für Maßnahmen zum mittelfristigen Schutz des Erdplanums unter besonderer Berücksichtigung des von oben eindringenden Wassers*
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.033 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart

|37| Schmidt,H.-H. (1978) *Erprobung von Versiegelungen fein- und gemischtkörniger Böden auf bituminöser Basis unter Verwendung von Handelsprodukten*
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.034 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart

|38| Gußmann,P. (1979) *Die Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus der Differenz der Zeitsetzung unterschiedlich dränierter Laborversuche*
GEOTECHNIK 2, 148 - 154

|39| Smoltczyk,U. (1979) *Bestimmung der Baugrundfestigkeit mit der Seitendrucksonde.* Vortragsband zum Pfahlsymposium München 1977, 77 - 80

|40| Schmidt,H.-H. (1979) *Erddruck auf Widerlager und Stützmauern in Abhängigkeit von Untergrundbewegungen durch Dammschüttungen.* Forschungsbericht FA 5.042 G 77 H B.f.Verkehr

|41| Smoltczyk,U. (1979) *Zur Berechnung von Bodenreaktionskräften*
Berichte Bundesvereingung Prüfingenieure für Baustatik, Arbeitstagung 4, 23 - 51

|42| Smoltczyk,U./Vogt,N./Hilmer,K. (1979) *Lateral Earth Pressure Due to Surcharge*
Proc. 7.ECSMFE Brighton, 2, 131 - 140

|43| Smoltczyk,U. (1979) *Influence of foundation depth on raft analyses* Proc.3.Int.Conf.Numerical Methods in Geomechanics, 4, 1503 - 1512

|44| Smoltczyk,U. (1979) *Dammschüttung in Baggerseen beim Bau der Schnellbahnstrecke Mannheim-Stuttgart* 2.Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, 113 - 119

|45| Smoltczyk,U./Gartung,E. (1979) *Geotechnical Properties of a Soft Keuper Sandstone*. Proc.4.Int.Congr.Rock Mechanics Montreux, 639 - 644

|46| Smoltczyk,U./Schmidt,H.-H. (1979) *Forschungsergebnisse von Erddruckuntersuchungen an Modellwänden* Tagung der Arbeitsgruppe Untergrund der Forschungsgesellschaft f.d.Straßenwesen Koblenz

|47| Smoltczyk,U./Gußmann,P./Schad,H. (1980) Grundbautaschenbuch 3.Auflage Teil 1 mit Beiträgen:
1.1 Internationale Vereinbarungen; Klassifizierung des Fachschrifttums und Symbole
1.2 Baugrundgutachten; 1.7 Numerische Verfahren in der Bodenmechanik; 1.10 Berechnung von Zeitsetzungen. Verlag W.Ernst u.Sohn Berlin München

|48| Smoltczyk,U.(1980) *Untersuchung von Gründungsschäden unter Hinzuziehung von mineralogischen Untersuchungen*. VDI-Seminar "Erkenntnisse aus Schäden im Tiefbau..".

|49| Smoltczyk,U.(1980) *Erfahrungen mit der Stuttgarter Seitendrucksonde*. III.Int.Symp. DDR-Komitee Bodenmech.Grundbau Dresden, S.22-28.

|50| Smoltczyk,U.(1980) *Beitrag zu den Thesen zu Problemen der lastbedingten Baugrundverformungen*. III.Int.Symp.DDR-Komitee Bodenmech.Grundbau Dresden, S.58-61.

|51| Buchmaier,R.F./Smoltczyk,U./Schad,H.(1980) *Einfluß einer Mudde-Linse auf die Verschiebungen einer hinterfüllten Uferwand*. Proc.6.Donaueurop.CSMFE Varna, 1a, S.65-74.

|52| Smoltczyk,U./Malcharek,K.(1981) *Lebendverbau von Steilböschungen*. Tiefbau, Ingenieurbau,Straßenbau 23, S.396-400.

|53| Smoltczyk,U.(1981) *Saving cities and old buildings*. State-of-the-Art Report.10th ICSMFE Stockholm,4,S.441-465.

|54| Gußmann,P./Lutz,W.(1981) *Schlitzstabilität bei anstehendem Grundwasser*. GEOTECHNIK 4,S.70-81.

|55| Kunz,B. (1981) *Methodenbank im Grundbau (MIG)*. Schlußbericht S-SMO/103 des Inst.f.Grundbau- und Bodenmechanik der Univ. Stuttg., CAD-Projekt Kernforschungszentrum Karlsruhe.

|56| Melzer,K.-J./Smoltczyk,U.(1982) *Dynamic penetration testing*. State-of-the-Art Report.Proc.2nd ESOPT Amsterdam,1,S.191-202.

|57| Smoltczyk,U./Malcharek,K.(1982) *Living Sheets on Steep Slopes*. Proc.2nd Int.Conf.Geotextiles,1,S.253-257.

|58| Steinmann,B. (1982) *Consolidation testing of Opalinuston with different types of drainage*. Proc.Int.Symp.Num.Models Geomechanics Zürich,S.280-285. A.A.Balkema Rotterdam.

|59| Smoltczyk,U. (1982) *Use of non-linear constitutive soil models in engineering practice. Some personal experiences.* Int.Symposium Numerical Models Geomechanics, Zürich, S.535-548.

|60| Vogt,N. (1982) *Large scale model tests with partial mobilization of the wall.* IUTAM Conference Deformation Failure Granular Materials, Delft, S.643-652.

|61| Smoltczyk,U. (1982) *Verkantung von Brückenpfeilern infolge Baugrund-Elastizität.* Geotechn.Konferenz, Brn, CSSR.

|62| Smoltczyk,U. (1982) *Unterfangungen und Unterfahrungen.* Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn. 2.3, 3.Aufl.,W.Ernst u. Sohn.

|63| Smoltczyk,U.Netzel,D.(1982 *Flachgründungen.* Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn.2.1, 3. Aufl., W.Ernst u.Sohn.

|64| Smoltczyk,U./Hilmer,K. (1982) *Baugrundverbesserung.* Grundbautaschenbuch Teil 2,Abschn.2.5, 3.Aufl., W. Ernst u.Sohn.

|65| Schenck,W./Smoltczyk,U./Lächler,W. (1982) *Pfahlroste, Berechnung und Konstruktion.* Grundbautaschenbuch 2, 2.12, W.Ernst u.Sohn.

|66| Schenck,W./Smoltczyk,U. (1982) *Gründungen im offenen Wasser.* Grundbautaschenbuch Teil 2, Abschn. 2.17, 3.Aufl., W.Ernst u.Sohn.

|67| Gussmann,P. (1982) *Kinematical Elements for Soils and Rocks.* Proc.of the 4th Int.Conf.on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton/Canada.

|68| Gussmann,P. (1982) *Application of the Kinematical Element Method to Collapse Problems of Earth Structures.* IUTAM Symp. 'Deformation and Failure of Granular Materials', Delft.

|69| Smoltczyk,U. (1983) *Deep Compaction.* General Report: 8th ECSMFE Helsinki, Vol. 3, S. 63-74.

|70| Gussmann,P. (1983) *Stabilität von suspensionsgestützten Schlitzen unter statischen Lasten.* 7. Donaueurop. CSMFE, Kishinjew, III, S. 55-60.

|69| Smoltczyk,U./Malcharek,K. (1982): *Living Sheets on Steep Slopes.* 2nd Int. Conf. on Geotextiles, Las Vegas, I, S.253-257.

|70| Smoltczyk,U. (1983): *Deep Compaction.* General Report: 8th ECSMFE Helsinki, Vol. 3, S.63-74.

|71| Gussmann,P. (1983): *Stabilität von suspensionsgestützten Schlitzen unter statischen Lasten.* 7. Donaueurop. CSMFE, Kishinjew, III, S.55-60.

|72| Smoltczyk,U. (1983): *Axiale Probebelastung - Teil I: Statische Belastung. Empfehlungen für die Durchführung (4. Vorschlag).* GEOTECHNIK 6, S.174-195.

|73| Smoltczyk,U. (1984): *Nachlese zum Erdrutsch in Tuve.* GEOTECHNIK 7,S.54-55.

|74| Smoltczyk,U./Malcharek,K. (1984): *Naturgerechte Sicherung von Steilböschungen.* GEOTECHNIK 7, S.117-129.

|75| Smoltczyk,U. (1984): *Wie sicher müssen Altbauten sein?* GEOTECHNIK 7, S. 174-181.

|76| Smoltczyk,U. (1984): *Zur Berechnung der rückverhängten Erdwand.* GEOTECHNIK 7, S.214.

|77| Smoltczyk,U.(1984): *Neues Verfahren zur Sicherung von Steilböschungen mit Hilfe von Geotextilien.* 23.Int.Chemiefasertagung Dornbirn.

|78| Gussmann,P./Ochmann,H.(1985): *Probabilistic Theory and Kinematical Element Method.* 11th ICSMFE San Francisco.

|79| Smoltczyk,U./Malcharek,K.(1985): *Slope protection by membrane structures.* GEOTEXTILES AND GEOMEMBRANES 2

|80| Smoltczyk,U./Salden,D./Majchrzyk,K,(1985): *Determination of the Shear Strength of Partially Decomposed Mudstone.* 11th ICSMFE San Francisco.

|81| Smoltczyk,U.(1985): *Axial Pile Loading Test - Part 1:Static Loading.* GEOTECHNICAL TESTING JOURNAL 8.