



BAUGRUNDINSTITUT  
STUTT GART

MITTEILUNG 10

HERMANN SCHAD

1979

NICHTLINEARE  
STOFFGLEICHUNGEN  
FÜR BÖDEN  
UND IHRE VERWENDUNG  
BEI DER  
NUMERISCHEN ANALYSE  
VON GRUNDBAUAUFGABEN

Universität Stuttgart 6800/4  
Institut für Geotechnik  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. U. Smolczyk  
Postfach 801140  
D-7000 Stuttgart 80

**Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden  
und ihre Verwendung bei der  
numerischen Analyse von  
Grundbauaufgaben**

von

**Dr.- Ing. H. Schad**

Das Baugrundinstitut ist unter der Bezeichnung  
"INSTITUT FÜR GRUNDBAU UND BODENMECHANIK"  
eine Einrichtung der Universität Stuttgart

ISBN 3-921837-10-3

Gegen Vervielfältigung und Übersetzung bestehen keine  
Einwände, es wird lediglich um Quellenangabe gebeten.  
Herausgegeben 1979 im Eigenverlag des Baugrundinstituts  
Umschlagentwurf: Studio Fink oHG, Altdorf  
Unveränderter Nachdruck 1981

#### VORWORT DES HERAUSGEBERS

Die Berechnung der Verformungen im Baugrund ist praktisch erst durch die Methode der finiten Elemente möglich geworden. Obwohl das Verfahren erst seit etwa 10 Jahren im Grundbau eingesetzt wird, hat es eine so außerordentliche Verbreitung gefunden, daß darüber zuweilen vergessen wird, daß "die FEM" ein ganzer Komplex von Rechentechniken ist und daß dies - kombiniert mit den zahlreichen Formulierungen für das Stoffgesetz eines Bodens, die es auch inzwischen gibt - bei einem gegebenen Randwertproblem zu einem weitverzweigten System von Lösungen führt, die alle plausibel sind, deren "Richtigkeit" aber nur selten exakt prüfbar ist.

In dieser Lage bleibt nichts anderes übrig, als dieselbe Aufgabe auf verschiedenen Wegen zu lösen. Der Autor dieser Arbeit war dank seiner zeitweiligen Teilnahme an einer Arbeitsgruppe des Stuttgarter Instituts für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrt besonders qualifiziert, in einer vergleichenden Untersuchung den Gefahren nachzugehen, die bei unkritischer Anwendung der Methode im Einzelfall leicht zu einer generell skeptischen Haltung auf Seiten der Auftraggeber bzw. zu einer unreflektierten Euphorie seitens der damit hantierenden Ingenieure Anlaß geben können.

Ein Teil der Arbeit wurde im Rahmen des Schwerpunktprogramms "Spannungs-Dehnungsbeziehungen der Böden" der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert, der hierfür sehr zu danken ist. - Eine Kurzfassung seiner Ergebnisse hat der Autor in einer Spezialsitzung der Baugrundtagung 1978 in Berlin vorge-  
tragen.

Ich würde mich freuen, wenn sich mein Gefühl bewahrheitet, daß es Herrn Schäd mit seiner Arbeit gelungen ist, mancherlei Irrtümer bei numerischen Bearbeitungen von Grundbauaufgaben künftig vermeiden zu helfen.

Smolczyk

#### PREFACE BY EDITOR

Calculating displacements brought about in a soil body by foundation loads or gravity forces has virtually become possible by Finite Element Methods (FEM). Although this technique has been applied to foundation problems just for one decade only, it is so extensively used now that FEM is often ignored to be rather a whole complex of numerical procedures rather than just one. If these get combined with various types of constitutive equations, the result may be a large variety of solutions which all are plausible in one aspect or another but can hardly become proved correctly.

Thus, it is necessary to analyse a problem by different FE-approaches. The author was especially qualified to deal with this since he took part for some time in Prof.Argyris' research team SMART of Stuttgart University. He analysed two problems (rigid loading plate and strutted retaining wall) by introducing both pseudo-elastic and elastoplastic constituents of mechanical behaviour and by use of different numerical techniques in order to demonstrate the chance and risk of either approach.

Part of the work was sponsored by the National Research Funds (Deutsche Forschungsgemeinschaft), which we like to acknowledge for this.

We hope that the thesis may help to avoid some of the misunderstandings which generally arise when the merits and limits of numerical solutions of foundation problems are discussed.

Smoltczyk

#### VORBEMERKUNG DES AUTORS

Die vorliegende Arbeit entstand als Dissertation während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent an der Universität Stuttgart. Für die Anregungen zu der Arbeit, für die Unterstützung und für die Übernahme des Hauptberichts gilt mein besonderer Dank Herrn Prof.Dr.-Ing.Smoltczyk.

Den Herren Prof.Dr.techn. H.Bednarczyk und Prof.Dr.-Ing.E.Ramm danke ich für die Übernahme der Mitberichte, ihre Kritik und Anregungen.

Den Kollegen des Instituts für Grundbau und Bodenmechanik und denen der SMART-Gruppe des Instituts für Statik und Dynamik der Luft-und Raumfahrt, insbesondere Herrn Privatdozenten Dr.-Ing.P.Gußmann und Herrn Dipl.-Ing.K.Willam Ph.D. bin ich für die Kritik, die Hinweise und hilfreichen Diskussionen dankbar.

## Inhalt

### SCHRIFTTUM

Seite

8

### BEZEICHNUNGEN

14

### 1. EINLEITUNG

19

#### 1.1 HISTORISCHE ENTWICKLUNG DER STOFFGESETZE DER BODENMECHANIK

22

##### 1.1.1 Die Versuchsgeräte der Bodenmechanik zur Bestimmung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

23

##### 1.1.2 Berechnung von Grenzlaster auf der Grundlage der Plastizitätstheorie

26

##### 1.1.3 Nichtlinear-elastische Stoffgesetze

28

#### 1.2 AUFGABENSTELLUNG UND PROBLEMLÖSUNG

36

### 2. DAS KONZEPT DER ELASTOPLASTIZITÄT FÜR DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

39

#### 2.1 GRUNDLAGEN

39

##### 2.1.1 Grundbegriffe der Plastizitätstheorie

39

##### 2.1.2 Die inkrementellen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

46

##### 2.1.3 Direkte Spannungsumlagerung

51

#### 2.2 DIE ENTWICKLUNG EINES NEUEN ELASTO-PLASTISCHEN STOFFGESETZES (ELPL)

54

##### 2.2.1 Die Terminologie des Cam-Clay-Modells

54

##### 2.2.2 Von der State-Boundary-Surface (SBS) zur Fließfläche im Hauptspannungsraum und zum Ver(Ent)festigungsgesetz

58

##### 2.2.3 Die Bestimmung der Hooke'schen Parameter bei Tonen

60

##### 2.2.4 Das Cam-Clay-Konzept und ein normalkonsolidierter Ton aus dem süddeutschen Raum

61

##### 2.2.5 Die unterkritische Fließkurve des erweiterten Cam-Clay-Modells (ELPL 2)

63

##### 2.2.6 Fließbedingung, Fließregel und Ver(Ent)festigungsgesetz für den überkritischen Bereich

65

##### 2.2.7 Fließfläche und plastisches Potential in der Deviatorebene

69

##### 2.2.7.1 Fließfläche

69

##### 2.2.7.2 Plastisches Potential

77

##### 2.2.8 Zusammenstellung von Fließfläche, plastischem Potential und Ver(Ent)festigungsgesetz

78

	Seite
3. FORMULIERUNG EINES EINFACHEN NICHTLINEAREN (HYPOELASTISCHEN) STOFFGESETZES	82
3.1 BESTIMMUNG DER MATERIALPARAMETER FÜR DAS MODELL NOEL	85
3.1.1 Bestimmung der Materialparameter aus drainierten Triaxialversuchen mit Volumenmessung	85
3.1.2 Bestimmung der Materialparameter aus den Scherparametern $c$ und $\phi$ und einem Oedometerversuch	87
4. BEISPIELE	93
4.1 Numerische Probleme	93
4.1.1 Programmsysteme und Iterationsverfahren	93
4.1.2 Wahl der Elemente	98
4.1.3 Diskretisierung der Beispiele	99
4.1.4 Rechenzeit und Rundungsfehler	99
4.1.5 Auswertung der FE-Berechnung	104
4.2 ERMITTLUNG DER STOFFPARAMETER FÜR DIE BERECHNUNG DER BEISPIELE	105
4.2.1 Stoffparameter für das Modell ELPL 2	105
4.2.2 Stoffgesetz von Duncan/Chang	106
4.2.3 Stoffparameter für das Modell NOEL	111
4.3 1.Beispiel: KREISPLATTE AUF HALBRAUM	113
4.3.1 Idealisierung des Problems	113
4.3.2 Vergleich der Ergebnisse der nichtlinearen Berechnungen mit den Versuchsergebnissen	115
4.4 2.Beispiel: BAUGRUBE	119
4.4.1 Diskretisierung, Wahl der Lastschritte, Anzahl der Iterationen	119
4.4.2 Vergleich der Ergebnisse von FE-Berechnungen mit den Ergebnissen konventioneller Rechenverfahren	124
5. ZUSAMMENFASSUNG	127
ANHANG	130
A 1 DIE DARSTELLUNG IM HAUPTSPANNUNGSRAUM	130
A 1.1 Der Zusammenhang zwischen den Hauptspannungen und den in dieser Arbeit verwendeten Größen $r$ , $p$ , $\theta$	130

	Seite
A 1.2 Die Ableitungen von $p, r$ und $\theta$ nach den Hauptspannungen	131
A 1.3 Die Beziehung zwischen dem Winkel $\theta$ im Hauptspannungsraum und dem Verhältnis $b$ der Hauptschubspannungen	133
A 1.4 Transformation von Spannungen	135
A 2 DIE ABLEITUNG DER ERFORDERLICHEN WERTE FÜR DAS STOFFGESETZ ELPL	136
A 2.1 Fließfläche und plastisches Potential	136
A 2.1.1 In der Deviatorebene	136
A 2.1.2 In der hydrostatischen Ebene	139
A 2.2 Ableitung von Fließfläche, plastischem Potential und Ver(Ent)festigungsgesetz nach den Spannungen bzw. Verzerrungen	141
A 2.3 Die Berechnung des Abstandes der fiktiven Spannungspunkte von der Fließfläche	143
A 3 DIE ABLEITUNG DER ERFORDERLICHEN WERTE FÜR DAS STOFFGESETZ NOEL	145
A 3.1 Darstellung der Coulomb'schen Fließfläche als Funktion der Invarianten des Spannungstensors	145
A 3.2 Die tangentielle Materialmatrix für das Coulomb'sche Kriterium	147

# Schrifttum

[1] Arbeitskreis Numerik im (1977): *2. Bericht des Arbeitskreises*  
Grundbau der DGEG Bauingenieur 52, 33 - 34

[2] Argyris, J.H./Faust, D./ (1973): *Finite Elemente zur Berechnung von Spann-*  
Roy, J.R./Szimmat, J./ beton-Reaktordruckbehältern  
Warnke, E.P./Willam, K.J. DAFStb, Berlin, Heft 234

[3] Argyris, J.H./Faust, D./ (1974): *Recent developments in the finite element*  
Szimmat, J./Warnke, E.P./ analysis of prestressed concrete reactor  
Willam, K.J. vessels  
Nucl. Engg. a. Design, 28, 42 - 75

[4] Argyris, J.H./Willam, K.J. (1974): *Some considerations for the evaluation*  
of finite element models  
Nucl. Engg. a. Design, 28, 76 - 96

[5] Argyris, J.H./Faust, D./ (1975): *Spannbeton-Reaktordruckbehälter - Berech-*  
Szimmat, J./Warnke, E.P./ nungsverfahren, Grenzlast und Langzeit-  
Willam, K.J. analyse  
DAFStb, Berlin, Vortragsband 2/1 - 3

[6] Argyris, J.H./Faust, D./ (1976): *Limit load analysis of thick-walled*  
Willam, K.J. concrete structures - a finite element  
approach to fracture  
Comp. Meth. in Appl. Mech. a. Engg. 8,  
215 - 243

[7] Bishop, A.W. (1957): *Soil properties and their measurement*  
Proc. 4. ICOSFE, London, Vol. 3, 103 - 104

[8] Bishop, A.W. (1961): *Discussion on soil properties and their*  
measurement  
Proc. 5 ICOSFE, Paris, Vol. 3, 92 - 100

[9] Bishop, A.W. (1971): *Shear strength parameters for undisturbed*  
and remoulded soil specimens  
Proc. Roscoe Memorial Symp. Cambridge,  
3 - 58

[10] Broms, B.B./Casbarian, (1965): *Effect of rotation of the principle axes*  
A.O. and of the intermediate principle stress  
on the shear strength  
Proc. 6th ICOSMFE, Montreal, Vol. 1,  
179 - 188

[11] Buchmaier, R.F./Gußmann, (1974): *Die Anwendung der Methode der Finiten*  
P./Laumans, Q./Schad, H./ Elemente in der Grundbaupraxis  
Smoltczyk, U. CAD-Report, CAD-KFK1, Gesellschaft für  
Kernforschung, Karlsruhe

[12] Buck, K.E. (1970): *Zur Berechnung der Verschiebungen und*  
Spannungen in rotationssymmetrischen  
Körpern unter beliebiger Belastung  
Diss. Stuttgart

[13] Chang, T.Y./Ko, H.Y./ (1967): *An integrated approach to the stress ana-*  
Scott, R.F./Westmann, R.A. lysis of granular materials  
Report of NSF, Calif. Inst. of Technology,  
Pasadena

[14] Chowdhury, R.N. (1974): *Pseudo-elastic parameters of saturated*  
anisotropic soil, Austr. Geom. Journ., 23 - 25

[15] Clough, G.W./Duncan, J.M. (1971): *Finite element analysis of retaining wall*  
behaviour  
Journ. Soil Mech. Found. Div. ASCE 97,  
1657 - 1673

[16] Corotis, R.B./Farzin, M.H./ (1974): *Nonlinear stress-strain formulation for*  
Krizek, R.J. soils  
Journ. of Geot. Eng. Div. ASCE 100,  
993 - 1008

[17] Darve, F. (1976): *Contribution à la détermination de la*  
rhéologique encrémentale des sols  
Diss. Grenoble

[18] Doherty, W.P./Wilson, E.L./ (1969): *Stress analysis of axisymmetric solids*  
Taylor, R.L. utilizing higher order quadrilateral  
elements  
SESM Report 69 - 3, Dep. of Civil Engg.  
University of California

[19] Domaschuk, L./Wade, N.H. (1969): *A study of bulk and shear moduli of a sand*  
Journ. Soil Mech. Found. Div. ASCE 95,  
561 - 81, 581

[20] Drnevich, V.P. (1975): *Constrained and shear moduli for finite*  
elements  
Journ. Geot. Engg. Div. ASCE 101,  
459 - 473

[21] Drucker, D.C./Prager, W. (1952): *Soil mechanics and plastic analysis for*  
limit design  
Quarterly Appl. Mech. 10, 157 - 226

[22] Drucker, D.C. (1959): *A definition of stable inelastic material*  
Journ. of Appl. Mech. 26, 101 - 226

[23] Drucker, D.C. (1964): *Concept of path independence and material*  
stability for soils  
Proc. Int. Symp. Rheology on Soil Mech.,  
Grenoble, 24 - 46

[24] Duncan, J.M./Chang, C.Y. (1970): *Nonlinear analysis of stress and strain*  
in soil  
Journ. Soil Mech. Found. Div. 96,  
1629 - 1651

[25] Fleck, H. (1975): *Einfluß der elastischen Stoffkonstanten*  
auf die erforderliche Feinmaschigkeit der  
Finitisierung bei Anwendung der Methode  
der Finiten Elemente auf ein homogenes  
und inhomogenes Kontinuum  
Proc. Int. Symp. Num. Meth. in Rock- and  
Soil Mech., Karlsruhe, 305 - 324

[26] Frydman, S. (1976): *The strain hardening parameter of parti-*  
culate media  
Canadian Geot. Journ. 13, 311 - 323

[27] Fung, Y.C. (1965): *Foundation of solid mechanics*  
Prentice Hall

[28] Goldschneider, M. (1972): *Spannungen in Sand bei räumlicher, mono-*  
toner Verformung  
Diss. Karlsruhe

- [29] Goldscheider, M. (1976): *Grenzbedingung und Fließregel von Sand*  
Mech. Res. Comm., Vol. 3, 463 - 468
- [30] Gudehus, G. (1973): *Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenen Sand*  
Ingenieurarchiv 42, 151 - 169
- [31] Gudehus, G. (1973): *Ebene und achsensymmetrische Formänderungen in Sand: Grundgleichungen*  
Die Bautechnik 50, 129 - 134
- [32] Gußmann, P./Schad, H. (1974): *Practical considerations in the application of finite element techniques to soil problems*  
Deutsche Beiträge zur Geotechnik 2, 74 - 90
- [33] Hilmer, K. (1976): *Erddruck auf Schleusenammerwände*  
Mitteilungen des Inst. für Grundb. und Bodenm. der Univ. Stuttgart, Heft 6
- [34] Humpheson, C./Naylor, D.J. (1975): *The importance of the form of the failure criterion*  
Proc. Int. Symp. Num. Meth. in Rock- and Soil Mech., Karlsruhe, 17 - 30
- [35] Jelinek, R. (1966): *Eigenschaften des Bodens*  
Grundbautaschenbuch, Band 1, Ernst & Sohn, Berlin-München, 4 - 40
- [36] Kezdi, A. (1973): *Handbuch der Bodenmechanik, Band III, Bodenmechanisches Versuchswesen*  
VEB Verlag für Bauwesen Berlin
- [37] Kirkpatrick, W.M. (1957): *The condition of failure for sands*  
Proc. 4. J. SSMFE, London, Vol. 1, 1972
- [38] Kondner, Z. (1963): *A hyperbolic stress strain formulation for sands*  
2. Pan. Am. ICOSFE Brazil, Vol. 1, 289 - 324
- [39] Kulhawy, F.H./Duncan, J.M. (1972): *Stresses and movements in oroville dam*  
Journ. Soil Mech. Found. Div. ASCE 98, 653 - 665
- ✓ [40] Lade, P.V. (1973): *Diskussionsbeitrag zu Parry, R.H.C./ Amerasinghe, S.F. Components of deformation in clays*  
Proc. on the Role of Plasticity in Soil Mech., Cambridge, 129 - 135
- [41] Lade, P.V. (1974): *Constitutive properties and modeling of cohesionless soil*  
Proc. 11. Annal Meeting of the Society of Engg. Science, Durham, North Carolina
- [42] Lade, P.V./Duncan, J.M. (1975): *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil*  
Journ. Geot. Engg. Div. ASCE 101, 1037 - 1053
- [43] Lade, P.V. (1975): *Torsion shear test on cohesionless soil*  
Proc. 5th Panam. COSMFE, Buenos Aires, Vol. 1, 117 - 127

- [44] Lade, P.V./Musante, H.M. (1977): *Failure conditions in sand and remoulded clay*  
Proc. 9. ICOSMFE, Tokyo, 181 - 186
- [45] Laumans, Q. (1977): *Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens*  
Mitteilungen des Inst. für Grundb. und Bodenm. der Univ. Stuttgart, Heft 7
- [46] Lee, K.L. (1970): *Comparsion of plane strain and triaxial tests on sand*  
Journ. Soil Mech. Found. Div. ASCE 96, 901 - 923
- [47] Leinenkugel, H.J. (1976): *Deformations- und Festigkeitsverhalten bindiger Erdstoffe. Experimentelle Ergebnisse und ihre physikalische Deutung*  
Veröffentl. des Inst. für Boden- und Fels-mech. der Univ. Karlsruhe, Heft 66
- [48] Liu, T.C.Y./Nilson, A.H. (1972): *Biaxial stress-strain relations for concrete*  
Journ. Struct. Div. ASCE 98, 1025 - 1034
- [49] Lomize, G.H./ Kryzhanovsky, A.L. (1967): *On the strength of sand*  
Proc. Geot. Conf. Oslo, Vol. 1, 215
- [50] Lorenz, H./Neumeuer, H./ Gudehus, G. (1965): *Tests concerning compaction and displacements performed on samples of sand in the state of plane deformation*  
Proc. 6. J. SSMFEE, Montreal, Vol. 1, 293
- [51] Malina, H. (1969): *Berechnung von Spannungsumlagerungen in Fels und Boden mit Hilfe der Elementenmethode*  
Veröffentl. des Inst. für Boden- und Fels-mech. der Univ. Karlsruhe, Heft 40
- [52] Meißner, H. (1971): *Nichtlineares Kraft-Verformungsverhalten zylindrischer Körper aus rolligem Erdstoff*  
Veröffentl. des Inst. für Boden- und Fels-mech. der Univ. Karlsruhe, Heft 45
- [53] Meißner, H./Wibel, A.R. (1973): *Numerisches Rechenverfahren für Randwertprobleme in der Bodenmechanik*  
Die Bautechnik 50, 65 - 69
- [54] Meißner, H./Wibel, A.R. (1974): *Parameter eines elastoplastischen Stoffansatzes für körnige Erdstoffe*  
Die Bautechnik 51, 263 - 269
- [55] Naylor, D.J. (1974): *Stresses in nearly incompressible materials by finite elements with application to the calculation of excess pore pressures*  
Int. Journ. Num. Meth. in Engg. 8, 443 - 460
- [56] Naylor, D.J. (1975): *Numerical models for clay core dams*  
Proc. Int. Symp. on Criteria and Assumptions of Num. Analysis of Dams, Swansea
- [57] Nelson, I./Baron, M.L. (1971): *Application of variable moduli models to soil behaviour*  
Int. Journ. Solids Structures 7, 389 - 417

- [58] Nelson, I./Baron, M.L./Sandler, I. (1971): *Mathematical models for geological materials for wave propagation studies*  
In *Shock Waves and the Mechanical properties of Solids*, Syracuse University Press, Syracuse, 289 - 351
- [59] Ohde (1939): *Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund*  
*Bauingenieur* 20, 451
- [60] Pearce, J.A. (1971): *A new true triaxial apparatus*  
Proc. Roscoe Mem. Symp., Cambridge, 330 - 339
- [61] Ramm, E. (1976): *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*  
Bericht Nr. 76 - 2 des Inst. für Baustatik der Univ. Stuttgart
- [62] Rice, J.R. (1973): *The initiation and growth of shear bands*  
Proc. Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mech., Cambridge, 263 - 278
- [63] Roscoe, K.H./Bassett, R.H. (1967): *Principal axes observed during simple shear of sand*  
Proc. of the Geotechn. Conf. Oslo, 231 - 237
- [64] Roscoe, K.H./Burland, J.B. (1968): *On the generalized stress-strain behaviour of "wet" clay*  
In Hayman/Leckie *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, 535 - 609
- [65] Roscoe, K.H./Roorooshasb, H.B. (1963): *A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays*  
*Géotechnique* 13, 12 - 28
- [66] Roy, J.R. (1973): *Über den numerischen Fehler bei der Auflösung von linearen Gleichungssystemen der Statik*  
In *Finite Elemente der Statik*, Hrsg.: Buck/Scharpf/Stein/Wunderlich  
Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 345 - 352
- [67] Scharpf, D.W. (1969): *Die Frage der Konvergenz bei der Berechnung elasto-plastisch deformierbarer Tragwerke und Kontinua*  
Diss. Stuttgart
- [68] Schofield, A./Wroth, P. (1968): *Critical State Soil Mechanics*  
Mac Craw Hill, London
- [69] Schultze, E./Muhs, H. (1967): *Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten*  
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- [70] Smoltczyk, H.-U. (1967): *Stress computation in soil media*  
*Journ. of the Soil Mech. a. Found. Div., ASCE*, 101 - 124
- [71] Smoltczyk, H.-U. (1967): *Shear strength of soil other than clay*  
Diskussionsbeitrag in Session 3  
Proc. Geot. Conf. Oslo, Vol. II, 209 - 210
- [72] Snithban, N. (1976): *Finite element analysis of large deformation in slopes*  
Proc. Int. Conf. Num. Meth. in Geom., Blacksburg, 755 - 756

- [73] Sokolovsky, V.V. (1946): *Theory of plasticity*  
Moscow, Übersetzte deutsche Ausgabe  
Berlin, VEB Verlag, 1955
- [74] Stroh, D. (1974): *Finite element analysis of deep excavations*  
*Deutsche Beiträge zur Geotechnik* 2, 150 - 164
- [75] Stutz, P. (1972): *Comportement elastó-plastique des milieux granulaires*  
*Found. of plasticity, Int. Symp. Warsaw*
- [76] Terzaghi, K./Jelinek, R. (1954): *Theoretische Bodenmechanik*  
Springer Verlag, Berlin
- [77] Thamm, B. (1974): *Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wasser-gesättigten Tones*  
Mitteilungen des Inst. für Grundb. und Bodenm. der Univ. Stuttgart, Heft 1
- [78] Truesdell, C./Noll, W. (1965): *Handbuch der Physik*  
Hrsg.: Flügge. Band III/3: *Die nichtlinearen Feldtheorien der Mechanik*  
Springer Verlag, Berlin
- [79] Vardoulakis, I. (1977): *Scherfugenbildung in Sandkörnern als Verzweigungsproblem*  
Veröffentl. des Inst. für Boden- und Fels-mech. der Univ. Karlsruhe, Heft 70
- [80] Weissenbach, A. (1976): *Empfehlungen des Arbeitskreises "Baugruben" der Deutschen Gesellschaft für Erd- u. Grundbau e.v.*  
*Bautechnik* 53, 289 - 300
- [81] Willam, K.J./Warnke, E.P. (1974): *Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete*  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.Drs.h.c. J.H. Argyris
- [82] Wittke, W./Wallner, M./Rodatz, W. (1972): *Räumliche Berechnung von Hohlräumen, Böschungen und Gründungen in anisotropem, klüftigem Gebirge nach der Methode finiter Elemente*  
Straße, Brücke, Tunnel 24, 200 - 209
- [83] Wroth, C.P. (1971): *Some aspects of the elastic behaviour of overconsolidated clay*  
Proc. Roscoe Memorial Symp., Cambridge, 347 - 361
- [84] Zienkiewicz, O.C./Naylor, D.J. (1971): *The finite element method applied to soils and other porous media*  
A lecture delivered to the NATO Symp. on Continuum Mech., Lisbon
- [85] Zienkiewicz, O.C./Naylor, D.J. (1971): *Discussion on the adaptation of critical state soil mechanics theories for use in finite elements*  
Proc. Roscoe Memorial Symp., 537 - 547
- [86] Zienkiewicz, O.C./Humpheson, C./Lewis, R.W. (1975): *Associated and nonassociated viscoplasticity in soil mechanics*  
*Géotechnique* 25, 671 - 689

# Bezeichnungen

Bezeichnung der formulierten Stoffgesetze

Abkürzung	Kurzbeschreibung
ELPL	Elastoplastisches Stoffgesetz
ELPL 1	ELPL mit Fließfläche ohne Kappe
ELPL 2	ELPL mit durch eine Kappe "abgeschlossener" Fließfläche
NOEL	Nichtlineares Stoffgesetz, formuliert im Rahmen der Hypoelastizität. Schub- und Kompressionsmodul werden in Abhängigkeit vom Spannungszustand variiert (variable moduli model)
NOEL 1	NOEL, bei dem der Schubmodul nach Erreichen des Fließkriteriums 0 wird: Material verhält sich dann wie eine inkompressible Flüssigkeit
NOEL 2	NOEL mit elastoplastischer $\sigma$ - $\epsilon$ Beziehung nach Erreichen des Fließkriteriums (Fließfläche von Mohr-Coulomb mit assoziierter Fließregel)

c	$\text{kN/m}^2$	Kohäsion
c'	$\text{kN/m}^2$	effektive Kohäsion. Festlegung des Coulomb'schen Kriteriums für die Korn-zu-Korn (effektiven) Spannungen
c <sub>r</sub>	1	Stoffparameter für ELPL zur Festlegung der Form von Fließfläche und plastischem Potential in der Deviatorebene
c <sub>o</sub>	1	Stoffparameter für ELPL 2 zur Festlegung der Lage der Kappe
d	$\text{kN/m}^2$	Abstand des fiktiven Spannungspunktes von der Fließfläche im Hauptspannungsraum
e	1	Porenzahl
e <sub>o</sub>	1	Porenzahl nach Vorbelastung, zu Beginn der Belastungsgeschichte

e <sub>1</sub>	1	Porenzahl beim Einheitsdruck p <sub>1</sub>
E	$\text{kN/m}^2$	Elastizitätsmodul
f		Funktion der Fließfläche
g		Funktion des plastischen Potentials
G	$\text{kN/m}^2$	Schubmodul
G <sub>o</sub>	$\text{kN/m}^2$	Parameter des Stoffgesetzes NOEL
I <sub>1</sub> , I <sub>2</sub> , I <sub>3</sub>		Invarianten des Spannungstensors
I' <sub>1</sub> , I' <sub>2</sub> , I' <sub>3</sub>		Invarianten des Verzerrungstensors
J <sub>1</sub> , J <sub>2</sub> , J <sub>3</sub>		Invarianten des Spannungsdeviators
J' <sub>1</sub> , J' <sub>2</sub> , J' <sub>3</sub>		Invarianten des Verzerrungsdeviators
K	$\text{kN/m}^2$	Kompressionsmodul
K <sub>o</sub>	$\text{kN/m}^2$	Parameter des Stoffgesetzes NOEL
$\bar{K}$	1	Parameter des Stoffgesetzes von Duncan/Chang
M	1	Steigung der "critical state line" im p-q Diagramm
n	1	Exponent im Stoffansatz von Duncan/Chang
p	$\text{kN/m}^2$	hydrostatischer Druck $-\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ , da Zugspannungen positiv definiert
p <sub>f</sub>	$\text{kN/m}^2$	Konsolidationsspannung
q	$\text{kN/m}^2$	Hauptspannungsdifferenz ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) im Triaxialversuch
r	$\text{kN/m}^2$	Abstand des Spannungspunktes im Hauptspannungsraum von der Raumdiagonalen
R <sub>f</sub>	1	Parameter des Stoffansatzes von Duncan/Chang
s	1	Scherzahl nach Smoltczyk
S	1	Scherzahl nach Duncan/Chang

$\alpha$	1	Winkel zwischen der Hauptspannungsrichtung und der positiven x-Achse, positiv im Gegenuhrzeigersinn
$\alpha_G$	}	1 Parameter des Stoffgesetzes NOEL
$\alpha_K$		
$\beta_G$		
$\delta_{ij}$	1	Kronecker Symbol
$\theta$	1	Winkel in der Deviatorenebene des Hauptspannungsraums
$\epsilon_{ij}$	1	Komponente des Verzerrungstensors
$\epsilon_i$	1	Hauptkomponente des Verzerrungstensors
$\dot{\epsilon}_i$	1	Hauptkomponente der Verzerrungsgeschwindigkeit
$\dot{\epsilon}_n^p$	1	Geschwindigkeit der plastischen Normaldehnung
$\epsilon_v$	1	volumetrische Dehnung ( $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ )
$\dot{\gamma}^p$	1	Geschwindigkeit der plastischen Schubverzerrung
$\kappa$		Verfestigungsparameter
$\mu$	1	Querkontraktionszahl ( $-1 \leq \mu \leq +0.5$ )
$\lambda_c$	1	Kompressionsbeiwert
$\lambda_s$	1	Schwellbeiwert
$\sigma_{ij}$	$\text{kN/m}^2$	Komponente des Spannungstensors <u>Zugspannungen</u>
$\sigma_i$	$\text{kN/m}^2$	Hauptkomponente des Spannungstensors <u>positiv</u>
$\dot{\sigma}_i$		Änderung von $\sigma_i$ (Ableitung von $\sigma_i$ nach der Zeit)
$\sigma_n$	$\text{kN/m}^2$	Normalspannung
$\tau$	$\text{kN/m}^2$	Schubspannung
$\phi$	1	Reibungswinkel
$\phi'$	1	effektiver Reibungswinkel. Festlegung des Coulomb'schen Kriteriums für die Korn-zu-Korn (effektiven) Spannungen
$\nu$	1	Dilatanzwinkel

Matrizen und Vektoren

{a}	Gradientenvektor der Fließfläche
{b}	Gradientenvektor des plastischen Potentials
[D]	Stoffmatrix
[E]	Stoffmatrix des Hooke'schen Gesetzes
{ $\dot{\epsilon}$ }	Vektor der Verzerrungsgeschwindigkeit
{ $\sigma$ }	Vektor der Spannungskomponenten. Nicht zu verwechseln mit dem Spannungsvektor

Kopfzeiger

e	elastisch
p	plastisch
*	Kenzeichnung bodenmechanischer Kenngrößen im Hauptspannungsraum

Fußzeiger

f	Bruchwert (failure value)
i oder o	Anfangswert (initial value)
1	Einheitswert
1, 2, 3	Indizierung der Hauptkomponenten
com	Wert aus dem triaxialen Kompressionsversuch
ext	Wert aus dem triaxialen Extensionsversuch

Invarianten des Spannungstensors

$$I_1 = \sigma_{kk}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{ij} \sigma_{ji} - I_1^2)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Invarianten des Deviatoranteils

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot (s_{ij} s_{ji})$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}$$

wobei  $s_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot I_1 \delta_{ij}$

Speziell für das Hauptachsensystem (Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & J_1 &= 0 \\
 I_2 &= -(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) & J_2 &= -(s_1 \cdot s_2 + s_2 \cdot s_3 + s_3 \cdot s_1) \\
 & & &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
 I_3 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 & J_3 &= s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \\
 & & &= \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3)
 \end{aligned}$$

Dabei ist das Vorzeichen von  $I_2$  bzw.  $J_2$  nicht bei allen Autoren gleich festgelegt, je nachdem wie die Bestimmungsgleichung für die Hauptspannungen angegeben wird.

Für  $\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$  wird  $I_2 = -(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots)$  und  $J_2 = -(s_1 \cdot s_2 \dots)$

Für  $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$  wird  $I_2 = +(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots)$  und  $J_2 = +(s_1 \cdot s_2 \dots)$

Vereinfachende Schreibweisen			
für	$  \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yz}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zx}} \end{Bmatrix}  $	oder	$  \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \end{Bmatrix}  $
		wird geschrieben	$  \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T}  $
	$  \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \right]  $		$  \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}  $

# 1. Einleitung

Bei der numerischen Analyse von Problemen des Grundbaus und der Bodenmechanik ergeben sich zwei Schwerpunkte. Zum einen ist es das Problem der richtigen Formulierung des Stoffgesetzes, zum andern die Frage nach dem richtigen Rechenverfahren, das es ermöglicht, die einmal gefundenen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen auf reale Probleme anzuwenden. Die Frage nach dem Stoffgesetz ist der Materialgesetzforschung zuzuordnen, deren Ziel es ist, möglichst wenige Parameter so zu bestimmen, daß das Stoffverhalten damit in den jeweils interessierenden Spannungsbereichen und bei den entsprechenden Spannungswegen beschrieben werden kann.

Innerhalb der letzten zehn Jahre wurde die Methode der Finiten Elemente (FEM) zu einem in vielen Ingenieurbereichen anwendbaren Rechenverfahren entwickelt. Deshalb soll in dieser Arbeit untersucht werden, wie ein Stoffgesetz für drainierte Zustände optimal formuliert und in ein FE-Programm der Statik implementiert werden kann und welche Rechenverfahren innerhalb der FEM zur Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität des Bodens geeignet sind. Dabei wird angenommen, daß das Stoffverhalten zeit- und temperaturunabhängig ist und die Verschiebungen und Verzerrungen klein sind. Einfluß und Größe des Porenwasserdrucks bleiben unberücksichtigt. Da das physikalische Verhalten des Bodens mit dem Hooke'schen Gesetz nicht zutreffend beschrieben werden kann, ergeben sich bei der praktischen Berechnung von Aufgaben des Grundbaus zwei Hauptprobleme:

1. Bei der Wahl des Stoffgesetzes muß beachtet werden:

- plastische Formänderungen schon bei geringer Belastung;
- Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Belastungsgeschichte;
- Ver- oder Entfestigung nach dem Erreichen der Fließfläche;
- Anisotropie infolge Entstehungs- und Belastungsgeschichte;
- Aufwand an Zeit und Gerät zur Bestimmung der erforderlichen Stoffparameter.

2. Die Frage nach der Rechenzeit und damit nach der Wirtschaftlichkeit der Berechnung. Die Effektivität hängt von folgenden Faktoren ab:

- Programmsystem und Rechananlage;
- Diskretisierung und Wahl des Elements;
- Iterationsverfahren;
- Rundungsfehler bei der Auflösung des Gleichungssystems (Wortlänge der Maschine).

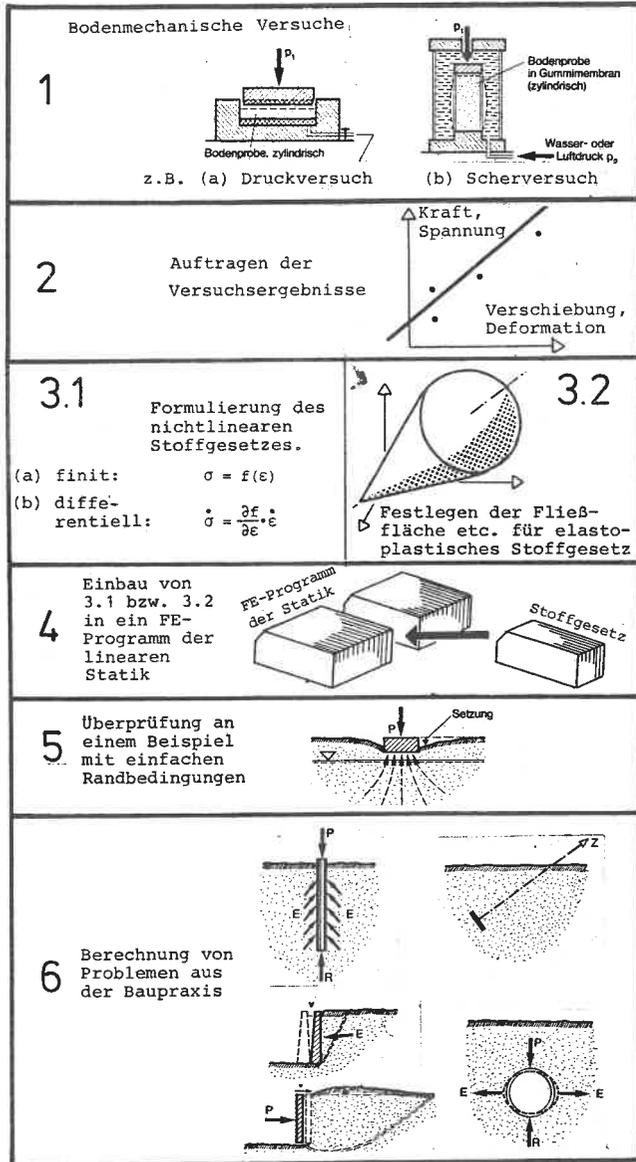


Bild 1.1: Vom Laborversuch zur FE-Berechnung

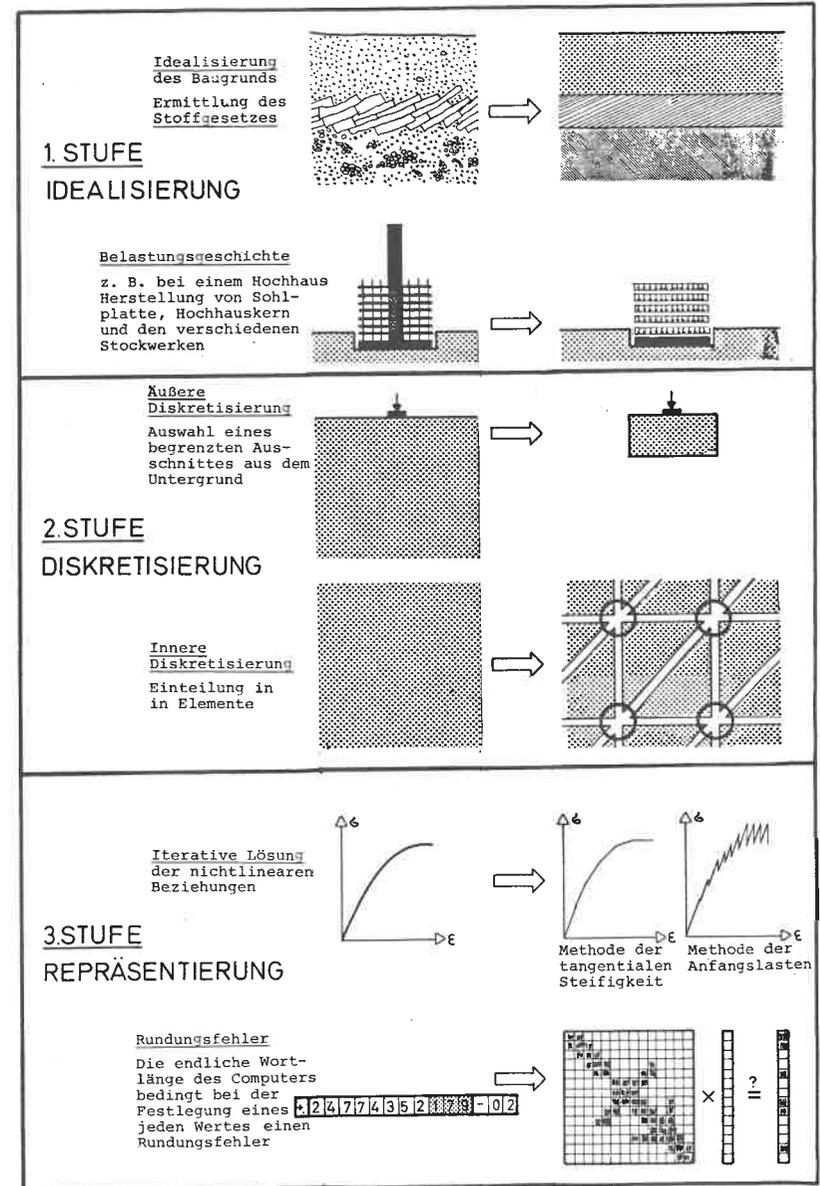


Bild 1.2: Die Stufen der Idealisierung

Der Arbeitsablauf vom Laborversuch bis zur Nachrechnung von Bauwerk und Untergrund ist in Bild 1.1 schematisch dargestellt. Um das Verhalten von Bauwerk und Untergrund auf einem Großrechner simulieren zu können, müssen auf verschiedenen Ebenen grundlegende Annahmen getroffen werden. Eine Zusammenstellung der wesentlichen Annahmen findet sich in Bild 1.2.

1.1 HISTORISCHE ENTWICKLUNG DER STOFFGESETZE DER BODENMECHANIK

Für die Berechnung von Verformungen wird in der Bodenmechanik meist ein einfaches linear-elastisches Materialverhalten angenommen, obwohl jedem Ingenieur bewußt ist, daß diese Annahme im Widerspruch zu seinen Beobachtungen und Erfahrungen steht (s. Bild 1.3). Auf der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens

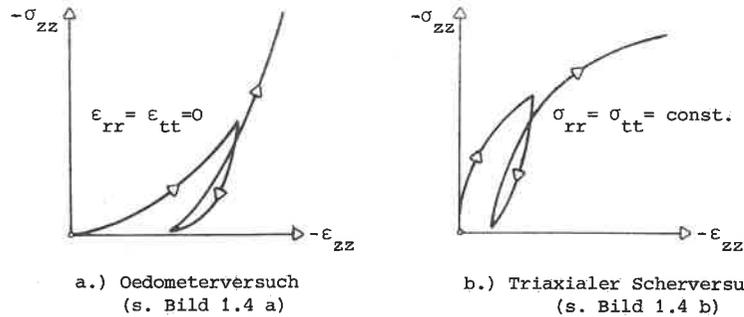


Bild 1.3: Charakteristische Spannungs-Dehnungsdiagramme des Bodens

basieren dann auch die Formeln und Tafeln von Boussinesq, Steinbrenner, Kany etc., die in der Baupraxis für die Berechnung von Setzungen verwendet werden. Dagegen beruhen die Berechnungen des Erddrucks und der Grenztragfähigkeit entweder auf empirischen Werten, auf der Coulomb'schen Erddrucktheorie oder auf Ergebnissen der Plastizitätstheorie. D.h. die Berechnung der Verformung und die Berechnung der Tragfähigkeit haben verschiedene Theorien als Grundlage.

Erst mit der Entwicklung numerischer Methoden, die u. a. für verschiedene Randbedingungen anwendbar sind - vor allem der Methode der finiten Elemente - wird es möglich, mit Hilfe nichtlinear-elastischer bzw. elastoplastischer Stoffgesetze Verformungs- und Traglastberechnungen im Rahmen einer in sich geschlossenen Theorie durchzuführen.

1.1.1 Die Versuchsgeräte der Bodenmechanik zur Bestimmung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Da ein enger Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Stoffgesetze und der Versuchstechnik besteht, sollen kurz einige Versuche für die Ermittlung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen beschrieben werden. Art der Belastung und der daraus resultierende Spannungsweg werden im wesentlichen durch die Randbedingungen der Versuchsgeräte bestimmt.

Die gebräuchlichsten Geräte zur Ermittlung des Verformungsverhaltens sind das Oedometer (Bild 1.4 a) [36, 69] mit dem einachsiale Stauchungsversuche durchgeführt werden können, und das Dreiaxialgerät (Bild 1.4 b) [36, 68]. Im dreiaxialen Scherversuch kann der Probe allerdings kein beliebiger dreiaxialer Spannungszustand eingeprägt werden, wie der Name des Geräts vermuten läßt, sondern es handelt sich eher um einen erweiterten einachsialen Druckversuch. Aus der Form der Probe und der Art der Belastung ergibt sich die Gleichheit von jeweils zwei Hauptspannungen.

Am häufigsten wird der Versuch in der Form durchgeführt, daß von einem hydrostatischen Spannungszustand ausgehend, bei konstantem Zeldruck ( $\sigma_{rr} = \sigma_{tt}$ ), der Stirndruck ( $\sigma_{zz}$ ) bis zum Erreichen der Bruch- oder Fließgrenze gesteigert wird. Diese Versuchsart wird als "triaxialer Kompressionsversuch" bezeichnet. Wenn, bei gleichen Ausgangsbedingungen, der Stirndruck erniedrigt wird, spricht man vom triaxialen Extensionsversuch. (Im Kompressionsversuch ist  $\sigma_1 = \sigma_2$  und im Extensionsversuch  $\sigma_2 = \sigma_3$  unter der Voraussetzung daß  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  ist und Zugspannungen positiv definiert sind.) Aufgrund der Versuchstechnik ist der triaxiale Kompressionsversuch am einfachsten durchzuführen. Er ist daher ein Standardversuch der Bodenmechanik. Für Extensionsversuche sind die Anforderungen an das Versuchsgerät wesentlich höher, und Versuche mit einer kontrollierten Variation des Zeldrucks und der radialen Dehnung sind nur mit Hilfe einer aufwendigen mechanischen und elektronischen Steuerung möglich.

Ein weiterer Standardversuch ist der direkte Scherversuch mit dem Kastenschervergerät (Bild 1.4 d) [36, 69] oder dem Kreisringschergerät (Bild 1.4 e) [69]. Die Verwendung des Kreisringschergeräts ist allerdings sehr selten. Mit Kreisring- und Kastenschervergerät können zwar die Bruch- bzw. Fließgrenze für drainierte Bedingungen zuverlässig bestimmt werden, nicht jedoch das Materialverhalten vor dem Erreichen der Grenzlast.

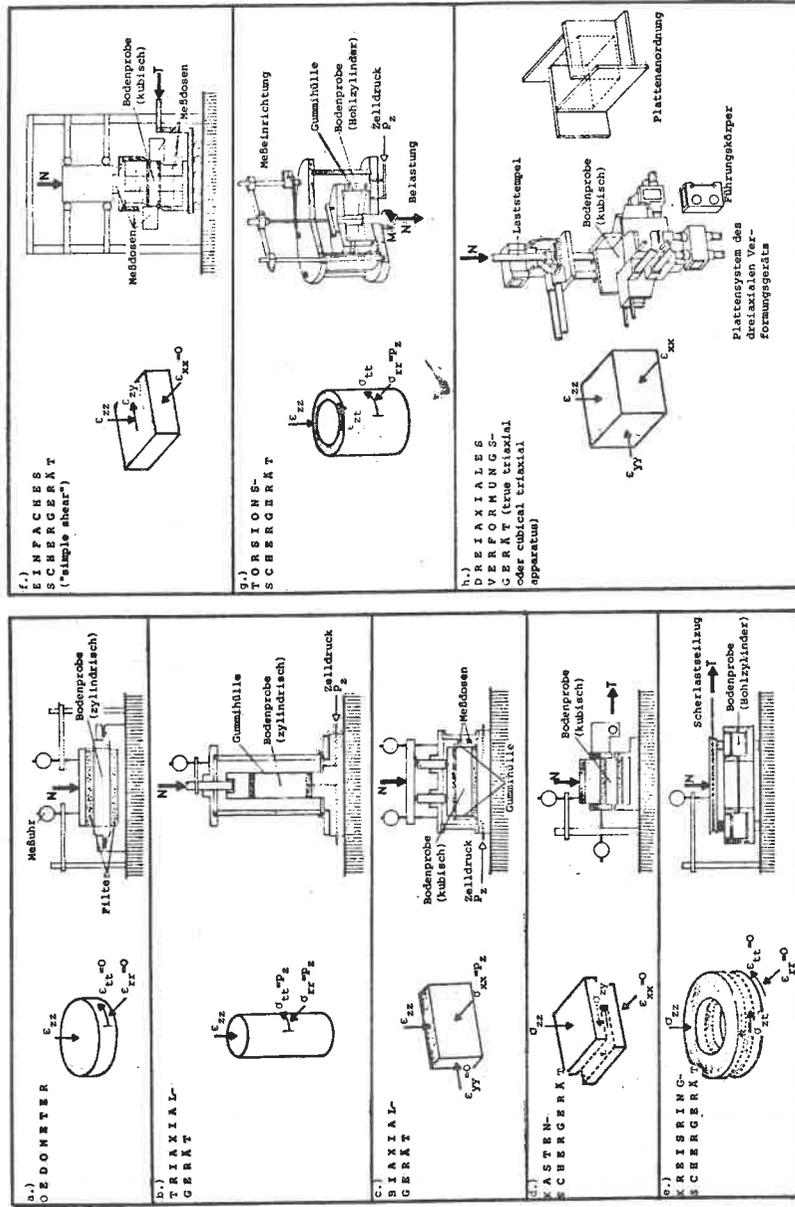


Bild 1.4: Die wichtigsten Geräte zur Bestimmung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen von Böden

Neben Oedometer, Triaxial- und Kastenschgergerät, die in jedem größeren bodenmechanischen Labor vorhanden sind, wurden vor allem für wissenschaftliche Zwecke Geräte entwickelt, die eine genauere Erforschung des Materialverhaltens ermöglichen sollen. Zur Untersuchung des ebenen Verzerrungszustandes wurde das Biaxialgerät (Bild 1.4c) [69] entwickelt. Da es lediglich eine Modifikation des Triaxialgeräts darstellt, hat es auch prinzipiell dieselben Schranken und Nachteile.

Eine Weiterentwicklung von Kasten- bzw. Kreisringschergerät stellen das "simple-shear"-Gerät (Bild 1.4 f) [63] und das Torsions-Schergerät (Bild 1.4 g) [10, 43] dar. Im Gegensatz zu den einfachen Scherversuchen ergibt sich in diesen Versuchen ein Spannungs- und Verzerrungszustand, der eindeutig gemessen wird. Damit kann auch das Materialverhalten vor dem Erreichen des Grenzkriteriums bestimmt werden.

Eine Variation aller drei Normalspannungs- bzw. Normalverzerrungskomponenten ist mit dem sogenannten "true-triaxial"-Gerät (Bild 1.4 h) [28, 60] möglich. In bezug auf die möglichen Spannungs- und Dehnungswege ist dieses Gerät universell einsetzbar. Die Schwierigkeiten liegen beim Einbau der Probe, der Porenwasserdruckmessung und der empfindlichen Mechanik. So wurden bisher mit dem true-triaxial-Gerät hauptsächlich die Eigenschaften von Sand untersucht, die Untersuchungen bindiger Böden stehen noch am Anfang. Allerdings ist mit dem true-triaxial-Gerät keine Drehung der Hauptachsen des Spannungstensors gegenüber denen des Verzerrungstensors möglich. Der Einfluß dieser Verdrehung kann nur mit dem "simple-shear" oder dem Torsionsschergerät untersucht werden.

Da beim gegenwärtigen Stand der Versuchstechnik nur Oedometer-, Triaxial- und Kastenscherversuch in vielen Laboratorien zuverlässig durchgeführt werden können, sollte es möglich sein, die Parameter des Stoffgesetzes aus diesen Standardversuchen zu bestimmen.

1.1.2 Berechnung von Grenzlasten auf der Grundlage der Plastizitätstheorie

Für die Ermittlung des Grenzspannungszustands wird in der Regel das Gesetz von Coulomb (Bild 1.5 a; Scherparameter: c und  $\phi$ )

$$\tau = c - \sigma_n \cdot \tan\phi \quad \text{und} \quad \sigma_n < \frac{c}{\tan\phi}$$

auf die Gesamtheit aller in einem Raumpunkt möglichen Prüfflächen angewendet. Daraus folgt, in den Hauptspannungen ausgedrückt, in der Darstellungsweise von Mohr:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (2 \cdot c \cdot \cos\phi - 2 \cdot \sin\phi \cdot \sigma_1) / (1 - \sin\phi) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\text{und} \quad \sigma_1 < \frac{c}{\tan\phi}$$

Da das Mohr-Coulomb'sche Kriterium den Einfluß der mittleren Hauptspannung nicht erfaßt und die Darstellung im Hauptspannungsraum eine nicht stetige Fließfläche (Bild 1.5 a) ergibt, haben Drucker und Prager [21] (Bild 1.5 b) eine Formulierung in der 1. Invariante des Spannungstensors und der 2. Invariante des Deviators vorgeschlagen und die Möglichkeiten dieses Modells an Beispielen des Grundbaus aufgezeigt. Die mathematischen Formulierungen lauten:

Gesetz von Drucker:  $\alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad \text{für} \quad I_1 < \frac{k}{\alpha}$

Gesetz von Tresca:  $\sigma_1 - \sigma_3 - 2 \cdot k = 0$  unter der Voraussetzung  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Gesetz von Mises:  $\sqrt{J_2} - k = 0$

Hierin sind  $\alpha$  und  $k$  Konstanten, die aus den Scherparametern wie folgt zu berechnen sind:

$$\alpha = \frac{\sin\phi}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2\phi}} \quad k = c \sqrt{1 - 4 \frac{\sin^2\phi}{3 + \sin^2\phi}}$$

Für die Gesetze von Tresca und Mises ist  $k = c$ .

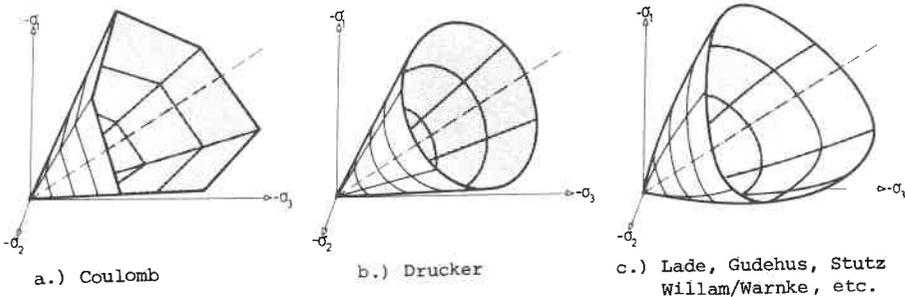


Bild 1.5: Fließflächen der Bodenmechanik

Die Gesetze von Tresca und von v. Mises, die vor allem das Verhalten von Metallen beschreiben, können als Sonderfälle der Coulomb'schen bzw. Drucker'schen Formulierung aufgefaßt werden.

Weiterentwicklungen der Fließfläche werden von Gudehus [30], Frydman [26], Lade [42], Stutz [75] und Willam/Warnke [81] vorgeschlagen. Sie ergeben im Prinzip die Fließfläche von Bild 1.5 c. Die Unterschiede zwischen diesen Formulierungen werden im Abschnitt 2.2.6 beschrieben und diskutiert.

Speziell aus Triaxialversuchen mit wassergesättigten Böden entwickelten vor allem Schofield, Wroth, Burland und Roscoe [62, 64, 65] das sogenannte Critical-State-Concept oder Cam-Clay-Modell, bei dem über die plastische Volumenänderung eine Ver- bzw. Entfestigung quantitativ erfaßt werden kann. Es handelt sich also nicht mehr um ein ideal-plastisches Stoffgesetz wie z. B. bei Coulomb, sondern um ein plastisches Stoffgesetz mit isotroper Ver(ent)festigung, siehe Abschnitt 2.2.

Unter Verwendung plastischer Modelle wurden für eine Reihe spezieller Probleme exakte Lösungen gefunden. Mit Hilfe iterativer Verfahren (z. B. Sokolovski [73]) können unter der Voraussetzung idealer Plastizität und bei Erfüllung der Forderungen des Drucker'schen Postulats (siehe Abschnitt 2.1.1) für eine Vielzahl von Randbedingungen Lösungen ermittelt werden.

Nun ist für die Kennzeichnung eines plastischen Modells ein Fließ- oder Bruchkriterium allein nicht ausreichend. Es müssen noch die Fließ- und Verfestigungsregeln angegeben werden. Da aber die Fließfläche das wesentliche Merkmal ist, soll diese Darstellung als erster Überblick genügen. Eine vollständige Darstellung und theoretische Einordnung erfolgt in Abschnitt 2.

1.1.3 Nichtlinear-elastische Stoffgesetze

Die Beschreibung der physikalischen Nichtlinearität kann nicht nur im Rahmen der Plastizitätstheorie erfolgen, sondern auch im Rahmen der Elastizitätstheorie. Insbesondere im letzten Jahrzehnt wurden zahlreiche nichtlinear-elastische Stoffgesetze für Böden entwickelt. Diese Entwicklung wurde dadurch forciert, daß mit der Methode der finiten Elemente ein numerisches Verfahren existiert, mit dem auch komplizierte Rand- und Anfangswertprobleme mit nichtlinearen Stoffgesetzen analysiert werden können.

Für die Beschreibung elastischer Materialien gibt es drei verschiedene Konzepte:

1.) Die Elastizität: Ein Material wird als "elastisch" definiert, wenn es einen Zustand besitzt, bei dem alle Komponenten von Spannungen und Verzerrungen null sind und in einem entsprechend definierten benachbarten Zustand eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor besteht (|27|, S. 445). Es ergibt sich eine ein-eindeutige Zuordnung in der Form

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$$

Die einfachste Form ist der isotrope Sonderfall einer linearen Spannungs-Verzerrungsbeziehung, das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot G \cdot \epsilon_{ij}$$

2.) Die Hyperelastizität: Ein Material wird als hyperelastisch bezeichnet, wenn immer eine Potentialfunktion U, die Verzerrungsenergie existiert, aus der durch Ableitung nach den Verzerrungen die Spannungen bestimmt werden können. Das Potential ist nur eine Funktion der Verzerrungen. Das hyperelastische Material kann durch folgende Gleichung definiert werden:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (\text{mit dieser Gleichung kann auch nichtlinear-elastisches Verhalten erfaßt werden})$$

Da isotropes Materialverhalten vorausgesetzt wird, kann diese Gleichung nach der Kettenregel in folgender Form entwickelt werden

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}}$$

$$\sigma_{ij} = A_1 \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + A_2 \cdot \epsilon_{ij} + A_3 \cdot \epsilon_{ik} \cdot \epsilon_{kj}$$

Anmerkung: Zwischen der 1. und der 2. Gleichung besteht kein Zusammenhang derart, daß das 1. Glied der 2. Gleichung aus dem 1. Glied der 1. Gleichung resultiert etc., sondern die 3 Glieder der 2. Gleichung enthalten Terme aus verschiedenen Gliedern der 1. Gleichung.

wobei A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> und A<sub>3</sub> Funktionen der Verzerrungsinvarianten sind. Für praktische Berechnungen kann man die Potentialfunktion durch eine Reihenentwicklung der Invarianten darstellen und erhält ein hyperelastisches Gesetz vom Grade n, wenn man die Verformungsgrößen bis zur n-ten Potenz berücksichtigt.

Die einfachste Form das Hooke'sche Gesetz erhält man mit

$$\sigma_{ij} = C_1 \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + C_2 \cdot \epsilon_{ij}$$

Das Hooke'sche Gesetz kann also als hyperelastisches Gesetz vom Grade 1 aufgefaßt werden.

3.) Die Hypoelastizität: Im Rahmen der Hypoelastizität werden die Zusammenhänge in Geschwindigkeiten definiert. Es gilt:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\sigma_{mn}) \cdot \dot{\epsilon}_{kl}$$

Im allgemeinen ist die Spannungsänderung eine Funktion der Verzerrungsgeschwindigkeit und des Spannungstensors. Spezielle hypoelastische Materialien werden dadurch definiert, daß die Abhängigkeit der Funktion f von den Spannungen eingeschränkt wird. Ein Material wird als vom Grade n bezeichnet, wenn f ein Polynom vom Grade n in den Komponenten von σ ist. Eine lineare Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungsänderung, bei der die Abhängigkeit durch zwei Materialkonstanten definiert wird, wie beim Hooke'schen Gesetz in der Form

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \cdot \dot{\epsilon}_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot G \cdot \dot{\epsilon}_{ij}$$

kann also als hypoelastische Formulierung vom Grade null bezeichnet werden.

Elastizität, Hyperelastizität und Hypoelastizität sind nicht gleichwertige Merkmale, denn sie können nicht für alle Fälle vollkommen ineinander überführt werden. Zum Beispiel ist die anisotrope Elastizität nicht als Sonderfall in der Hypoelastizität enthalten, weil ein lineares anisotropes Elastizitätsgesetz mehr als zwei Konstanten enthält.

Darstellungen und Definitionen der drei Konzepte sind hiermit noch nicht vollständig. Auf eine ausführliche und vollständige Darstellung wird verzichtet, da es hier nur darum geht, das Raster aufzuzeigen, in das die verschiedenen nicht-linear-elastischen Stoffgesetze der Bodenmechanik eingeordnet werden müssen. Eine Zusammenstellung der Konzepte findet sich bei Fung |27|, eine ausführliche Darstellung und eine Abgrenzung der verschiedenen Konzepte gegeneinander bei Truesdell/Noll |78|.

Darstellungen der Form  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$  sind finite Formulierungen.

Bei Formulierungen in den Geschwindigkeiten

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \cdot \dot{\epsilon}_{kl}$$

spricht man im allgemeinen von differentiellen oder inkrementellen Ansätzen.

Die differentielle Form garantiert die Elastizität nur im differentiellen Sinn, d. h. das Materialverhalten ist bei einer Beanspruchung vom Ausgangszustand abhängig und wegabhängig.

Vom Standpunkt der praktischen Anwendung aus gesehen, sollte ein Stoffgesetz zwei Forderungen erfüllen:

- 1.) die physikalischen Eigenschaften des Materials müssen möglichst getreu wiedergegeben werden;
- 2.) es sollte von möglichst einfacher Form sein.

Da die physikalische Nichtlinearität bei Böden stark ausgeprägt ist, erfüllt das Hooke'sche Gesetz die erste Forderung nicht. Weil es aber die zweite Forderung in optimaler Weise erfüllt, wird meist versucht, es soweit wie möglich beizubehalten. Zahlreiche Autoren kommen so zu den "einfachen nichtlinear-elastischen Stoffgesetzen", den Modellen mit variablen Moduln (variable moduli models), die auch als pseudoelastische Gesetze bezeichnet werden. Bei diesen Gesetzen werden in jedem Inkrement der FE-Berechnung die Parameter des Hooke'schen Gesetzes dem jeweiligen Spannungs- bzw. Verzerrungszustand angepaßt.

Zwischen Spannungs- und Verzerrungsinkrement gilt also das Hooke'sche Gesetz und somit die Koaxialität von Spannungs- und Verzerrungsinkrement. Das Inkrement der volumetrischen Dehnung wird allein und umkehrbar eindeutig aus dem Kugeltensoranteil des Spannungsinkrements (der hydrostatischen Spannung) bestimmt, der Deviatoranteil des Verzerrungsinkrements wird allein und umkehrbar eindeutig durch den Deviatoranteil des Spannungsinkrements bestimmt. D. h. das bei Böden beobachtete Phänomen der Dilatanz, daß Schubspannungen Volumenänderungen ergeben, kann mit dem Konzept der isotropen elastischen Stoffgesetze nicht berücksichtigt werden.

### Die einfachen nichtlinear-elastischen Stoffgesetze

Diese Gesetze werden meist dadurch gewonnen, daß in die Spannungs-Dehnungsdiagramme, die man z. B. aus Triaxialversuchen erhält, mathematische Funktionen "eingepaßt" werden (curve fitting). Oft wird das Stoffgesetz dann mit der gewählten Funktion bezeichnet (als hyperbolisch, parabolisch etc.). Bisher wurde das Stoffgesetz von Duncan/Chang [24] am häufigsten verwendet. Aus der von Kondner [38] formulierten Spannungsdehnungsbeziehung im Triaxialversuch

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_3}{a + b \cdot \epsilon_3} \quad \begin{array}{l} \text{Zugspannungen positiv !} \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad \epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3 \end{array}$$

und dem von Ohde [58] erfaßten Einfluß der hydrostatischen Vorbelastung

$$E_i = \bar{K} \cdot \left( \frac{-\sigma_1}{p_a} \right)^n \quad p_a \text{ ist der normale atmosphärische Druck}$$

gewinnen Duncan/Chang durch Differentiation die Formel für einen tangentialen Elastizitätsmodul

$$E_t = \left[ 1 - R_f \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]^2 \cdot \bar{K} \cdot \left( \frac{-\sigma_1}{p_a} \right)^{n-1} \cdot p_a$$

Obwohl die Formel für den tangentialen Elastizitätsmodul aus den Spannungs wegen des triaxialen Kompressionsversuchs abgeleitet wurde, wird sie häufig ohne Nachweis für beliebige Spannungswege verwendet. Da für die Grenzspannung der Wert von Coulomb gilt, ergibt sich die maximale Hauptspannungsdifferenz zu

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi - 2 \cdot \sin \phi \cdot \sigma_1}{1 - \sin \phi}$$

In der ursprünglichen Formulierung von Duncan/Chang war nur der Elastizitätsmodul variabel, und deshalb wurde das volumetrische Verhalten des Materials völlig unzureichend erfaßt. Als Verbesserung schlugen Kulhawy/Duncan [39] vor, die Querkontraktionszahl  $\mu$  als Funktion der Verzerrungen einzuführen.

Dieser Vorschlag stellt zwar eine Verbesserung dar, der Mangel der Nichterfassung der Dilatanz liegt jedoch im Ansatz begründet und wird damit nicht behoben. Außerdem wird in der Formulierung von Duncan/Chang in allen Fällen, in denen  $\sigma_1$  eine Zugspannung ist,  $E_t$  imaginär. Für solche Fälle, die bei kohäsiven Böden realistisch sind, wird der Ausdruck für  $E_t$  von Clough [15], Laumans [45], Hilmer [33] und Thamm [77] modifiziert.

Von dem Stoffgesetz von Duncan/Chang ausgehend entwickelt Stroh [74] ein spannungswegabhängiges Stoffgesetz. Dabei werden verschiedene Spannungswege dadurch

berücksichtigt, daß für verschiedene typische Spannungswege jeweils ein Satz von Stoffparametern im Labor ermittelt und in der FE-Rechnung berücksichtigt wird.

Auf Grund der Triaxialversuche, die sie mit Sand durchgeführt haben, kommen Domaschuk/Wade [19] zu dem Ansatz

$$G = G_i \cdot (1 - b \cdot \sqrt{J_2})^2 \quad K = K_i + m \cdot p,$$

wobei  $G_i$ ,  $b$ ,  $K_i$  und  $m$  in Abhängigkeit von der Lagerungsdichte in Triaxialversuchen gemessen werden sollen. Nelson/Baron [57] entwickeln die Beziehungen

$$G = G_o + \gamma_1 p + \bar{\gamma}_1 \sqrt{J_2} \quad K = K_o - K_1 \cdot \epsilon_v + K_2 \cdot \epsilon_v^2 \quad (\gamma_1 > 0; \bar{\gamma}_1 < 0),$$

wobei die Materialparameter  $G_o$ ,  $\gamma_1$ ,  $\bar{\gamma}_1$ ,  $K_o$ ,  $K_1$  und  $K_2$  aus Triaxial- und Oedometerversuchen gewonnen werden. Eine ähnliche Formulierung wird von Naylor [56] verwendet. Seine Formulierung ist für den Schubmodul identisch mit der von Nelson/Baron. Der Ausdruck für den Kompressionsmodul  $K$  wird von ihm vereinfacht, so daß er zu folgendem Vorschlag kommt:

$$G = G_o + \alpha_g p + \beta_g \sqrt{J_2} \quad K = K_o + \alpha_k p \quad (\alpha_g > 0; \beta_g < 0)$$

Corotis, et. al. [16] schlagen ein Modell vor, bei dem der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl variiert werden. Für Sand führen sie zusätzlich einen "Dichteparameter"  $n_\gamma$  ein, so daß bei ein und demselben Sand die Materialparameter bei verschiedenen Lagerungsdichten gelten:

$$E = E_o \cdot \left( \frac{-\sigma_3 + p_a}{p_a} \right)^{\alpha \cdot k + \beta} \quad \mu = (b - \mu_o) \left[ 1 - \left( \frac{-\sigma_3 + p_a}{p_a} \right)^{-a \cdot |\alpha \cdot k + \beta|} \right] + \mu_o$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $E_o$  und  $a$  sind Materialparameter.  $k$  ist definiert durch das Verhältnis der Hauptspannungsinkremente und  $b$  ist eine Funktion von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $k$ .

$$k = \frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} \quad b = \frac{\alpha \cdot k + \beta - |(\alpha \cdot k + \beta)|}{4 \cdot (\alpha \cdot k + \beta)}$$

Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Werten von  $E_o$  bei verschiedenen Lagerungsdichten wird über den Parameter  $n_\gamma$  durch die Formel

$$(E_o)_n = (E_o)_s \cdot \left( \frac{\gamma_n}{\gamma_s} \right)^{n_\gamma} \quad \text{angegeben.}$$

Dabei ist  $\gamma_n$  die Wichte (spez. Gewicht) im Zustand  $n$ , der gekennzeichnet ist durch einen Porenanteil  $n_n$ .  $\gamma_s$  ist die Wichte der Kornsubstanz. Da der Porenanteil  $n_n$  das Verhältnis von Porenvolumen/Gesamtvolumen im Zustand  $n$  angibt, gilt:

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_s} = 1 - n_n$$

### Orthotrope Modelle

Das Konzept der variablen Moduln wird von Drnevich [20] erweitert, indem für zwei zueinander senkrechte Richtungen verschiedene Moduln angegeben werden können.<sup>1)</sup> Die Richtungen der Orthotropie sind im allgemeinen die Hauptspannungsrichtungen. Die Elemente der tangentialen Materialmatrix werden angegeben mit:

$$D_{ii} = \left[ 1 - \frac{3 \cdot \sigma_i}{\epsilon_v \cdot M_i} \right]^2 \cdot M_i \quad D_{ii} = G_{\max} \left[ 1 - C_2 \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{\max J_2}} \right]^2$$

für  $i = 1, 2, 3$

für  $i = 4, 5, 6$

$$D_{ij} = (D_{ii} + D_{jj})/2 - 2 \cdot D_{i+3, i+3}$$

für  $i = 1, 2, 3$  (über gleiche Indizes wird nicht summiert)

$\sqrt{\max J_2}$  ergibt sich aus der Coulomb'schen Grenzbedingung,  $C_2$  ist eine Materialkonstante, und die  $M_i$  werden direkt aus Materialparametern bestimmt. Wenn der Boden schon im Ausgangszustand orthotrop ist, müssen für die beiden Richtungen verschiedene Materialparametergruppen eingeführt werden.

Ein ähnliches Modell wird von Chowdhury [14] für zweidimensionale Probleme vorgeschlagen. Die variablen Moduln sind zwei "Elastizitätsmoduli", zwei "Querkontraktionszahlen" und ein "Schubmodul". Das Modell hat fünf voneinander unabhängige elastische Parameter.

Darve [17] schlägt eine orthotrope, inkrementelle elastische Formulierung vor in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\epsilon}_{zz} \\ \dot{\epsilon}_{xy} \\ \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E & O & O & O \\ F & B & D & O & O & O \\ E & D & C & O & O & O \\ O & O & O & G & O & O \\ O & O & O & O & H & O \\ O & O & O & O & O & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{zz} \\ \dot{\sigma}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{yz} \\ \dot{\sigma}_{zx} \end{bmatrix}$$

Dabei sind die 9 Größen  $A, B, C, D, E, F, G, H, J$  abhängig vom Spannungs- und Verzerrungszustand, von der Belastungsgeschichte und von der "Richtung" der Beanspruchung (Be- oder Entlastung). Auf Grund seiner Versuchsergebnisse mit Sand weist Darve besonders darauf hin, daß nicht nur der Belastungsvorgang, sondern auch der Entlastungsvorgang ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten aufweist.

<sup>1)</sup>Ein ähnlicher Vorschlag wurde bereits von Liu (1972) [48] für Beton gemacht.

### Nichtlineare Ansätze höherer Ordnung

Vor allem zur Beschreibung des Verhaltens kohäsionsloser Böden wurden höhere nichtlineare Stoffgesetze entwickelt. So formulierte z. B. Meißner [52], auf der Arbeit von Chang/Ko/Scott/Westman [13] aufbauend, ein Stoffgesetz, bei dem Verformungsgrößen bis zur dritten Potenz berücksichtigt werden. Für dieses Stoffgesetz müssen zwei mal zwölf Stoffparameter bestimmt werden, ein Satz von Parametern für das Materialverhalten vor dem Erreichen der maximalen Scherbeanspruchung, ein Satz für das Verhalten danach (post peak behaviour). Mit diesem Modell wird zwar das Verhalten von Sand besser beschrieben als mit den einfachen nichtlinear-elastischen Modellen, die Bestimmung der Stoffparameter ist jedoch sehr aufwendig, so daß dieses Gesetz bisher lediglich für die Nachrechnung von Triaxialversuchen [52,53] und einem Kreisfundament [53] verwendet wurde.

Von Laumans [45] werden Stoffgleichungen so formuliert, daß sowohl die Vorteile der nichtlinear-elastischen als auch die der elasto-plastischen Formulierungen ausgenutzt werden. Für den Fall der ebenen Formänderung und unter Annahme des Coulomb'schen Kriteriums werden unterschiedliche Ansätze zur Ermittlung der Spannungs-Verzerrungsbeziehung im jeweiligen Lastschritt verwendet:

- nach Erreichen des Fließkriteriums werden die Beziehungen auf der Basis der Plastizitätstheorie in Anlehnung an [31] formuliert. Es wird die in Abschnitt 2.1.2 dargestellte Methode gewählt, wobei die Besonderheiten und Vereinfachungen, die sich bei ebener Dehnung und bei der Fließbedingung von Mohr-Coulomb ergeben, ausgenutzt werden;
- da bei Sand schon vor Erreichen der Fließfläche Dilatanz auftritt und dieses Phänomen mit den pseudoelastischen Ansätzen (Variation von  $E$  u.  $\mu$ /bzw.  $G$  u.  $K$ ) nicht beschrieben werden kann, werden für den elastischen Bereich Stoffgleichungen entwickelt, bei denen die Nichtlinearität nicht nur durch eine Variation von  $G$  und  $K$  erfaßt wird, sondern auch durch einen Dilatanzwinkel, dessen Größe eine Funktion des aktuellen Spannungszustands ist.

Durch die Einführung des Dilatanzwinkels vor Erreichen der Fließfläche und eine nichtassozierte Fließregel (Definition s. Abschnitt 2.1.1) wird die Stoffmatrix  $[D]$  nicht symmetrisch. Das hat zur Folge, daß sich der Rechenaufwand bei der numerischen Analyse nahezu verdoppelt, wenn die Methode der tangentialen Steifigkeit (s. Abschnitt 4.1.1) verwendet wird.

Diesem Nachteil steht der entscheidende Vorteil gegenüber, daß in allen Spannungsbereichen das Verhalten des Bodens realistisch erfaßt wird, so daß das von Laumans entwickelte Modell vor allem für Probleme, bei denen die Dilatanz einen wesentlichen Einfluß hat (Abschnitt 2.3), von Bedeutung ist.

Es gibt auch Ansätze, die Scherfugenausbildung, wie sie vor allem bei stark überkonsolidierten Böden beobachtet werden kann, mit den Methoden der Bruchmechanik, d. h. den Ansätzen in der Felsmechanik und im Massivbau folgend, mathematisch zu beschreiben. Das Problem der Festlegung eines Lokalisations- und Richtungskriteriums wird von Rice [62] und Vardoulakis [79] dargestellt.

## 1.2 AUFGABENSTELLUNG UND PROBLEMLÖSUNG

In der vorliegenden Arbeit sollen unter den Voraussetzungen, daß das Stoffverhalten von der Zeit, der Temperatur und dem Porenwasserdruck unabhängig ist und die Verformungen klein sind, Stoffgesetze entwickelt, programmiert und in die FE-Programme SMART [2] und GEOFEPA [45] implementiert werden. Diese Stoffgesetze sollen nicht nur das Verhalten des Bodens zutreffend beschreiben, sondern es soll auch nachgewiesen werden, daß mit den vorgeschlagenen Modellen, FE-Berechnungen von Problemen des Grundbaus möglich und wirtschaftlich sind.

Da das Material Boden die verschiedensten Zustandsformen und Eigenschaften aufweist, ist es weder möglich noch sinnvoll, ein einziges Modell zu entwickeln, dessen Stoffwerte einfach bestimmt werden können, das alle Vorgänge zutreffend beschreibt und das auf Probleme mit beliebigen Randbedingungen angewandt werden kann.

Deshalb werden zwei verschiedene Modelle verwendet:

1. Ein isotropes elastoplastisches Modell (Abkürzung ELPL). Fließfläche und plastisches Potential dieses Modells (Bild 1.6) sind aus zwei Funktionen - einer Funktion für einen allgemeinen Kegel und einer Funktion für die Kappe - zusammengesetzt. Diese Funktionen sind so gewählt, daß durch entsprechende Wahl der Parameter eine Anpassung an die Fließbedingung des jeweiligen Materials möglich ist. Mit dem vorgeschlagenen Modell können praktisch die verschiedenen kegelförmigen Fließflächen [21, 26, 30, 42, 75, 81] wie auch die Kappenmodelle von [58] und [85] simuliert werden. Da keine assoziierte Fließregel vorausgesetzt wird, kann auch dilatantes Materialverhalten zutreffend beschrieben werden. Die Programmierung ist so durchgeführt, daß jedes isotrope Ver- bzw. Entfestigungsgesetz durch Ergänzung in das Modell eingefügt werden kann. Wird z. B., wie u. a. von Laumans vorgeschlagen, eine Funktion für die Arbeitsverfestigung in Experimenten bestimmt, muß nur dieser "Baustein" programmiert und eingebaut werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird als Ver- bzw. Entfestigungsgesetz ein erweitertes Cam-Clay-Modell verwendet. Thamm hat in [77] den Konstanzer Seeton untersucht und dabei festgestellt, daß man mit dem Cam-Clay-Modell zwar grundsätzlich das Verhalten auch dieses Tones beschreiben kann ([77|Abb. 10, S. 49), daß jedoch die geometrische Form der Fließfläche des Modified Cam-Clay-Modells das Verhalten des Konstanzer Seetons nicht zutreffend beschreibt. In [77, S. 59] wird deshalb eine Formel für den Konstanzer Seeton angegeben. Dieser Vorschlag

stellt eine Umformung des Modified Cam-Clay Modells dar, jedoch keine Erweiterung. Deshalb wird in dieser Arbeit eine zusätzliche Materialkonstante so eingeführt, daß sowohl die Fließfläche des Konstanzer Seetons als auch die des Modified Cam-Clay-Modells zutreffend erfaßt werden können.

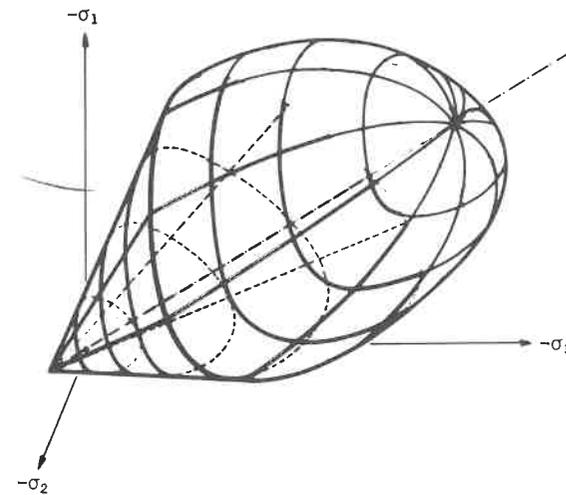


Bild 1.6: Fließfläche im Hauptspannungsraum

2. Ein einfaches nichtlinear-elastisches (pseudoelastisches) Modell, das vor allem die Forderungen nach einfacher Bestimmung der Stoffkonstanten und wirtschaftlicher Berechnung erfüllt. Dieses Modell ist vor allem für Probleme geeignet, bei denen FE-Berechnungen angestellt werden müssen, bevor ein umfangreiches Laborprogramm durchgeführt worden ist (z. B. zum Zeitpunkt der Ausschreibung oder wenn das Verhalten des Bodens von untergeordneter Bedeutung ist). Oder aber für Probleme, die so komplex sind, daß das Materialverhalten mit den verfügbaren Theorien nicht beschrieben werden kann und man sich deshalb damit begnügt, die in Laborversuchen gemessene Nichtlinearität direkt in die Berechnung umzusetzen.

Um den Restwiderstand des Materials nach dem Erreichen des Grenzkriteriums zu erfassen, wird die Spannungs-Verzerrungsbeziehung dann, wenn die Mohr-Coulomb'sche Grenzbedingung erreicht ist, auf der Basis der Plastizitätstheorie formuliert. Diese spezielle Version wird abgekürzt mit NOEL 2 bezeichnet. NOEL 1 wird die Version genannt, bei der, wie allgemein üblich, im Grenzzustand der Schubmodul zu Null wird.

Mit beiden Modellen wird ein Lastplattenversuch nachgerechnet, um die Möglichkeiten der Stoffgesetze zu verifizieren. Mit dem einfachen nichtlinear-elastischen Stoffgesetz wird eine FE-Berechnung einer ausgesteiften Baugrube durchgeführt, und die Ergebnisse werden den Werten, die sich aus einer FE-Berechnung mit dem Ansatz von Duncan/Chang [24] bzw. einer konventionellen Berechnung ergeben, gegenübergestellt. Da es sich bei diesem Beispiel um eine sehr komplexe Aufgabe handelt, kann dabei aufgezeigt werden, wie Diskretisierung, optimales Iterationsverfahren und die Möglichkeiten des Programmsystems Ergebnisse und Rechenzeiten beeinflussen.

## 2. Das Konzept der Elastoplastizität für die Methode der finiten Elemente

### 2.1 GRUNDLAGEN

#### 2.1.1 Grundbegriffe der Plastizitätstheorie

Folgende Begriffe und Zusammenhänge sind in der Plastizitätstheorie von grundlegender Bedeutung und sollen deshalb kurz erläutert werden:

##### 1.) Fließfläche oder Fließbedingung

Die Grenze des elastischen Bereichs ist durch die Fließfläche (f) gekennzeichnet:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa) = 0, \quad (2.1)$$

wobei  $\kappa$  durch das Verfestigungsgesetz definiert wird.

Bei ideal plastischen Stoffen ist die Fließfläche nur eine Funktion der Spannungen und Stoffkonstanten, d. h. die Fläche ist im Spannungsraum in bezug auf Form, Größe und Lage invariant gegenüber Spannungs- und Verzerrungszustand. Im allgemeinen ist es jedoch so, daß die Fließfläche in Abhängigkeit von den plastischen Verzerrungen und/oder der plastischen Arbeit Größe, Form und Lage ändert. Der Zustand, bei dem zum ersten Mal plastische Verzerrungen auftreten, wird dann als Anfangsfließfläche oder Anfangsfließbedingung bezeichnet. In Versuchen hat sich gezeigt, daß bei nicht vorbelasteten Böden alle Spannungspunkte des Eigengewichtszustandes auf der Anfangsfließfläche liegen.

##### 2.) Fließregel oder Fließgesetz

Durch die Fließregel (das Fließgesetz) wird das Verhältnis der Komponenten der plastischen Verzerrungsinkremente bzw. der Verzerrungsgeschwindigkeiten definiert. Dafür wird in der Mechanik der Begriff des plastischen Potentials (g) eingeführt, das durch die Gleichung

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2)$$

die Richtung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten festlegt. Dabei ist  $\dot{\lambda}$  ein zunächst unbekannter positiver Faktor, der in manchen Veröffentlichungen auch als "loading-parameter" bezeichnet wird. Bei einer Darstellung, bei der das Koordinatensystem der Hauptspannungen mit dem der Hauptverzerrungsgeschwindigkeiten zusammenfällt, bedeutet das, daß der Vektor der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit (bzw. des -Inkrement) senkrecht auf der Fläche des plastischen Potentials steht.

Ein häufiger Sonderfall ist das Zusammenfallen von plastischem Potential und Fließfläche. Man spricht dann von assoziierter Fließregel oder Erfüllung der Normalitätsbedingung, wobei Normalität bezüglich der Fließfläche gemeint ist. In der neueren Bodenmechanik wird zur Festlegung der Fließregel nicht das plastische Potential verwendet, sondern es wird eine Dilatanzfunktion eingeführt. Dabei wird angenommen, daß in der deviatorischen Ebene (Bild 2.1) die Normalitätsbedingung bezüglich der Fließfläche gilt, jedoch nicht in der hydrostatischen Ebene. Der Winkel zwischen der Ebene normal zur Raumdiagonale und der Projektion des plastischen Verzerrungsinkrements in den Schnitt a-a wird als Dilatanzwinkel bezeichnet (Bild 2.2). Volumenkonstantes Fließen ist gekennzeichnet durch den Dilatanzwinkel  $\nu = 0$ . Der Dilatanzwinkel wird so definiert, daß bei einem Material, das durch den Reibungswinkel  $\phi$  gekennzeichnet ist, die Normalitätsbedingung äquivalent ist der Gleichheit von Dilatanzwinkel  $\nu$  und Reibungswinkel  $\phi$ .

3.) Verfestigungsgesetz (hardening rule)

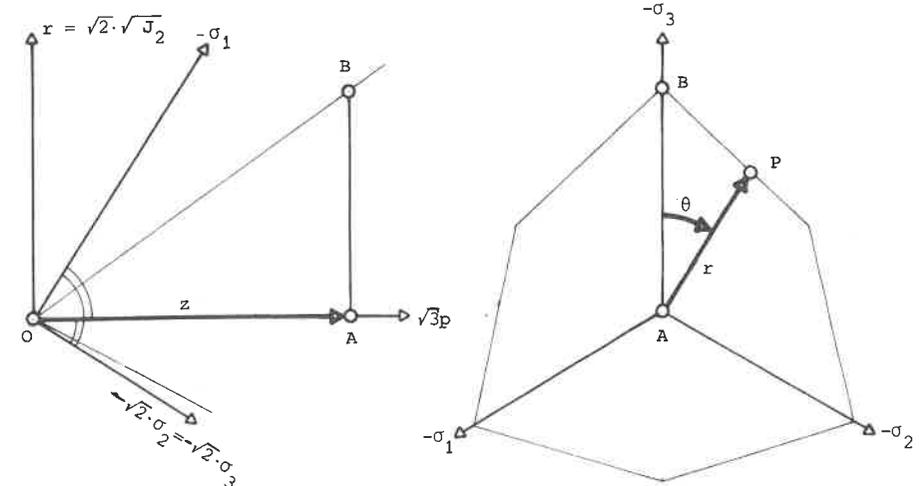
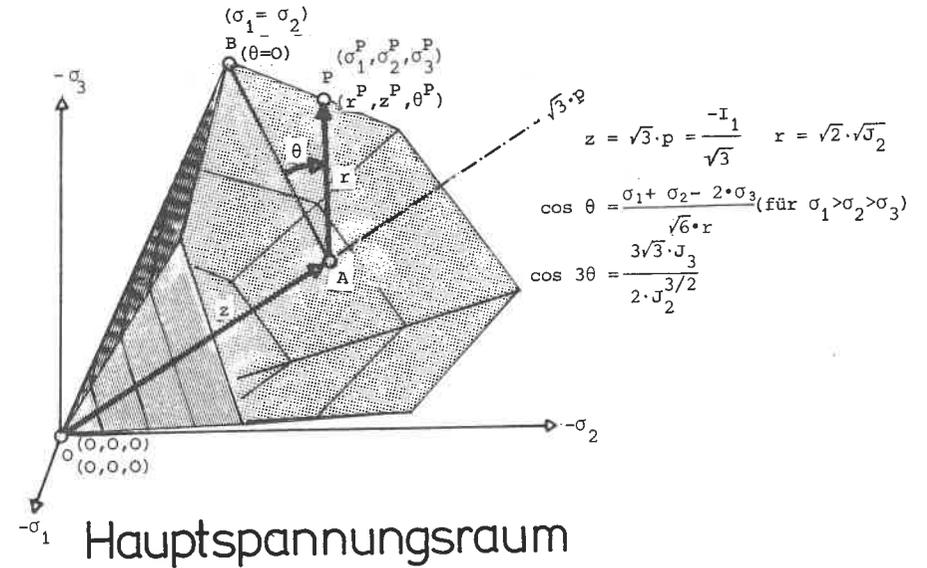
Der funktionale Zusammenhang von Größe, Form und Lage der Fließfläche zur Anfangsfließfläche wird als Verfestigungsgesetz bezeichnet. Die Verschiebung des elastischen Bereichs in Richtung der plastischen Verzerrungsinkremente entspricht einer Steigerung der Festigkeit in diesem Bereich (s. Bild 2.3). Daher die Bezeichnung Verfestigung (hardening). Eine Verschiebung der Fließfläche in entgegengesetzter Richtung wird als Entfestigung (softening) bezeichnet.

Eine allseitige Aufweitung des elastischen Bereichs wird als isotrope Verfestigung, eine Verschiebung als kinematische Verfestigung bezeichnet. Es gibt auch Gesetze, bei denen eine Expansion und eine Translation der Fließfläche möglich ist (s. Bild 2.3 d und e). Eine Überblick über die zahlreichen Verfestigungsgesetze mit Literaturhinweisen gibt Fung ([27], S. 150).

Die Ver(Ent-)festigungsgesetze werden aus Versuchen bestimmt, indem ein funktionaler Zusammenhang zwischen nichtlinearem Materialverhalten und plastischer Verzerrung (Dehnungsverfestigung) bzw. plastischer Arbeit (Arbeitsverfestigung) formuliert wird. Einfache Verfestigungsgesetze können durch eine Skalarfunktion beschrieben werden.

$$\kappa = \int_0^t \epsilon_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P \cdot dt \quad (2.3)$$

$$\kappa = \int_0^t \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P \cdot dt \quad (2.4)$$



durch die Geraden OA und AB wird die hydrostatische Ebene aufgespannt

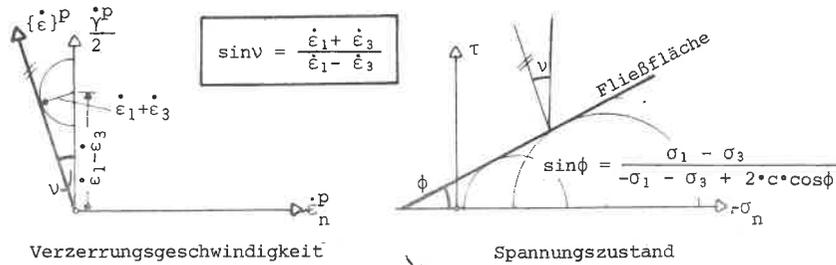
durch r und θ wird die deviatorische Ebene beschrieben

hydrostatische Ebene ( $\theta=0$ )

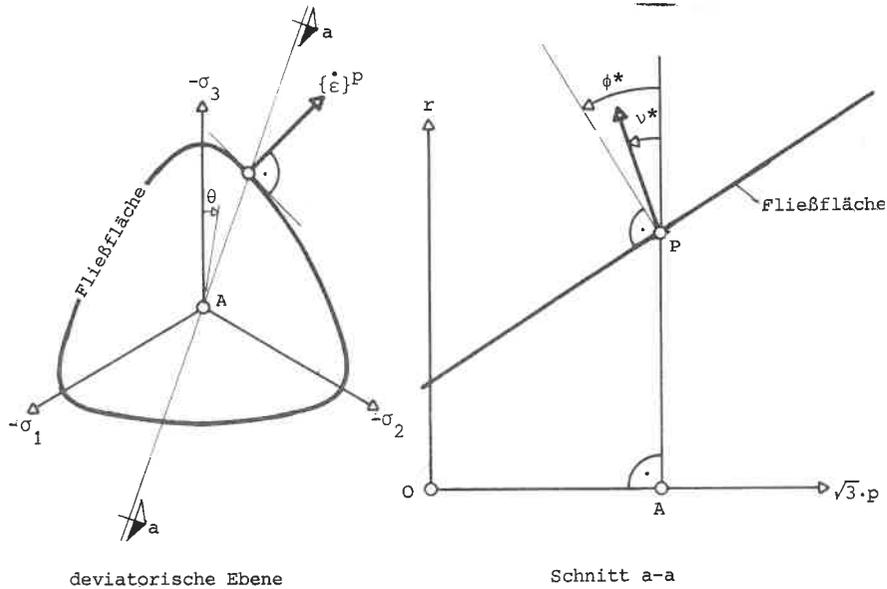
deviatorische Ebene ( $z=const$ )

Bild 2.1: Hauptspannungsraum und Spannungsinvariante

### MOHR'SCHE EBENE



### HAUPTSPANNUNGSRAUM



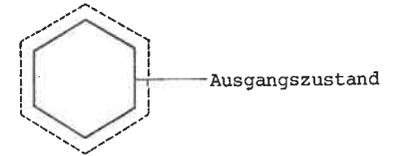
$$v^* = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin v}{\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ - \theta) - \sin v \cdot \sin(30^\circ - \theta)}$$

$$\phi^* = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin \phi}{\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ - \theta) - \sin \phi \cdot \sin(30^\circ - \theta)}$$

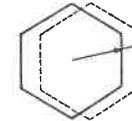
für die Coulomb'sche Fließbedingung  
(Ableitung siehe A 3)

Bild 2.2: Fließfläche und Verzerrungsgeschwindigkeit

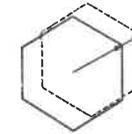
a.) Isotrope Verfestigung



b.) Kinematische Verfestigung (Prager)

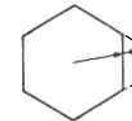


c.) Kinematische Verfestigung (Ziegler)



d.)

andere mögliche Verfestigungsgesetze



e.)

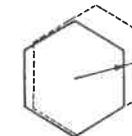


Bild 2.3: Verschiedene Typen von Verfestigung, dargestellt am Beispiel der Fließbedingung von Tresca

Das Postulat von Drucker

Die Änderung (Rate) der plastischen Arbeit ist stets positiv, da es sich im Sinne der Thermodynamik um einen irreversiblen Prozeß handelt (d. h. in einem Belastungszyklus, in dem sich plastische Formänderungen ergeben, wird Energie dissipiert). Daraus leitet Drucker [22] einige Kriterien für Fließfläche, plastisches Potential und Verfestigungsgesetz ab. Diese Kriterien werden oft als Drucker'sches Postulat oder Drucker-Kriterium bezeichnet, und ein Material, das diese Kriterien erfüllt, wird dementsprechend als "stabil im Drucker'schen Sinne" gekennzeichnet.

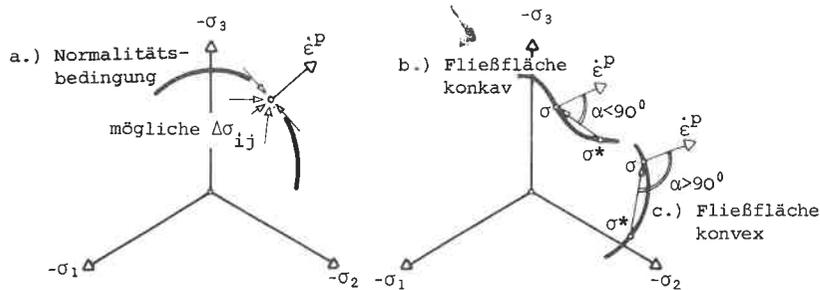


Bild 2.4: Die Forderungen des Drucker'schen Postulats

Die drei Forderungen des Drucker'schen Postulats sind:

1.) Stabilität im Kleinen

$$\Delta\sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.5)$$

Wie man aus Bild 2.4 a sehen kann, ist diese Forderung für alle denkbaren Spannungszinkremente nur erfüllt, wenn die Verzerrungsgeschwindigkeit senkrecht auf der Fließfläche steht,

also 
$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.6)$$

Aus dieser Normalitätsbedingung folgt also die Identität von Fließfläche und plastischem Potential. Die Normalitätsbedingung wird häufig als assoziierte Fließregel bezeichnet.

2.) Stabilität im Großen

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.7)$$

Dabei kennzeichnet  $\sigma_{ij}$  einen Spannungszustand auf der Fließfläche und  $\sigma_{ij}^*$  einen beliebigen benachbarten Spannungszustand unterhalb oder innerhalb der Fließflä-

che. Aus Bild 2.4 b sieht man, daß dann, wenn die Fließfläche konkav gekrümmt ist, das Doppelskalarprodukt aus Spannungszinkrement und Verzerrungsgeschwindigkeit negativ wird (der Vektor des Verzerrungszinkrements ist dem Vektor des Spannungszinkrements entgegengerichtet). Wie aus Bild 2.4 c ersichtlich, wird die Forderung nach Stabilität im Großen erfüllt, wenn die Fließfläche konvex gekrümmt ist. Die Forderung nach Stabilität im Großen ist also identisch mit der Forderung nach **K o n v e x i t ä t** der Fließfläche.

3.) Die Gleichungen (2.5) und (2.7) sind nur dann erfüllt, wenn sich die Fließfläche nicht entgegen der Richtung der Verzerrungsgeschwindigkeit verschiebt. Daraus ergibt sich die Forderung nach Verfestigung (hardening) mit dem Grenzfall der idealen Plastizität, bei der keine Verfestigung eintritt.

Während bei Metallen die Forderungen des Drucker'schen Postulats im wesentlichen mit den Beobachtungen übereinstimmen, ergeben sich bei Böden Widersprüche zwischen dem Postulat und experimentellen Ergebnissen. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten von Metallen und Böden liegt in der unterschiedlichen Struktur der Materialien. Metalle haben Kristallstruktur, und das plastische Fließen resultiert aus Kristallversetzungen, während die Fließ- oder Bruchvorgänge im Boden nicht auf Kristallebene stattfinden, sondern durch Relativbewegungen von verhältnismäßig großen Partikeln eingeleitet werden.

Die Festigkeit von Böden ist im wesentlichen bestimmt durch die Reibung zwischen den einzelnen Materialteilchen (Körnern) und der physikalisch-chemischen Wechselwirkung zwischen festen Teilchen und Wasser. Fließvorgänge können daher als nach Entlastung bleibende Verschiebung zwischen den einzelnen Partikeln der Festsubstanz erklärt werden, Bruchvorgänge als eine Aufhebung der Zugbindungskräfte zwischen den Partikeln.

Aus der Struktur der Böden erklärt sich die Tatsache, daß bei Böden die Forderungen des Drucker'schen Postulats im Experiment nur teilweise bestätigt werden. Bestätigt werden: die 2. Forderung immer, die 3. Forderung häufig, die 1. Forderung selten. Bei vielen Aufgaben des Grundbaus wird das Traglastverhalten im wesentlichen durch das Fließkriterium bestimmt. Da die Drucker'sche Forderung für dieses Kriterium auch bei Böden gilt, kommt man, trotz allem, mit Stoffgesetzen, die alle Forderungen des Drucker'schen Postulats zur Voraussetzung haben, auch im Grundbau häufig zu brauchbaren Ergebnissen. Drucker betont in [23], daß sein Postulat kein Naturgesetz und kein Prinzip der Thermodynamik ist und reale Medien im Sinne des Postulats durchaus instabil sein können.

2.1.2 Die inkrementellen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Vorausgesetzt werden eine Verfestigungsfunktion, wie sie durch Gleichung (2.3) oder Gleichung (2.4) definiert ist und das Hooke'sche Gesetz für den elastischen Bereich.

Die Gesamtverzerrungen setzen sich aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen. Es gilt:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (2.8)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.9)$$

Für ein istropes Werkstoffgesetz können Spannungs- und Verzerrungstensor in Form von Spaltenmatrizen, der Tensor der elastischen Konstanten als quadratische Matrix geschrieben werden. Die Matrix [E] der Spannungs-Verzerrungsbeziehung

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\epsilon\}^e \quad \text{oder} \quad \{\dot{\sigma}\} = [E] \cdot \{\dot{\epsilon}\}^e \quad (2.10)$$

$$\text{bzw.} \quad \{\epsilon\}^e = [E]^{-1} \cdot \{\sigma\} \quad \text{oder} \quad \{\dot{\epsilon}\}^e = [E]^{-1} \cdot \{\dot{\sigma}\} \quad (2.11)$$

ist folgendermaßen besetzt:

$$[E] = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (2.12) \quad [E]^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_3 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  sind Ausdrücke in den elastischen Konstanten. Mit den Umrechnungsbeziehungen

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\mu)} \quad \mu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad E = \frac{9GK}{3K + G} \quad (2.14)$$

erhält man sie

a) als Funktion von Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl  $\mu$ :

$$a_1 = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{1-\mu}{1-2\mu} \quad a_2 = \frac{E}{1+\mu} \quad a_3 = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\mu}{1-2\mu}$$

$$b_1 = \frac{1}{E} \quad b_2 = \frac{1+\mu}{E} \quad b_3 = -\frac{\mu}{E}$$

b) als Funktion des Schubmoduls G und der Querkontraktionszahl  $\mu$ :

$$a_1 = 2G \left(1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\right) \quad a_2 = 2G \quad a_3 = 2G \cdot \frac{\mu}{1-2\mu}$$

$$b_1 = \frac{1}{2G} \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right) \quad b_2 = \frac{1}{2G} \quad b_3 = -\frac{1}{2G} \cdot \frac{\mu}{1+\mu}$$

c) als Funktion des Schubmoduls G und des Kompressionsmoduls K:

$$a_1 = \frac{4G+3K}{3} \quad a_2 = 2G \quad a_3 = \frac{3K-2G}{3}$$

$$b_1 = \frac{3K+G}{9GK} \quad b_2 = \frac{1}{2G} \quad b_3 = -\frac{3K-2G}{18GK}$$

Die erforderlichen Gleichungen zur Festlegung des Fließens sind:

$$\text{die Fließbedingung:} \quad f(\{\sigma\}, \{\epsilon\}^p, \kappa) = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{das plastische Potential:} \quad g(\{\sigma\}, \{\epsilon\}^p, \kappa) = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{mit der Fließregel:} \quad \{\dot{\epsilon}\}^p = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}^T} \quad (2.17)$$

$$\text{das Verfestigungsgesetz:} \quad \kappa = \int_0^t \{\epsilon\}^p \cdot \{\dot{\epsilon}\}^p \cdot dt \quad (2.18)$$

$$\text{oder} \quad \kappa = \int_0^t \{\sigma\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}\}^p \cdot dt \quad (2.19)$$

Für einen Spannungspunkt auf der Anfangsfließfläche gilt

$$f = 0$$

Aus der Ableitung der Fließbedingung nach der Zeit ergibt sich die Konsistenzbedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \cdot \{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial f}{\partial \{\epsilon\}^p} \cdot \{\dot{\epsilon}\}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \cdot \dot{\kappa} = 0 \quad (2.20)$$

Wenn der Härtungsparameter  $\kappa$  nur eine Funktion der plastischen Verzerrungen ist, kann man schreiben:

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon\}^p} \cdot \{\dot{\epsilon}\}^p \quad (2.21)$$

Aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) ergibt sich folgende Beziehung zwischen zwischen Spannungs- und Verzerrungsänderung:

$$\dot{\sigma} = [E] \cdot (\{\dot{\epsilon}\} - \{\dot{\epsilon}\}^p) \quad (2.22)$$

Geht man von der Geschwindigkeitsdarstellung über zu einer Inkrementdarstellung, so folgt aus der Konsistenzbedingung, der Fließregel und den Gleichungen (2.21) und (2.22) die Bestimmungsgleichung für das plastische Verzerrungssinkrement:

$$d\{\epsilon\}^P = \frac{\frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}} \cdot \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} \cdot [E] \cdot d\{\epsilon\}}{\left(-\frac{\partial f}{\partial\{\epsilon\}} - \frac{\partial f}{\partial\kappa} \cdot \frac{\partial\kappa}{\partial\{\epsilon\}^P}\right) \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}} + \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} \cdot [E] \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}}} \quad (2.23)$$

Für den Anteil, der vom Verfestigungsparameter und den plastischen Verzerrungen abhängig ist, wird ein Härtungsparameter eingeführt, der in [3] mit  $h$  und in [84] mit  $A$  bezeichnet wird.

$$h = -\frac{\partial f}{\partial\{\epsilon\}} \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}} - \frac{\partial f}{\partial\kappa} \cdot \frac{\partial\kappa}{\partial\{\epsilon\}^P} \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}} \quad (2.24)$$

Mit der Gleichung für das plastische Verzerrungssinkrement und der inkrementellen Spannungs-Verzerrungsbeziehung kommt man zu folgender Gleichung:

$$d\{\sigma\} = \left([E] - \frac{1}{h + \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} \cdot [E] \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}}}\right) \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}} \cdot \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} \cdot [E] \cdot d\{\epsilon\} \quad (2.25)$$

aus der die Bestimmungsgleichung für die Stoffmatrix nach Erreichen der Fließfläche folgt:

$$[D] = \left([I_6] - \frac{[E] \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}} \cdot \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}}}{h + \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} \cdot [E] \cdot \frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}}}\right) \cdot [E] \quad (2.26)$$

Aus Gleichung (2.26) sieht man, daß eine assoziierte Fließregel zu einer symmetrischen Stoffmatrix und eine nichtassoziierte Fließregel zu einer nichtsymmetrischen Stoffmatrix führt. Ähnliche Ableitungen für die Stoffmatrix bzw. das plastische Verzerrungssinkrement finden sich in [3, 26, 30, 45, 84]. Allerdings wird die Ableitung meist nur für die vom Autor ausgewählten Kriterien der Plastizitätstheorie (Fließfläche, plastisches Potential oder Dilatanzfunktion, Verfestigungsgesetz) durchgeführt. Die Koeffizienten der D-Matrix werden häufig explizit angeschrieben, was für die Programmierung zunächst sehr einfach zu sein scheint. Die Anzahl der Rechenoperationen wird aber nicht größer, als wenn man zuerst die einzelnen Matrizen und Skalare von Gleichung (2.26) ermittelt und dann zur tangentialen Matrix zusammenbaut. Das letztere Verfahren hat vor allem den Vorteil, daß bei der Wahl einer anderen Fließfläche, einer anderen Dilatanzfunktion oder eines anderen Verfestigungsgesetzes nur geringfügige Programmänderungen vorgenommen werden müssen.

Gleichung (2.23) und (2.26) sollen nun in eine Form gebracht werden, die einfacher und anschaulicher ist. Dafür werden zunächst die Einheitsvektoren  $\{a\}$  und  $\{b\}$  eingeführt. Sie sind definiert:

$$\{a\}^T = \frac{\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}}}{\left|\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}}\right|} \quad (2.27)$$

$$\{b\}^T = \frac{\frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}}}{\left|\frac{\partial g}{\partial\{\sigma\}}\right|} \quad (2.28)$$

Aufgrund der Tatsache, daß zunächst das Hooke'sche Gesetz gilt, ergibt sich ein Spannungspunkt B (Bild 2.5), der außerhalb der Fließfläche liegt, also irrereal ist. Dieser Spannungspunkt wird deshalb als fiktiver Spannungspunkt bezeichnet und das entsprechende Spannungssinkrement als fiktives Spannungssinkrement  $d\{\sigma\}_f$ .

$$d\{\sigma\}_f = [E] \cdot d\{\epsilon\} \quad (2.29)$$

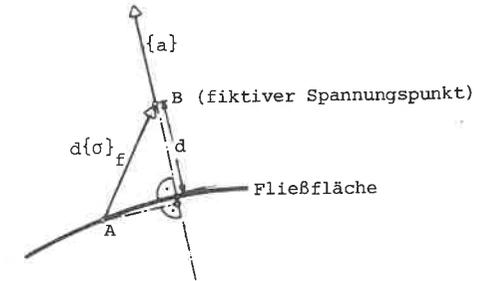


Bild 2.5: Abstand des fiktiven Spannungspunktes von der Fließfläche

Aus Bild 2.5 sieht man, daß der Abstand  $d$  des Spannungspunktes von der Fließfläche sich als Skalarprodukt des Einheitsnormalenvektors  $\{a\}$  und des fiktiven Spannungssinkrements ergibt.

$$d \approx \{a\}^T \cdot d\{\sigma\}_f \approx \{a\}^T \cdot [E] \cdot d\{\epsilon\} \quad (2.30)$$

Mit der Einführung der Vektoren  $\{a\}$  und  $\{b\}$  sowie Gleichung (2.29) lauten die Gleichungen für das plastische Verzerrungssinkrement:

$$d\{\epsilon\}^P = -\frac{\{b\} \cdot d}{\left(-\frac{\partial f}{\partial\{\epsilon\}} - \frac{\partial f}{\partial\kappa} \cdot \frac{\partial\kappa}{\partial\{\epsilon\}^P}\right) \cdot \frac{\{b\}}{\left|\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}}\right|} + \{a\}^T \cdot [E] \cdot \{b\}} \quad (2.31)$$

und für die "tangentialen" Stoffmatrix:

$$[D] = \left\{ [I_6] - \frac{[E] \cdot \{b\} \cdot \{a\}^T}{\left(-\frac{\partial f}{\partial\{\epsilon\}} - \frac{\partial f}{\partial\kappa} \cdot \frac{\partial\kappa}{\partial\{\epsilon\}^P}\right) \cdot \frac{\{b\}}{\left|\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}}\right|} + \{a\}^T \cdot [E] \cdot \{b\}} \right\} \cdot [E] \quad (2.32)$$

wobei  $[I_6]$  die Einheitsmatrix ist.

#### Aufbereitung für die FE-Berechnung

Für die Berechnung des plastischen Verzerrungssinkrements (Gl.2.31) und der tangentialen Materialmatrix (Gl.2.32) müssen die Vektoren  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial\{\epsilon\}^P}$  sowie die skalare Größe  $\frac{\partial f}{\partial\kappa}$  zahlenmäßig bestimmt werden.

Berechnung der plastischen Verzerrungssinkremente	Berechnung der Matrix der tangentialen Moduln
1. Berechnung der Spannungs- und Verzerrungsinvarianten des Spannungstensors gesamt      Verzerrungstensors gesamt deviatorischer Anteil      deviatorischer Anteil $I_1, I_2, I_3$ $J_2, J_3$ $I'_1, I'_2, I'_3$ $J'_2, J'_3$	
2. Berechnung der Hauptspannungen und der Hauptspannungsrichtungen *1) $\sigma_i$ $n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}$ $i = 1, 2, 3$	
3. Aufgrund der Reihenfolge der Hauptspannungen wird festgestellt, in welchem Bereich der fiktive Spannungspunkt liegt. Die Hauptspannungen werden geordnet, d.h. Transformation vom Bereich n in den Bereich 1.	
4. Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial \kappa}$ und der Vektoren {a}, {b}, $\frac{\partial f}{\partial \{\epsilon\}^P}$ , $\frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon\}^P}$ für den Bereich 1.	
5. Transformation der Vektoren vom Bereich 1 in den Bereich n	
6. Berechnung der Skalarprodukte $A_1 = \left(-\frac{\partial f}{\partial \{\epsilon\}^P} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon\}^P}\right) \cdot \frac{\{b\}}{\left \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}\right }$ $A_2 = \{a\}^T \cdot [E] \cdot \{b\}$	
7. Berechnung des Abstandes des fiktiven Spannungspunktes von der Fließfläche Zusammenbau $d\{\epsilon\}^P = \frac{d}{A_1 + A_2} \cdot \{b\}$ Transformation $d\{\epsilon\}_k^P = [B] \cdot d\{\epsilon\}^P$ *3)	Transformation der 3x1 Vektoren {a} und {b} zu 6x1 Vektoren {a}_k u. {b}_k mit Hilfe der Hauptspannungsrichtungen $\{a\}_k = [B] \cdot \{a\}$ $\{b\}_k = [B] \cdot \{b\}$ *2) Berechnung der Hilfsmatrix [H] $[H] = [E] \cdot \{b\}_k \cdot \{a\}_k^T$ Zusammenbau $[D] = \left([I_6] - \frac{1}{A_1 + A_2} \cdot [H]\right) \cdot [E]$

\*1) Siehe A 1.4    \*2) Ableitung der Transformationsmatrix [B] siehe A 1.4  
 \*3) der Vektor  $d\{\epsilon\}^P$  ist der Vektor der plastischen Hauptdehnungssinkremente. Durch Multiplikation mit der Matrix [B] ergibt sich daraus der 6x1 Vektor  $d\{\epsilon\}_k^P$  mit den Komponenten des kartesischen Systems.

Bild 2.6: Ablauf der Berechnung für ein isotropes elastoplastisches Stoffgesetz bei Zustandsänderung in einem physikalischen Punkt

Es ist von Vorteil, grundsätzlich in Hauptspannungen und Hauptdehnungen und nicht in den kartesischen Komponenten zu formulieren, denn dadurch werden aus den 6 x 1 Vektoren 3 x 1 Vektoren. Für isotrope Stoffgesetze gilt allgemein:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_i} \quad \frac{\partial f}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial f}{\partial I'_1} \cdot \frac{\partial I'_1}{\partial \epsilon_i} + \frac{\partial f}{\partial J'_2} \cdot \frac{\partial J'_2}{\partial \epsilon_i} + \frac{\partial f}{\partial J'_3} \cdot \frac{\partial J'_3}{\partial \epsilon_i}$$

Im Rahmen dieser Arbeit:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i} \quad \frac{\partial f}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_v} \cdot \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \epsilon_i} \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

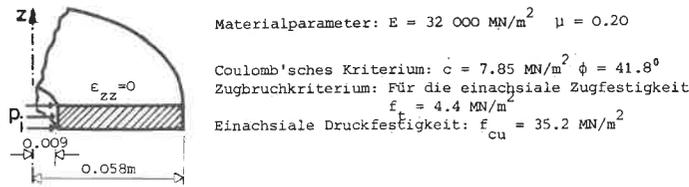
(Wegen des Zusammenhangs zwischen Hauptspannungen, Invarianten sowie p, r und  $\theta$  siehe Bild 2.1).

Für ein isotropes elastoplastisches Stoffgesetz ergibt sich bei der Berechnung der in Bild 2.6 dargestellte Programmablauf. Der Formelapparat, der bisher in Abschnitt 2 entwickelt wurde, wird bei der FE-Berechnung zur Bestimmung der Anfangslasten (siehe Abschnitt 4.1.1 und Anhang A 2) benötigt.

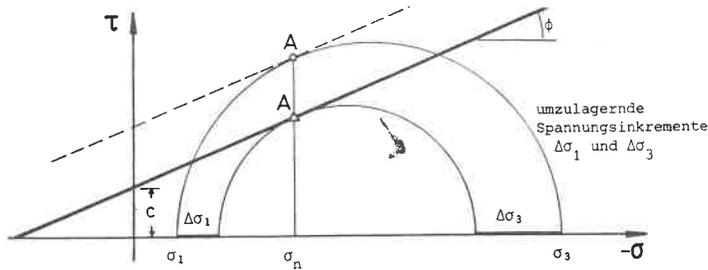
Da für die Anwendung in der Praxis die Anfangslasten häufig direkt aus dem Spannungsüberschuß (Spannungsanteil der außerhalb des Grenzkriteriums liegt) ermittelt werden, soll dieses Verfahren der "direkten Spannungsumlagerung" hier kurz dargestellt werden.

### 2.1.3 Direkte Spannungsumlagerung

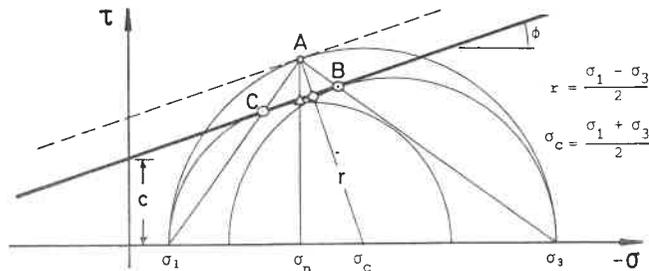
In der Boden- und Felsmechanik wird häufig ein direktes Verfahren, z. B. bei Argyris et. al. [6], Wittke et. al. [81] und Malina [51], zur Ermittlung der umzulagernden Anfangslasten verwendet, für das nur die Fließbedingung notwendig ist und das deshalb nur bei ideal-elastischem, ideal-plastischem Materialverhalten verwendet werden kann. Bei diesem Verfahren werden dann die umzulagernden Spannungssinkremente aus dem Mohr'schen Diagramm mit Hilfe von Plausibilitätsbedingungen ermittelt. Es wird meist angenommen, daß die Normalspannung konstant bleibt (Bild 2.7 b), und so werden aus dem "Spannungsüberschuß"  $\tau$  die umzulagernden Spannungssinkremente  $\Delta\sigma_1$  und  $\Delta\sigma_3$  ermittelt. Je nach Programm werden direkt aus den Anfangsspannungen die Anfangslasten berechnet, oder aber es müssen zuvor die Anfangsverzerrungen berechnet werden. Mit diesen Anfangslasten ergibt sich dann eine Korrektur des Spannungs- u. Verschiebungszustandes u. die Iteration erfolgt in derselben Weise wie bei einer Ermittlung der Anfangsdehnungen nach Gleichung 2.31.



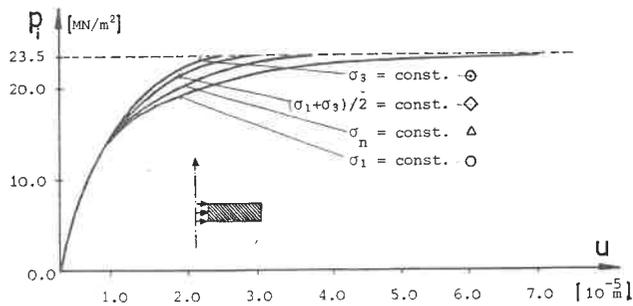
a.) Geometrie und Materialdaten



b.) Spannungsumlagerung bei konstanter Normalspannung



c.) Verschiedene Möglichkeiten der Spannungsumlagerung



d.) Last-Verschiebungsdiagramm für verschiedene Arten der Spannungsumlagerung

Bild 2.7: Direkte Spannungsumlagerung bei einem Berechnungsbeispiel von Argyris et. al. [6]

Da bei diesem Verfahren nur die Fließbedingung, nicht die Fließregel, erfüllt sein muß, entspricht dieses Verfahren einer Ermittlung der Grenzlaster nach dem Theorem der unteren Schranke. Denn der Spannungszustand wird so modifiziert, daß an keinem Punkt des diskretisierten Bereichs die Fließbedingung überschritten wird. Die Brauchbarkeit dieser Methode ist nicht nur durch ihre häufige Anwendung erwiesen, sondern in [5] wurde auch untersucht, welchen Einfluß die Art der Spannungsumlagerung auf das Last-Verschiebungsdiagramm hat.

Für einen Betonring (Bild 2.7 a) wurden für verschiedene Annahmen (Bild 2.7 c) FE-Rechnungen durchgeführt. Dabei zeigte sich, daß die getroffene Annahme zwar die Verformungen, jedoch nicht die Grenzlaster (Bild 2.7 d) beeinflusst. Aus dem Verhalten des Betonrings kann aber nicht geschlossen werden, daß bei allen Randbedingungen die Art der Spannungsumlagerung ohne Einfluß auf die Grenzlaster ist. Der numerische Test von [6] weist darauf hin, daß bei Problemen, bei denen keine starken Zwängungen aufgrund der Randbedingungen auftreten, die Grenzlaster nur wenig von der Art der Spannungsumlagerung und damit der Fließregel beeinflusst wird. Unterschiedliche Arten der Umlagerung können als unterschiedliche Fließregeln interpretiert werden, wobei allerdings kein bestimmter Zusammenhang zwischen der Art der direkten Spannungsumlagerung und der Fließregel angegeben werden kann (siehe dazu auch Abschnitt 2.3 über den Einfluß des Dilatanzwinkels).

2.2 DIE ENTWICKLUNG EINES NEUEN ELASTOPLASTISCHEN STOFFGESETZES (ELPL)

Das in dieser Arbeit vorgeschlagene elasto-plastische Stoffgesetz (ELPL) soll eine weiterentwickelte Form des Cam-Clay-Modells beinhalten. Da im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur drainierte Zustände untersucht werden, können die Möglichkeiten des "Kappenmodells" (ELPL2), Berechnung von Verformungen, Spannungen und Porenwasserüberdrücken, nicht voll ausgeschöpft werden. Das elasto-plastische Stoffgesetz wird jedoch so formuliert und aufbereitet, daß es ohne Ergänzungen in ein FE-Programm zur Berechnung der Konsolidation von Böden (Kopplung von Spannungs-Verformungs- und Sickerströmungsberechnung) implementiert werden kann. Um den Zusammenhang zwischen Cam-Clay-Modell, Plastizitätstheorie und dem Stoffgesetz ELPL 2 aufzuzeigen, soll zunächst das Cam-Clay-Modell und seine Terminologie dargestellt werden.

Das sogenannte Cam-Clay-Modell wurde vor etwa zwanzig Jahren auf Grund von Versuchen mit weichen Tonen - dem Cambridge Clay - von Burland, Roscoe, Schofield, Wroth u. a. in Cambridge entwickelt. Es wurde eine Gesetzmäßigkeit zwischen Vorbelastung, Lagerungsdichte, dem effektiven Spannungszustand, bei dem plastische Verzerrungen auftreten und den plastischen Verzerrungen selbst festgestellt. Das Ergebnis der Forschungsarbeit in Cambridge in der Terminologie der Plastizitätstheorie: der Kegel der Coulomb'schen oder einer ähnlichen Fließfläche wird durch eine Kappe abgeschlossen (Bild 1.5), und es gibt ein Verfestigungsgesetz, das Lage und Form dieser Kappe festlegt. Dieses Verfestigungsgesetz ist hier nur eine Funktion der plastischen Volumenänderungen.

2.2.1 Die Terminologie des Cam-Clay-Modells

Die Ergebnisse der triaxialen Kompressionsversuche, auf deren Basis das Cam-Clay-Modell entwickelt wurde, werden nicht im Spannungsraum, sondern in einem p-q-e-Diagramm aufgetragen (Bild 2.8). Zur Beschreibung des Materialverhaltens werden folgende Begriffe verwendet [64, 68]:

Konsolidationsspannung: Mit Konsolidationsspannung wird die maximale hydrostatische Spannung ( $\max p = p_f$ ) bezeichnet, die jemals auf den Boden eingewirkt hat. Sie wird nur dann als Konsolidationsspannung bezeichnet, wenn sie so lange gewirkt hat, daß der Porenwasserüberdruck vollkommen abgebaut ist. Dementsprechend wird ein Boden, dessen Konsolidationsspannung höher war als die aktuelle hydrostatische Spannung (akt p), als überkonsolidiert, ein Boden, bei dem sie gleich der Konsolidationsspannung ist, als normalkonsolidiert

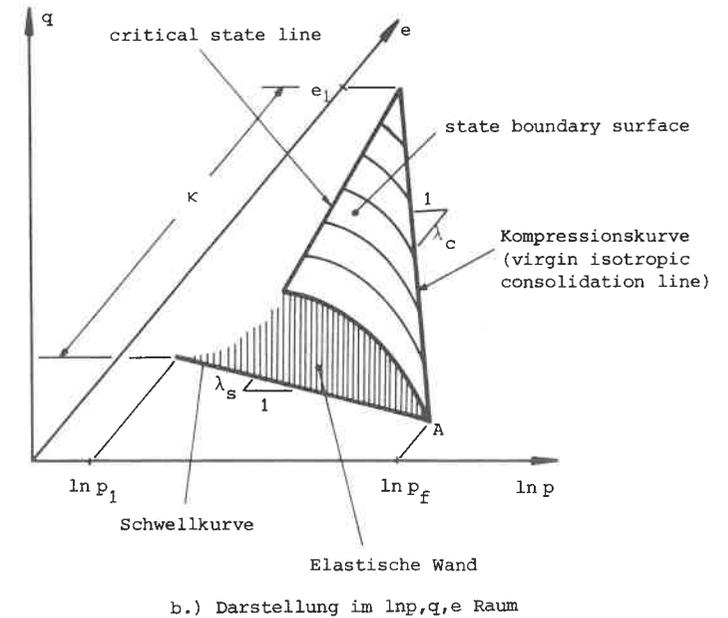
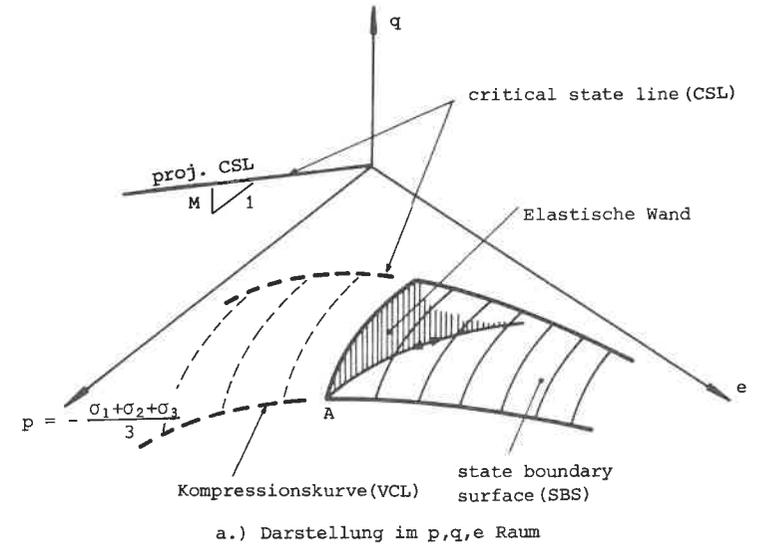


Bild 2.8: Die Cam-Clay Hypothese



2. Der überkritische Bereich (supercritical region), der auch als trockener Bereich bezeichnet wird. Die überkritische Fließkurve trennt ihn vom elastischen Bereich. Der Bereich wird als trocken bezeichnet, weil plastisches Fließen in diesem Bereich mit Volumenvergrößerung (Volumenauflockerung) verbunden ist. Infolge der Volumenvergrößerung kann der Boden noch mehr Wasser aufnehmen.

Für normalkonsolidierte Böden ist im allgemeinen die unterkritische Fließkurve maßgebend, für stark überkonsolidierte die überkritische.

2.2.2 Von der State-Boundary-Surface (SBS) zur Fließfläche im Hauptspannungsraum und zum Ver(Ent)festigungsgesetz

Im folgenden wird aus dem Cam-Clay Konzept eine Fließkurve und ein Verfestigungsgesetz abgeleitet und somit gezeigt, daß das "critical state concept" als eine spezielle Form der Plastizitätstheorie interpretiert werden kann. Aus der Terzaghi Gleichung (2.37) mit  $p = p_f$

$$\frac{p_f}{p_1} = \exp\left(\frac{e_1 - e}{\lambda_c}\right)$$

und der Gleichung für die SBS (2.39) folgt:

$$\frac{e_1 - e}{\lambda_c} = \ln\left[\frac{\frac{p}{p_1}}{\left(\frac{M^2}{M^2 + \eta^2}\right)(1 - \lambda_s/\lambda_c)}\right] = \ln\left[\frac{\frac{p}{p_1} \left(\frac{M^2}{M^2 + \eta^2}\right)^{\lambda_s/\lambda_c}}{\frac{M^2}{M^2 + \eta^2}}\right] \quad (2.42)$$

oder

$$e_1 - e = \lambda_c \cdot \ln \frac{p}{p_1} - \lambda_c \cdot \ln \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} + \lambda_s \cdot \ln \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (2.43)$$

Die bleibende oder "plastische" Änderung der Porenzahl wird mit  $\kappa$  bezeichnet. Aus Bild 2.8 b bzw. Gl. 2.40 ergibt sich:

$$\kappa = e_1 - e^p = e_1 - e - \lambda_s \cdot \ln \frac{p}{p_1} \quad (2.44)$$

$$e_1 - e = \kappa + \lambda_s \cdot \ln \frac{p}{p_1} \quad (2.45)$$

Aus (2.43), (2.44) und (2.45) folgt die Gleichung der Fließkurve:

$$(\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln \frac{p}{p_1} - (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} = \kappa$$

$$\frac{\frac{p}{p_1}}{\frac{M^2}{M^2 + \eta^2}} = \exp \frac{\kappa}{\lambda_c - \lambda_s} \quad (2.46)$$

Daraus folgt für den Punkt A (Bild 2.8 b) bei dem  $p = p_f$  und  $\eta = 0$ :

$$\frac{p_f}{p_1} = \exp\left[\frac{e_1 - e}{\lambda_c}\right] = \exp\left[\frac{\kappa}{(\lambda_c - \lambda_s)}\right] \quad (2.47)$$

Somit wird deutlich, daß die Fließkurve in der p-q-Ebene eine Ellipse ist, denn aus den Gleichungen (2.46) und (2.47) folgt:

$$\frac{p}{p_1 M^2} = \frac{p_f}{p_1 (M^2 + q^2/p^2)} \rightarrow p^2 + \frac{q^2}{M^2} = p_f \cdot p \quad (2.47a)$$

oder

$$\frac{(p - p_f/2)^2}{(p_f/2)^2} + \frac{q^2}{(M \cdot p_f/2)^2} = 1 \quad (2.48)$$

Die Halbachsen der Ellipse (Bilder 2.9 u. 2.10) sind  $\frac{p_f}{2}$  und  $M \cdot \frac{p_f}{2}$ , der Abstand vom Koordinatenursprung  $\frac{p_f}{2}$ . Das Verhältnis  $c_o = \frac{OM}{OA} = 0.5$  ist also von den Materialparametern unabhängig.

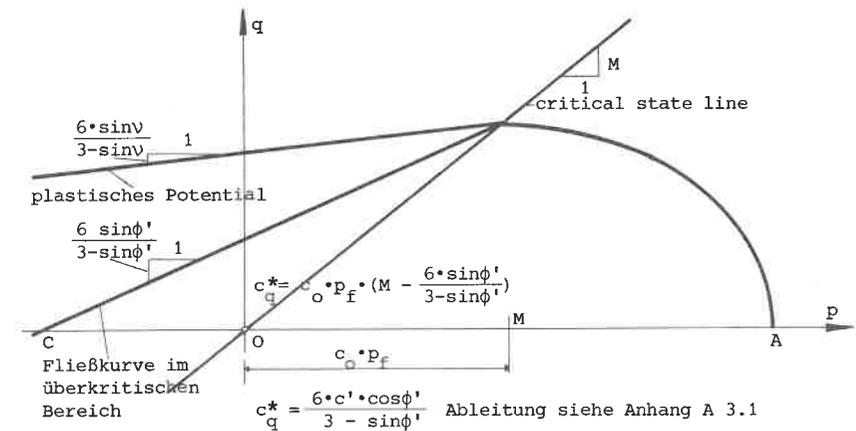


Bild 2.10: Fließkurve in der hydrostatischen Ebene des triaxialen Kompressionsversuchs (p-q Ebene;  $\sigma_2 = \sigma_3$ )

Zwischen Volumenänderung und Porenzahl  $e$  gilt der Zusammenhang:

$$\frac{-\Delta V}{V} = -\Delta \varepsilon_v = \frac{e_0 - e}{1 + e} \approx \frac{\Delta e}{1 + e_0} \quad (2.49)$$

wenn die Porenzahl des Ausgangszustandes  $e_0$  ist.

Zu Beginn der Belastung ist  $\kappa$  durch die Porenzahl  $e_0$  festgelegt:

$$\kappa_0 = e_1 - e_0 = (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln(p_0/p_1) \quad (2.50)$$

Bei plastischer Belastung gilt dann das Verfestigungsgesetz

$$\kappa = \kappa_0 + \int_0^t \frac{\partial(-e^p)}{\partial t} \cdot dt = \kappa_0 + e_0 - e_t^p = e_1 - e_t^p \quad (2.51)$$

wobei  $e_t^p$  die "bleibende" Porenzahl zum Zeitpunkt  $t$  angibt.

Mit Gleichung (2.51) ist also ein isotropes Dehnungsverfestigungsgesetz gegeben.

Man sieht, daß die State Boundary Surface (Gl. 2.39) durch eine Fließkurve (Gl. 2.46 oder Gl. 2.48) und ein Verfestigungsgesetz äquivalent beschrieben werden kann. (Gleichung (2.46) ist die Form der Fließkurve wie sie bei Zienkiewicz/Naylor [84] angegeben ist).

### 2.2.3 Die Bestimmung der Hooke'schen Parameter bei Tonen

Wenn, wie in diesem Fall, sich die elastischen Parameter auf die effektiven Spannungen (Korn-zu-Korn Spannungen) beziehen, spricht man in der Bodenmechanik häufig von effektiven Hooke'schen Parametern.

In Experimenten wurde festgestellt [18], daß die Querdehnungszahl praktisch vom momentanen Spannungszustand und der Konsolidationsspannung unabhängig ist. In [83] wird eine Querdehnungszahl von 0.12 angegeben und darauf hingewiesen, daß verschiedene Autoren auch bei anderen Tonen eine Querdehnungszahl von etwa 0.15 ermittelt haben.

Diese Werte für die Querdehnungszahl scheinen sehr niedrig zu sein, wenn man sie mit den i.a. verwendeten Werten vergleicht. Z. B. wird im Grundbautaschenbuch ([35], S. 19) für Sand  $\mu \approx 0.30$  und für bindige Böden  $\mu \approx 0.40$  angegeben. Diese Diskrepanz ergibt sich daraus, daß in [83] unterschieden wurde zwischen elastischen und plastischen Verzerrungen, während bei den Messungen und Überlegungen,

die zu den hohen Werten von [35] führten, diese Unterscheidung nicht gemacht wurde. D. h. die hohen "Querdehnungszahlen" ergeben sich dann, wenn plastische Verzerrungen als elastische interpretiert werden, wenn man also den Boden als isotropes linear-elastisches Material betrachtet.

Aus der Gleichung der Schwellkurve (2.40) kann der Kompressionsmodul bestimmt werden:

$$e = e_1 - (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln(p_f/p_1) - \lambda_s \cdot \ln(p/p_1) \quad (2.52)$$

Ableitung nach  $p$   $\frac{\partial e}{\partial p} = -\frac{\lambda_s}{p}$

Aus der Definition des Kompressionsmoduls und Gleichung (2.49) ergibt sich:

$$\kappa = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \mu)} = -\frac{dp}{dc^e} = \frac{-dp(1 + e)}{de^e} = \frac{p(1 + e)}{\lambda_s}$$

Bei einer Konsolidationsspannung  $p_f$  und der Ausgangsporenzahl  $e_0 = e_f$  ist der Elastizitätsmodul durch den Schwellwert  $\lambda_s$  definiert:

$$E = \frac{3 \cdot p_f \cdot (1 + e_0) \cdot (1 - 2 \mu)}{\lambda_s} \quad (2.53)$$

Da mit  $E$  und  $\mu$  die Beziehungen zwischen den effektiven Spannungen und den elastischen Verzerrungen angegeben werden, wird in der Literatur in Anlehnung an die bei den Spannungen übliche Schreibweise häufig  $E'$  und  $\mu'$  geschrieben.

### 2.2.4 Das Cam-Clay-Konzept und ein normalkonsolidierter Ton aus dem süddeutschen Raum

Bei der Untersuchung eines normalverdichteten Tones aus dem Bodenseeraum, der im folgenden als Konstanzer Seeton bezeichnet wird, wurde in [77] festgestellt, daß mit dem Modified Cam-Clay-Modell das Verhalten dieses Tones nur grundsätzlich beschrieben werden kann, weil quantitativ die Hypothese in der hydrostatischen Spannungsebene das Verhalten des Konstanzer Seetons nicht zutreffend wiedergibt (s. Bild 2.11). Für die State Boundary Surface (bei Modified Cam-Clay definiert durch Gleichung 2.39) wird in [77] (S.59) von Thamm vorgeschlagen:

$$\frac{\tau_{oc}^2}{\sigma_{oc}^2} = \frac{M \cdot k_m^2}{1 - k_m^2} \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_{oc}^2}{\sigma_{oc}^2} \right] \quad \text{wobei } \sigma_{oc} \text{ die Oktaedernormalspannung ist, bei der der Boden konsolidiert wurde.}$$

Die Gleichung von Thamm lautet in den Bezeichnungen von Roscoe/Burland:

$$\frac{q_f^2}{p_f^2} = \frac{(M \cdot k_m)^2}{1 - k_m^2} \cdot \left( 1 - \frac{p_f^2}{p_f^2} \right)$$

Diese Funktion ergibt in der p-q-Ebene (e = const) eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Zur Anpassung an die Versuchsergebnisse wird in [77] der Parameter  $k_m$  eingeführt.  $k_m$  ist nur für den Sonderfall  $\lambda_s = 0$  identisch mit dem Parameter  $c_o$ . Denn  $k_m$  definiert das Verhältnis hydrostatische Spannung beim Erreichen der Critical-State-Line zu Konsolidationsspannung für die State-Boundary-Surface, also in einem p-q-e Raum für e = const.  $c_o$  definiert zwar dasselbe Verhältnis, jedoch für die Fließkurve, also für  $e^p = \text{const.}$

Die State Boundary Surface wurde von Thamm aufgrund der vor dem Erreichen der Critical State Line (CSL) gemessenen Spannungszustände festgelegt, während sich für die Festlegung der Fließregel im Bereich der CSL aus den Messungen keine Hinweise ergeben. Die Arbeit von Thamm liefert also keine Argumente für das Aufgeben der wichtigen Eigenschaft des Cam-Clay-Modells - volumenkonstantes Fließen beim Erreichen der CSL. Deshalb wird in dieser Arbeit ein Modell entwickelt, das diese Eigenschaft besitzt, "Modified-Cam-Clay" also als Sonderfall enthält und das in [77] gemessene Verhalten des Konstanzer Seetons zutreffend beschreibt.

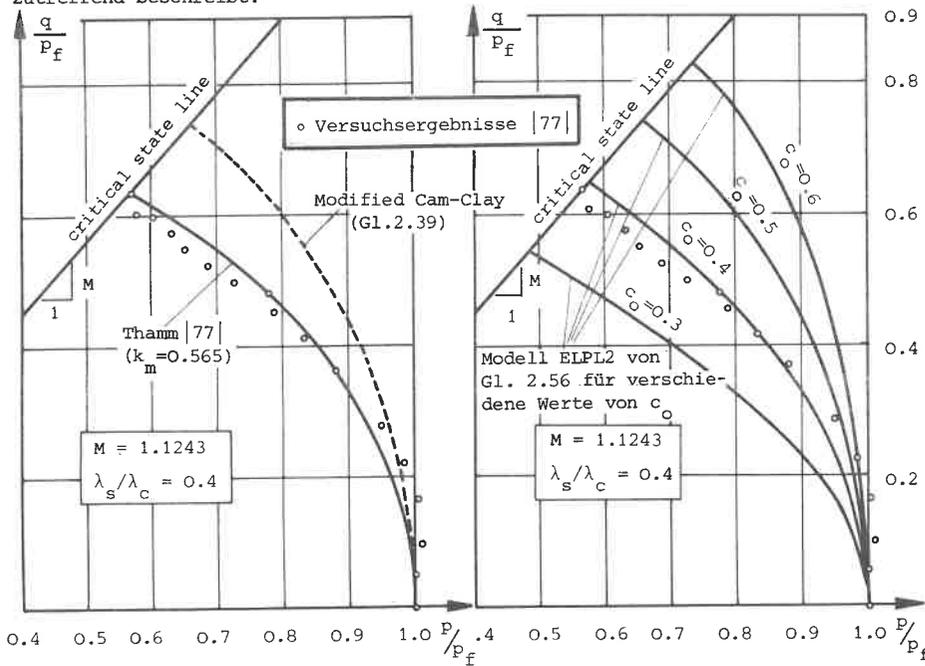


Bild 2.11a: Vergleich von Versuchsergebnissen mit dem Modified Cam-Clay Modell

Bild 2.11b: Vergleich von Versuchsergebnissen mit dem Modell ELPL 2

2.2.5 Die unterkritische Fließkurve des erweiterten Cam-Clay-Modells (ELPL 2)

Bei der Erweiterung des Modified-Cam-Clay Konzepts wird durch Aufhebung der Festsetzung  $c_o = 0.5$  die Fließkurve modifiziert. Aus der geänderten Fließkurve (Gl. 2.54 und Gl. 2.55) ergibt sich dann auch eine andere State-Boundary-Surface (Gl. 2.56 und Gl. 2.57). Das Modified-Cam-Clay Modell ist also als Sonderfall in dem neuen Modell enthalten. Das Verfestigungsgesetz (Gl. 2.52) des Mod.-Cam-Clay Konzepts wird unverändert übernommen.

Dann lautet die Gleichung der Fließkurve (Abb. 2.10) jetzt anstelle von (2.48):

$$\left( \frac{p - c_o \cdot p_f}{(1 - c_o) \cdot p_f} \right)^2 + \left( \frac{q}{M \cdot c_o \cdot p_f} \right)^2 = 1 \quad (2.54)$$

Daraus folgt:

$$p^2 - 2p c_o p_f + c_o^2 p_f^2 + \frac{q^2}{M^2} \cdot \frac{(1 - c_o)^2}{c_o^2} = p_f^2 - 2c_o p_f^2 + c_o^2 p_f^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{p}{M^2} \left[ M^2 + \eta^2 \cdot \left( \frac{1 - c_o}{c_o} \right)^2 \right] = p_f \cdot \left[ 2 c_o + p_f \left( \frac{1 - 2 c_o}{p} \right) \right]$$

Da das Verfestigungsgesetz von Modified Cam-Clay weiterhin gilt, folgt:

$$\frac{p_f}{p_1} = \exp\left(-\frac{e_1 - e}{\lambda_c}\right) = \exp\left(\frac{\kappa}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln(p/p_1) - (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln \frac{M^2}{M^2 + \eta^2 \left( \frac{1 - c_o}{c_o} \right)^2} = \kappa + (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln \left[ 2c_o + \frac{p_1 (1 - 2c_o)}{p} \exp\left(\frac{\kappa}{\lambda_c - \lambda_s}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Auf der linken Seite ist also ein multiplikativer Faktor A dazugekommen, der bei  $c_o = 0.5$  Eins ist, auf der rechten Seite ein additives Glied B, das bei  $c_o = 0.5$  Null wird, da in diesem Fall  $B_1 = 1$ .

Da  $\kappa = e_1 - e - \lambda_s \cdot \ln(p/p_1)$  ist, folgt aus Gleichung 2.55:

$$(\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln(p/p_1) - (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln \left( \frac{M^2}{M^2 + A \eta^2} \right) = e_1 - e - \lambda_s \cdot \ln(p/p_1) + (\lambda_c - \lambda_s) \cdot \ln B_1$$

und weiter  $\ln(p/p_1) - \frac{\lambda_c - \lambda_s}{\lambda_c} \ln\left(\frac{M^2}{M^2 + A\eta^2}\right) = \frac{e_1 - e}{\lambda_c} + \frac{\lambda_c - \lambda_s}{\lambda_c} \ln B_1$

Mit Gl. 2.47 folgt also:  $\frac{p}{p_1} = \frac{p_f}{p_1} \cdot B_1 \cdot \left(\frac{M^2}{M^2 + A\eta^2}\right)^{(\lambda_c - \lambda_s)/\lambda_c}$

Zum Vergleich mit der entsprechenden Gleichung von Roscoe/Burland (Gl. 2.39) wird geschrieben:

$$\frac{p}{p_f} = B_1 \left(\frac{M^2}{M^2 + A\eta^2}\right)^{1 - \lambda_s/\lambda_c}$$

$$\frac{p}{p_f} = \left\{ \left[ 2c_o + \frac{p_f}{p} (1 - 2c_o) \right] \frac{M^2}{M^2 + \left(\frac{1-c_o}{c_o}\right)^2 \cdot \eta^2} \right\}^{1 - \lambda_s/\lambda_c} \quad (2.56)$$

Während in Gleichung 2.39 p explizit eine Funktion von η, p<sub>f</sub> und den Materialparametern ist, geht diese Einfachheit bei c<sub>o</sub> ≠ 0.5 verloren. Zur graphischen Darstellung der State-Boundary-Surface ist es von Vorteil, Gleichung 2.56 nach q aufzulösen.

$$\left(\frac{p}{p_f}\right)^{\lambda_c/(\lambda_c - \lambda_s)} = \frac{B_1 M^2}{M^2 + \frac{q^2}{p^2} \cdot A}$$

$$q = \frac{p \cdot M}{\sqrt{A}} \sqrt{\left(\frac{p_f}{p}\right)^{\lambda_c/(\lambda_c - \lambda_s)} \cdot B_1 - 1}$$

$$q = \frac{c_o \cdot M \cdot p}{1 - c_o} \sqrt{\left(2c_o + \frac{p_f}{p} (1 - 2c_o)\right) \cdot \left(\frac{p_f}{p}\right)^{\lambda_c - \lambda_s} - 1} \quad (2.57)$$

Während Bild 2.11a die Abweichung der Meßergebnisse von [77] vom Modified Cam-Clay-Modell zeigt, sieht man in Bild 2.11b, daß durch die Aufhebung der Festsetzung c<sub>o</sub> = 0.5 eine gute Anpassung des erweiterten Cam-Clay-Modells an die Meßergebnisse möglich ist, nämlich im Falle des in [77] untersuchten Seetons durch c<sub>o</sub> = 0.4.

Mit den Gleichungen (2.52), (2.53), (2.54) und den Stoffkonstanten μ, c<sub>o</sub>, M, λ<sub>c</sub> und λ<sub>s</sub> ist die unterkritische Fließkurve eindeutig festgelegt.

Fließregel für den unterkritischen Bereich:

Bei den englischen Versuchen mit weichen bindigen Böden wurde für den Bereich der Kappe die assoziierte Fließregel bestätigt. Sie ist daher Bestandteil des Cam-Clay-Konzepts und wird auch für das erweiterte Cam-Clay-Modell übernommen.

2.2.6 Fließbedingung, Fließregel und Ver(Ent)festigungsgesetz für den überkritischen Bereich

In der hydrostatischen Ebene des Spannungsraums soll wie in [64] das Coulomb'sche Fließkriterium gelten. Denn in dem Spannungsbereich, der bei statischen Problemen normalerweise in Frage kommt, hat sich die Gerade als Umhüllende der Pyramide (Bild 1.5 a) durchweg bestätigt. Während das Coulomb'sche Kriterium in der Deviatorebene ein Sechseck ergibt (s. Bild 2.14), soll in dieser Arbeit diese Form in der Deviatorebene modifiziert werden. Denn Versuche (s. Abschnitt 4.2) haben bestätigt, daß sowohl im triaxialen Kompressions- als auch im Extensionsversuch im Rahmen der Meßgenauigkeit die Mantellinie des Kegels eine Gerade ist, die Form des deviatorischen Schnitts jedoch von der Coulomb'schen Sechseckform abweicht. Da durch den Schnittpunkt von Critical State Line und unterkritischer Fließkurve ein Punkt der Geraden bestimmt ist, bleibt als freie Variable noch die Neigung. Sie ergibt sich aus dem Scherwinkel φ', im p-q-Diagramm zu 6·sinφ'/(3-sinφ'), siehe Anhang A 3.1.

Der Abschnitt auf der q-Achse (s. Bild 2.10), für den der Zusammenhang gilt,

$$c_q^* = \left(M - \frac{6 \cdot \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}\right) \cdot c_o \cdot p_f \quad (2.58)$$

ergibt sich aus der Lage der Kappe und der Neigung der Geraden. D. h. die Kohäsion ergibt sich als Funktion von Reibungswinkel, Konsolidationsspannung und den Parametern des erweiterten Cam-Clay Modells.

Da zwischen c bzw. c' und c<sub>q</sub><sup>\*</sup> die in A 3.1 abgeleitete Abhängigkeit

$$c' = \frac{3 - \sin \phi'}{6 \cdot \cos \phi'} \cdot c_q^* \quad (2.59)$$

gilt, folgt aus Gleichung 2.58:

$$c' = \frac{3 - \sin \phi'}{6 \cdot \cos \phi'} \cdot \left(M - \frac{6 \cdot \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}\right) \cdot c_o \cdot \exp\left(\frac{K}{\lambda_c - \lambda_s}\right) \quad (2.59)$$

Eine ausführliche experimentelle und theoretische Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Scherwiderstand, Deformationsverhalten, Konsolidationsspannung und der Zeit findet sich bei Leinenkugel [47]. Da aus Messungen bekannt ist, daß die plastischen Volumenvergrößerungen beim Fließen im überkritischen Bereich nicht so groß

sind, wie sie sich auf Grund der Normalitätsbedingung ergeben, wird im überkritischen Bereich ein plastisches Potential angenommen, das nicht mit der Fließfläche identisch ist. Da für das plastische Potential eine andere Funktion als für die Fließfläche gelten soll (s. Bild 2.12), muß der Parameter  $\phi'$  der Fließfläche durch den Parameter  $v$  ersetzt werden. Nach Festlegung der Fließkurve ist das plastische Potential also durch den Dilatanzwinkel eindeutig festgelegt. Der Dilatanzwinkel wird so gewählt, daß

- $v = 0$  volumenkonstantem Fließen entspricht und
- $v = \phi'$  einer assoziierten Fließregel gleichkommt.

Wenn die Funktion des plastischen Potentials aus Ellipse und Gerade zusammengesetzt ist, so ergeben sich bei den Punkten B und C Unstetigkeitsstellen. D.h. an diesen Punkten würden sich die Richtungen der Verzerrungsincremente unstetig ändern. Es gibt nun keine Meßergebnisse, die diese Unstetigkeit belegen oder widerlegen. Meßergebnisse für die Deviatorebene [29] zeigen, daß auch bei einer nichtstetigen Änderung der Fließfläche sich die Richtung der Verzerrungsincremente stetig ändert. Es liegt deshalb nahe, für die Berechnung eine stetige Richtungsänderung anzunehmen, zumal eine Unstetigkeit bei iterativen Berechnungsverfahren zu Konvergenzschwierigkeiten führen kann. Als Übergangskurven für das plastische Potential werden Kreisbögen eingeführt, so daß die Richtungsänderung der Verzerrungsincremente immer stetig ist (s. Bild 2.12).

Da im überkritischen Bereich dasselbe Ver(Ent)festigungsgesetz gelten soll wie im unterkritischen Bereich und sich bei positivem Dilatanzwinkel Volumenvergrößerung ergibt, bedeuten im überkritischen Bereich positive Dilatanzwinkel Entfestigung, und negative Dilatanzwinkel Verfestigung. Während Fließen auf der Kappe eine Verschiebung der Fließkurve in p-Richtung und damit eine Vergrößerung des elastischen Bereichs bewirkt, ergibt Fließen im überkritischen Bereich, bei positivem Dilatanzwinkel, eine Verkleinerung des elastischen Bereichs. Aus dem in Abb. 2.12 dargestellten Zusammenhang sieht man, daß dies einem Abfall der Kohäsion entspricht.

Da in Bild 2.12 auch die Schnittkurve unterhalb der hydrostatischen Achse dargestellt ist, wird bereits der erst in Gleichung 2.61 definierte Parameter  $c_r$  verwendet, der die Lage des Punktes B festlegt.

Unabhängig vom Cam-Clay-Konzept schlagen Nelson/Baron/Sandler in [58] ein Kappenmodell vor, das die Richtigkeit des hier entwickelten Konzepts bestätigt. Es soll deshalb kurz dargestellt und mit dem erweiterten Cam-Clay-Modell verglichen wer-

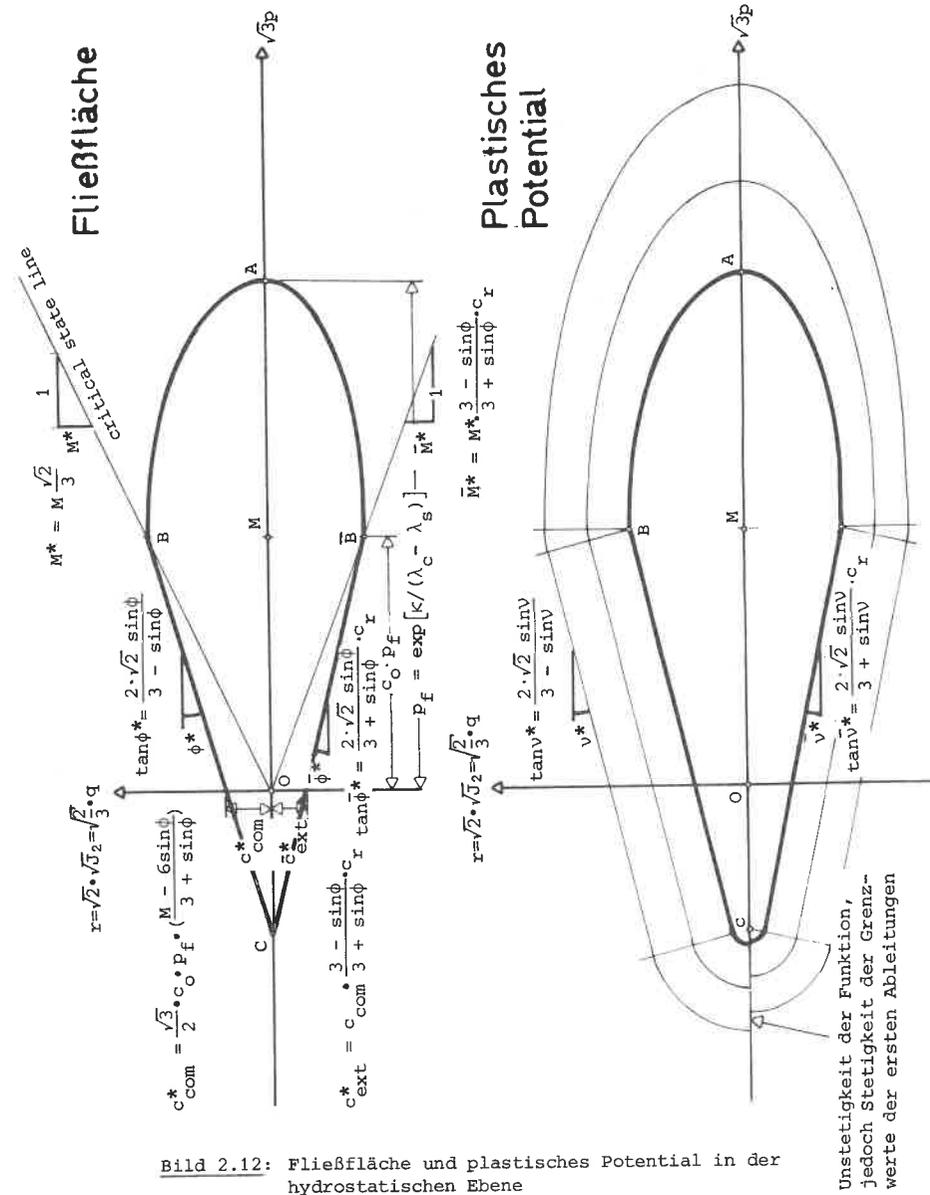


Bild 2.12: Fließfläche und plastisches Potential in der hydrostatischen Ebene

den (s. Bild 2.13). In dem Modell von [58] sind L und X Funktionen von  $\epsilon^P$  und A, B, C und R die Stoffkonstanten. Das Modell hat zwar den Vorteil, daß die Mantellinie des Kegels in der hydrostatischen Ebene auch gekrümmt sein kann, diesem Vorteil stehen jedoch verschiedene Nachteile gegenüber:

- Die Fließfläche in [58] ist nur eine Funktion von  $I_1$  und  $J_2$ , sie ist also rotationssymmetrisch bezüglich der Raumdiagonalen des Spannungsraums, was für den größten Teil der Böden nicht zutrifft.
- Die Stoffkonstanten sind nur schwer zu bestimmen, da sie zum Teil in Form impliziter transzendenter Gleichungen angegeben sind.

Da im unterkritischen Bereich, der für normalkonsolidierte Böden entscheidend ist, die Fließkurve (Ellipse) in Lage und Form mit dem erweiterten Cam-Clay-Modell übereinstimmt, bestätigt der Vorschlag von Nelson/Baron/Sandler eher die Cam-Clay-Hypothese, als daß er eine Neuentwicklung darstellt.

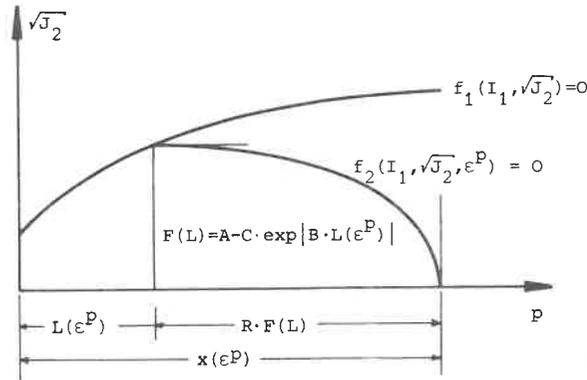
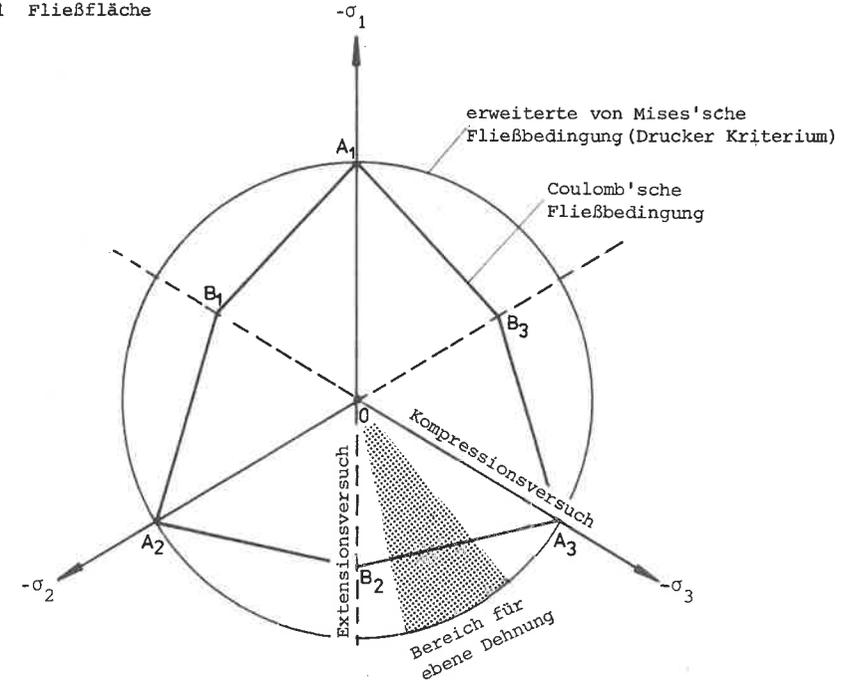


Bild 2.13: Das Stoffgesetz von Nelson et. al. [58]

### 2.2.7 Fließfläche und plastisches Potential in der Deviatorenebene (Räumliche Verallgemeinerung)

Während Roscoe/Burland [64] für den unter- und überkritischen Bereich verschiedene Fließkriterien vorschlagen - im unterkritischen einen Kreis, im überkritischen das Coulomb'sche Sechseck -, wird in dieser Arbeit für den unter- und überkritischen Bereich eine Funktion verwendet mit der eine optimale Approximation der Meßergebnisse möglich ist.

#### 2.2.7.1 Fließfläche



Ausgangszustand:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$   
 Kompression: Stirndruck wird erhöht ( $\sigma_1 = \sigma_2$ )  
 Extension: Stirndruck wird verringert ( $\sigma_2 = \sigma_3$ )

Bild 2.14: Die Spannungswege des Triaxialversuchs

Im Standardversuch der Bodenmechanik, dem triaxialen Kompressionsversuch (Erhöhung des Stirndrucks bei konstantem Seitendruck bis zum Bruch), durchfährt man immer den Spannungsweg O-A<sub>3</sub> von Bild 2.14. Für die Fließkurve in der deviatorischen Ebene werden dann üblicherweise alternativ folgende beide Annahmen getroffen:

1. Fließkriterium ist die maximale Oktaederschubspannung oder die 2. Invariante des deviatorischen Spannungstensors. Dann ergibt sich ein Kreis als Fließ-

kurve in der Deviatorebene ( $\overline{OA}_1 = \overline{OB}_1$ ). Ist außerdem die maximale Oktaederschubspannung proportional dem hydrostatischen Druck (p), erhält man das Drucker'sche Kriterium.

2. Maßgebendes Fließkriterium sei die größte Hauptschubspannung. Dann kommt man zu dem Coulomb'schen Fließkriterium, bei dem die Beziehung gilt:

$$\overline{OB}_1 = \frac{3 - \sin\phi'}{3 + \sin\phi'} \cdot OA_1 \quad (2.60)$$

Diese Gleichung folgt aus den Formeln von A 3.1.

Außer der Drucker'schen und der Coulomb'schen Fließbedingung gibt es verschiedene neuere Vorschläge, die Fließkurve in der Deviatorebene zu beschreiben, die in Bild 2.16 zusammengestellt sind.

Wenn man die Annahmen (1) und (2) mit Versuchsergebnissen vergleicht (Bild 2.17), sieht man, daß sich zwischen dem Coulomb'schen Kriterium und den Meßergebnissen eine relativ gute Übereinstimmung ergibt (relativ in Bezug auf Fließflächen mit Kreiskegelform). Allerdings zeigt sich, daß im Bereich des ebenen Falls und fast immer im Bereich von B (Extensionsversuch) die Versuchspunkte außerhalb des Coulomb'schen Sechsecks liegen. Dieses Phänomen entspricht der in der Bodenmechanik seit langem bekannten Tatsache (s. Bild 2.15 aus [71]), daß sich in ebenen Versuchen höhere Scherwinkel ergeben als in triaxialen Kompressionsversuchen.

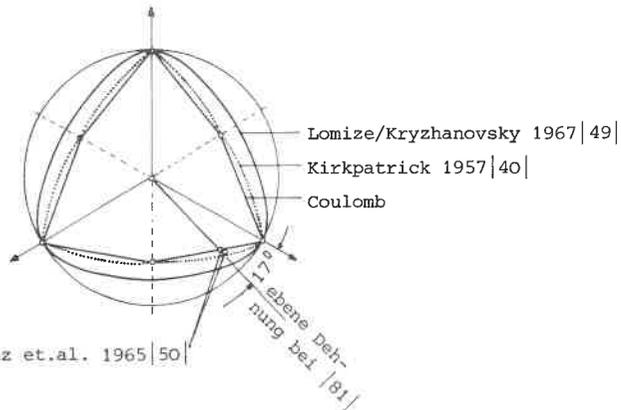
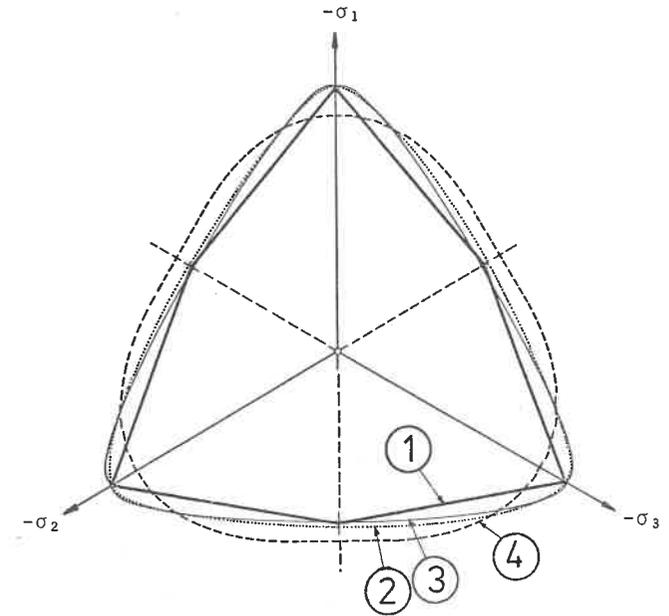


Bild 2.15: Abweichung von Meßergebnissen vom Coulomb'schen Kriterium nach Smolczyk [71]

Allerdings stellt der Kreis mit dem Radius  $\overline{OA}_1$  keine brauchbare Näherung dar, denn er entspricht weit weniger den Ergebnissen der Experimente als das Sechseck von Coulomb.



- ① Mohr Coulomb für  $\phi = 39^\circ$
- ② Modell ELPL für  $\phi = 39^\circ$  und  $c_r = 1.0$
- ③ Stutz [75]:  $f = \left(1 - B \cdot \frac{III_s}{II_s^{3/2}}\right)^{2 \cdot m} - A^2 \cdot \frac{I_\sigma^2}{II_s} = 0$  für  $A = -0.29$ ,  $B = 1.95$  und  $m = 0.2084$
- ④ Gudehus [30]:  $f = C_1 \cdot \frac{II_s}{I_\sigma} + C_2 \cdot \frac{III_s}{II_s^{3/2}} - 1 = 0$  für  $C_1 = 0.10$  und  $C_2 = 0.55$

Die Kurve von Lade [42] liegt zwischen den Kurven ② und ③.

Die Werte für die Parameter A, B, m,  $C_1$  und  $C_2$  sind der Veröffentlichung von Meißner/Wibel [54] entnommen. Die verwendeten Invarianten sind folgendermaßen definiert:

$$I_\sigma = \sigma_{kk} \quad II_s = s_{ij} \cdot s_{ji} \quad III_s = s_{ij} \cdot s_{jk} \cdot s_{kl}$$

Bild 2.16: Verschiedene neuere Vorschläge für die Fließbedingung in der Deviatorebene

Bild 2.18 zeigt, daß kein Kreis gefunden werden kann, der eine hinreichend kleine Abweichung von den Versuchsergebnissen hat. D. h. Fließflächen, die bezüglich der Raumdiagonale des Spannungsraums rotationssymmetrisch sind, ergeben keine zutreffende Fließbedingung für beliebige Spannungswege.

Humpheson/Naylor [34] (s. Bild 2.19) haben untersucht, wie die für den Boden ange-setzte Fließbedingung die Traglast eines Kreis- bzw. Streifenfundaments beein-flußt. Dabei hat sich gezeigt, daß sich mit Fließflächen, deren Schnitt mit der Deviatorebene ein Kreis ist, nicht für alle Randbedingungen eine gute Überein-stimmung mit der auf der Basis des Coulomb'schen Kriteriums ermittelten Traglast ergibt.

Als Ausweg, um die für die Rechnung vorteilhafte rotationssymmetrische Fließ-fläche beibehalten zu können, ergibt sich folgende Möglichkeit: man wählt den Radius so, daß die Fließbedingung des Kreiskegels mit der Fließbedingung der je-weils vorherrschenden Spannungswege übereinstimmt. Die Möglichkeiten dieser Me-thode werden von Drucker/Prager [21] aufgezeigt.

Da diese Methode nur für den ebenen Fall Vereinfachungen mit sich bringt und für die Implementierung in ein FE-Programm die Rotationssymmetrie der Fließfläche zwar wünschenswert, jedoch nicht unabdingbar notwendig ist, soll eine allgemei-nere Fließfläche verwendet werden, die dann für beliebige Spannungszustände, also für ebene, axialsymmetrische und allgemein dreidimensionale Probleme gilt.

Man sieht aus den Bildern 2.16 und 2.17, daß sich bei den Vorschlägen von Stutz [75] und dem Modell ELPL eine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen ergibt. Für die Fließfläche des Modells ELPL wird in der Deviatorebene, der von Willam/Warnke [81] für Beton entwickelte Vorschlag, für die Anwendung im Grundbau auf-bereitet. Denn dieser Vorschlag basiert auf der einfachen Funktion der Ellipse.

In Bild 2.17 ist der Bereich dargestellt, in dem nach Lee [46] die bisherigen Ver-suchsergebnisse liegen. Während sich die Zusammenstellung von Lee im wesentlichen auf Sand bezieht, wurden von Lade [44] auch entsprechende Versuche mit bindigem Material durchgeführt und dabei eine Abweichung vom Coulomb'schen Kriterium fest-gestellt, die etwa der Abweichung von Kurve nach Gl. 2.62 für  $c_r = 1.0$  (s. Bild 2.17) entspricht. In Bild 2.17 a ist die Darstellungsweise im Span-nungsraum gewählt, in Bild 2.17 b die Darstellung in  $\phi$  und  $b$ . Dabei wurde die Abweichung von der Coulomb'schen Fließfläche des triaxialen Kompressionsversuchs

in einer Erhöhung des Scherwinkels  $\phi$  ausgedrückt. Der Parameter  $b$  ist definiert durch:

$$b = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \text{ wenn Zugspannungen positiv und } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

(Ableitung des Zusammenhangs zwischen dem Hauptspannungsverhältnis  $b$  und dem Winkel  $\theta$  des Hauptspannungsraums siehe A 1.3)

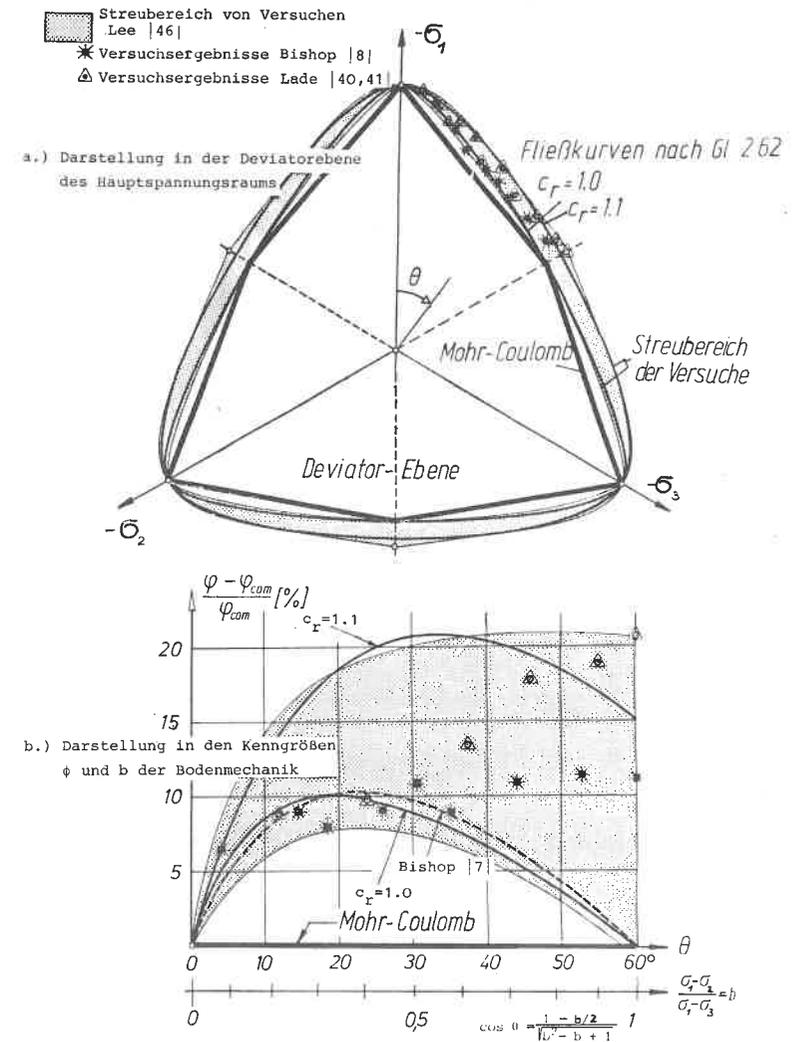


Bild 2.17: Vergleich von Versuchsergebnissen mit hypothetischen Fließflächen in der Deviatorebene

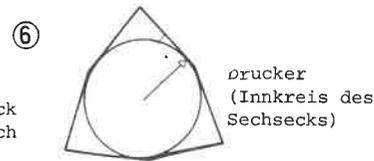
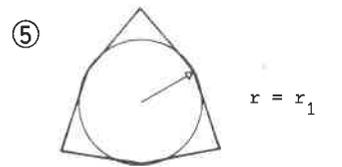
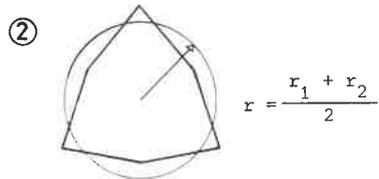
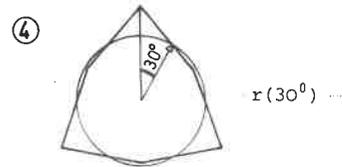
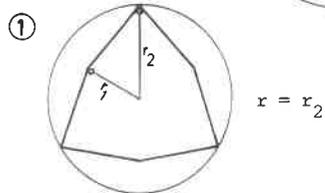
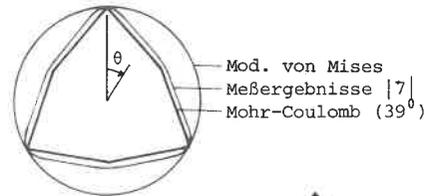
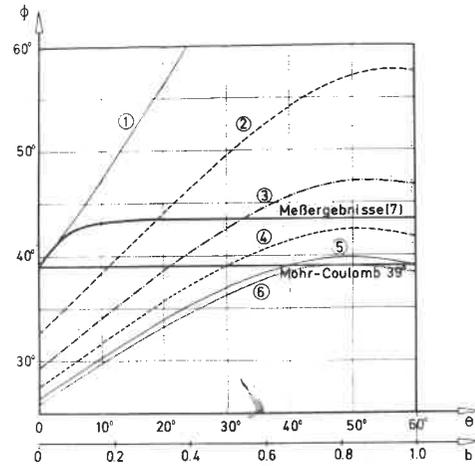
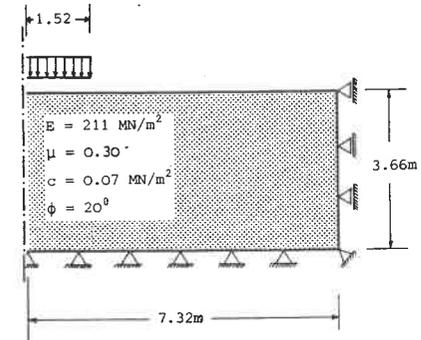
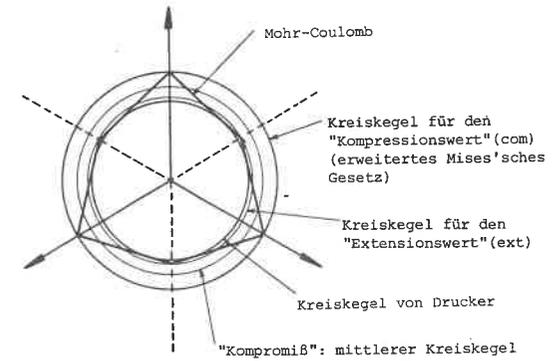


Bild 2.16: Die Abweichung rotationssymmetrischer Fließflächen-Hypothesen von der Realität (für  $\phi = 39^\circ$ )



a) schlaffes Streifen-bzw. Kreisfundament



b) Fließfläche in der Deviatorebene

Fließkriterium	Ebene Dehnung		Axialsymmetrisch	
	Grenzlast $P_f$	$P_f/P_{f\text{Mohr-C.}}$	Grenzlast $P_f$	$P_f/P_{f\text{Mohr-C.}}$
Mohr-Coulomb	1.069 MN/m <sup>2</sup>	1.00	1.490 MN/m <sup>2</sup>	1.00
Kreiskegel(ext)	2.418	2.26	2.039	1.37
Kreiskegel(com)	1.195	1.12	1.153	0.77
Drucker	1.040	0.97	0.998	0.67
"Kompromiß"Kegel	1.631	1.53	1.448	0.97

c) Tabelle für die Grenzlasten

Bild 2.19: Der Einfluß der Fließfläche auf die Grenzlast nach Humpeson/Naylor [35]. (Bezugsgröße: Lastermittlung nach Mohr-Coulomb)

Damit die Form der Fließfläche in der Deviatorebene Versuchsergebnissen angepaßt werden kann, (s. Abb. 2.16 und 2.20) wird ein Parameter  $c_r$  eingeführt. Die Festlegung von  $c_r$  ergibt sich aus der Abweichung vom Coulomb'schen Kriterium an den Punkten  $B_1$  (Bild 2.14).  $c_r$  ist gegeben durch das Verhältnis der Reibungswinkel im Kompressions- und Extensionsversuch.

$$c_r = \frac{\sin\phi_{ext}}{\sin\phi_{com}} \cdot \frac{3 + \sin\phi_{com}}{3 + \sin\phi_{ext}} \quad (2.61)$$

Da nur in seltenen Fällen Extensionsversuche durchgeführt werden, wird man meist  $c_r = 1.0$  festlegen, denn diese Festlegung liegt auf der sicheren Seite (Bild 2.17).

Mit Hilfe dieses Parameters  $c_r$  kann das Materialverhalten gut erfaßt werden. Insbesondere trägt die stetig gekrümmte Form der Fließfläche der Tatsache Rechnung, daß sich in ebenen Scherversuchen ein höherer Reibungswinkel ergibt als in triaxialen Kompressionsversuchen.

Für die Darstellung isotroper Fließflächen ist es vorteilhafter, nicht in den kartesischen Koordinaten des Spannungsraums ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) zu arbeiten, sondern in Zylinderkoordinaten ( $r, z, \theta$ ), die in direkter Beziehung zu den Invarianten des Spannungstensors bzw. -deviators stehen. Der Zusammenhang ist in Bild 2.1 dargestellt.

Die Fließkurve in der Deviatorebene ist eine versetzte Ellipse (Bild 2.20) und ist mit den Bezeichnungen der Bilder 2.1 und 2.20 durch folgende Gleichung definiert:

$$r = r_2 \left[ \frac{2(1 - A^2)\cos\theta' + (2A - 1)\sqrt{4(1 - A^2)\cos^2\theta' + 5A^2 - 4A}}{4(1 - A^2)\cos^2\theta' + (2A - 1)^2} \right] \quad (2.62)$$

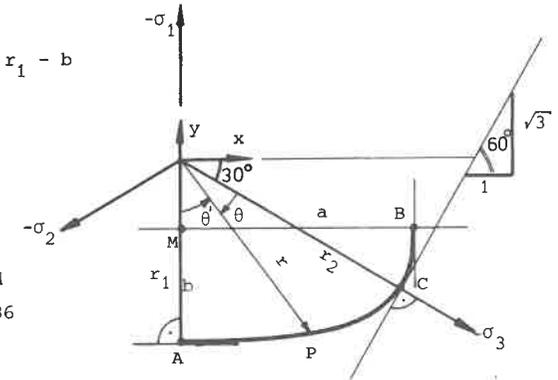
Dabei ist:  $A = \frac{3 - \sin\phi_{com}}{3 + \sin\phi_{com}} c_r = \frac{r_1}{r_2}$  (2.63)

(Ausführliche Ableitung im Anhang A 2.1)

Für die Fließfläche ist das Verhältnis von  $f_{rr} = \frac{r}{r_2}$  maßgebend, da  $r_2$  durch die Fließfläche in der hydrostatischen Ebene des Kompressionsversuchs definiert ist ( $q = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{J_2}$ ).

$$f_{rr} = \frac{2(1 - A^2)\cos\theta' + (2A - 1)\sqrt{4(1 - A^2)\cos^2\theta' + 5A^2 - 4A}}{4(1 - A^2)\cos^2\theta' + (2A - 1)^2} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \overline{OA} & b &= \overline{MA} & \overline{OM} &= r_1 - b \\ r_2 &= \overline{OC} & a &= \overline{MB} \\ f_{rr} &= \frac{r}{r_2} \end{aligned}$$



Ausführliche Darstellung und Ableitung siehe Anhang S. 136

Bild 2.20: Festlegung der Fließkurve in der Deviatorebene in Zylinderkoordinaten

### 2.2.7.2 Plastisches Potential

Bisher wurde in der Bodenmechanik allgemein angenommen, daß die Normalitätsbedingung das plastische Fließen in der Deviatorebene zutreffend beschreibt (z.B. [30, 42]). Experimente schienen diese Annahme zu bestätigen. Die Annahme der deviatorischen Normalitätsbedingung für alle Böden wird jedoch durch Goldscheider [29] in Frage gestellt, der für den von ihm untersuchten Sand zu dem Schluß kommt, daß die Annahme deviatorischer Normalität sehr ungenau ist. Er trifft diese Feststellung allerdings in bezug auf die von ihm gefundene Fließfläche, eine sechseckige Pyramide.

Wenn nun, wie in dem Modell ELPL, die Fließfläche stetig gekrümmt ist, wird auf jeden Fall die Diskrepanz zwischen Fließfläche und plastischem Potential wesentlich kleiner, so daß es auf Grund der Versuchungenauigkeit nicht mehr gerechtfertigt erscheint, unterschiedliche Funktionen für die Fließfläche und das plastische Potential in der Deviatorebene einzuführen. Aus diesem Grund wird bei der Implementierung in das FE-Programm und der Berechnung der Beispiele die deviatorische Normalitätsbedingung vorausgesetzt. Grundsätzlich ist es jedoch mit der Formulierung von ELPL möglich, auch in der deviatorischen Ebene mit nichtassoziierter Fließregel zu rechnen. Dem Parameter  $c_r$  muß dann für das plastische Potential ein anderer Wert zugewiesen werden als für die Fließfläche.

Auch die Versuche von Lade [44] deuten darauf hin, daß  $c_r$  für das plastische Potential etwas größer ist als für die Fließfläche. Der Unterschied ist jedoch so gering, daß er im Rahmen der Meßgenauigkeit liegt und deshalb auch Lade deviatorische Normalität annimmt.

2.2.8 Zusammenstellung von Fließfläche, plastischem Potential und Ver(Ent)festigungsgesetz (siehe Bilder 2.6, 2.12, 2.21)

Nachdem mit der Festlegung der Fließkurven in der hydrostatischen und deviatorischen Ebene die Fließfläche definiert ist, werden die für die Plastizitätstheorie entscheidenden Kriterien zusammengefaßt (Ableitungen siehe Anhang A 2.1).

Im überkritischen Bereich (Kegel):

Fließfläche: Reibungsglied Kohäsionsglied

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot f_{rr} \cdot \left[ \frac{6 \sin \phi_{com}}{3 - \sin \phi_{com}} \cdot p + \left( M - \frac{6 \sin \phi_{com}}{3 - \sin \phi_{com}} \right) \cdot c_o \cdot \exp \frac{K}{\lambda_c - \lambda_s} \right] \quad (2.65)$$

Plastisches Potential:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot f_{rr} \cdot \frac{6 \sin \nu}{3 - \sin \nu} \cdot p \quad (2.66)$$

Im unterkritischen Bereich (Kappe):

Fließfläche und plastisches Potential:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot f_{rr} \cdot \frac{M \cdot c_o}{1 - c_o} \cdot \sqrt{(1 - 2c_o) \cdot \exp \left( \frac{2K}{\lambda_c - \lambda_s} \right) + \left[ 2c_o \cdot \exp \left( \frac{K}{\lambda_c - \lambda_s} \right) - p \right] \cdot p} \quad (2.67)$$

Im unter- und überkritischen Bereich gilt das Ver(Ent)festigungsgesetz

$$\kappa = \kappa_o + e^t - e_o \quad (2.68)$$

Beim Vergleich des hiermit festgelegten Stoffgesetzes mit den Forderungen des Drucker'schen Postulats ergibt sich:

- Im unterkritischen Bereich sind alle Forderungen erfüllt.
- Im überkritischen Bereich (Kegel) ist die Forderung nach Konvexität der Fließfläche immer erfüllt. Die Forderung nach Normalität in der Deviatorenebene immer, in der hydrostatischen Ebene - wegen der Notwendigkeit der Einführung eines Dilatanzwinkels - nur, wenn Dilatanzwinkel und Reibungswinkel gleich sind. Die Forderung nach Verfestigung ist bei Anwendung des Cam-Clay-Modells nur bei einem Dilatanzwinkel ( $\nu \leq 0$ ) erfüllt.

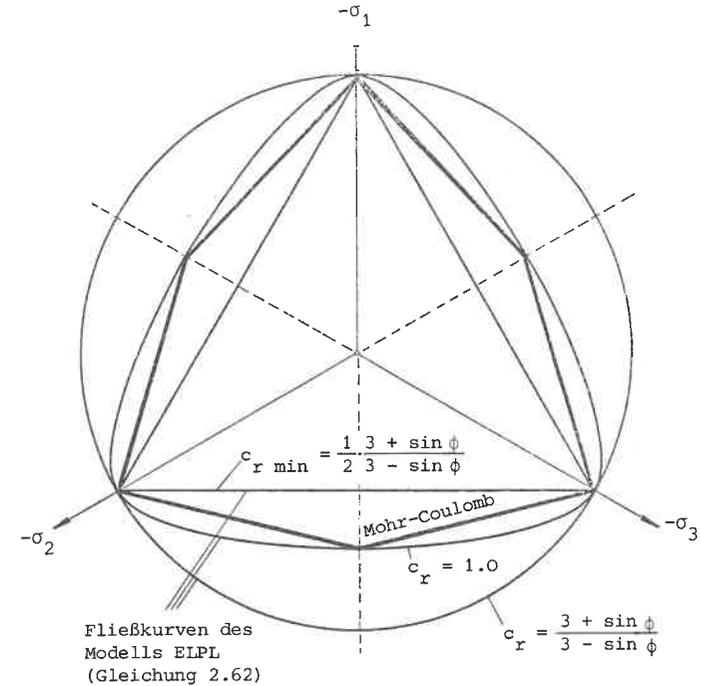


Bild 2.21: Fließkurve des Modells ELPL im Vergleich zu der Fließkurve von Mohr-Coulomb in der Deviatorenebene

2.3 DER EINFLUSS DES DILATANZWINKELS

In dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Modell ist der Dilatanzwinkel zwar als Stoffkonstante vorgesehen, jedoch sind für den Dilatanzwinkel im allgemeinen nur qualitative Angaben möglich: für dicht gelagerte Böden ist er kleiner als der Reibungswinkel und positiv, für locker gelagerte Böden negativ. Deshalb soll kurz der Einfluß des Dilatanzwinkels diskutiert werden.

In [86] wird am Beispiel der Fließbedingung von Coulomb mit assoziierter Fließregel und mit volumenkonstantem Fließen ( $\nu = \phi'$  bzw.  $\nu = 0$ ) gezeigt, daß in Fällen mit wenig äußerem Zwang (Böschung, Streifenfundament) zwar das Last-Verformungsverhalten, nicht aber die Grenzlast durch den Dilatanzwinkel beeinflusst werden. Ein geringer Einfluß des Dilatanzwinkels wird auch in [45] für das Problem der eingespannten Wand festgestellt. Bei Problemen mit "viel äußerem Zwang" (starke

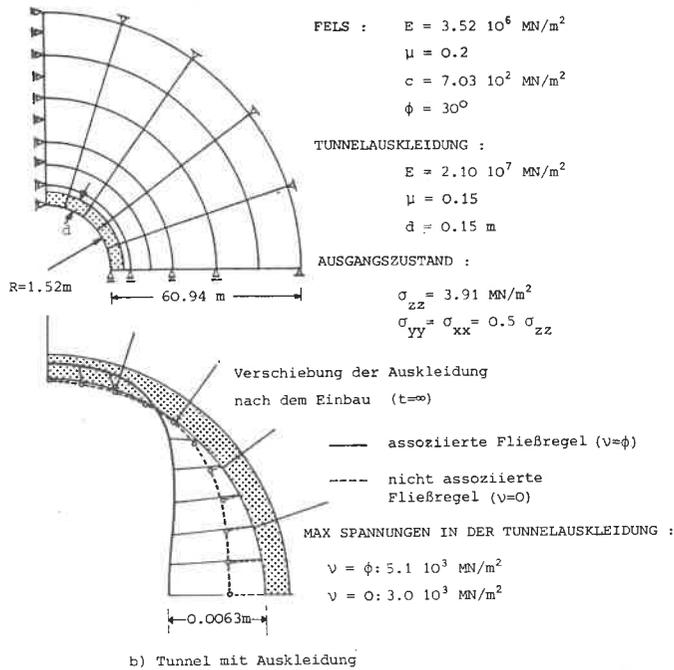
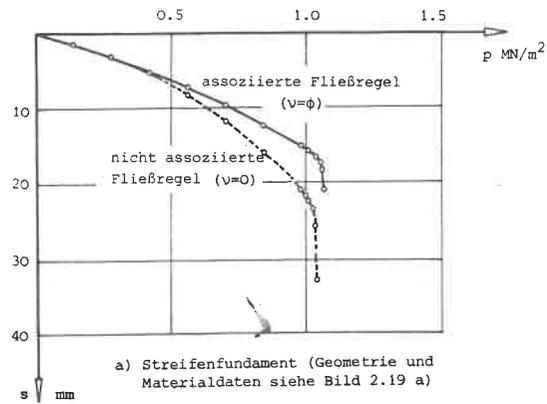


Bild 2.22: Der Einfluß der Fließregel auf das Last-Verformungsverhalten und die Beanspruchung für zwei Beispiele aus dem Grundbau (nach Zienkiewicz et. al. [86])

Einschränkung des Verformungsverhaltens durch kinematische Randbedingungen) wird das Tragverhalten ganz entscheidend durch die Größe des Dilatanzwinkels bestimmt. In [86] wird für verschiedene Probleme der Bodenmechanik (Streifenfundament, Böschung, Tunnel) der Einfluß des Dilatanzwinkels quantitativ bestimmt. Die wesentlichen Erkenntnisse dieser Untersuchung sind in Bild 2.22 zusammengestellt.

Es scheint so, daß für Probleme mit geringem äußerem Zwang die Variation des Dilatanzwinkels bzw. die Variation in der Art der direkten Spannungsumlagerung (Abschnitt 2.1.3) das Ergebnis nur wenig beeinflusst. Das ist auch der Grund, weshalb die Verfahren der Plastizitätstheorie, die eine assoziierte Fließregel zur Voraussetzung haben, meistens brauchbare Ergebnisse liefern. Für viele Probleme wird daher eine grobe Schätzung des Dilatanzwinkels ( $v = \phi'$ ;  $v = \frac{\phi'}{2}$ ;  $v = 0$ ) vollkommen ausreichen. Nur in wenigen Fällen, etwa bei der Berechnung von Verpreßankern, muß man den Dilatanzwinkel genau kennen oder aber seinen Einfluß mit Hilfe einer Parameterstudie untersuchen.

### 3. Formulierung eines einfachen nichtlinearen (hypoelastischen) Stoffgesetzes

Für die Aufstellung von Stoffgesetzen gibt es einige grundlegende Kriterien, aus denen sich für isotrope Modelle die Forderung nach der Formulierung in den Invarianten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors ergibt. Neben den grundlegenden Forderungen sollte noch beachtet werden, daß die Moduln stetige Funktionen in den Spannungen bzw. Verzerrungen sind.

Wenn man zusätzlich die Forderung aufstellt, daß das Materialverhalten im Rahmen der gegebenen Möglichkeiten für beliebige Spannungszustände optimal beschrieben werden soll, stellt man fest, daß bei den in Abschnitt 1.1.3 dargestellten Modellen zumindest eine Forderung jeweils nicht erfüllt ist.

Bei dem Modell von Duncan/Chang ist die Funktion für  $E_t$  nicht stetig, denn die Fließbedingung liegt unterhalb der Asymptote der Hyperbel (s. Bild 3.1). Die Unstetigkeit scheint unbedeutend, doch in einer nichtlinearen FE-Berechnung ist sie Ursache zusätzlicher Iterationen und kann unter Umständen eine Instabilität der Berechnung bewirken.

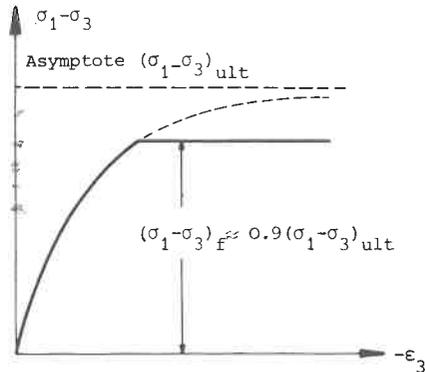


Bild 3.1: Die hyperbolische Spannungs-Dehnungsbeziehung im Stoffgesetz von Duncan/Chang

Bei den anderen Modellen sind die Elastizitätsmoduln Funktionen der 1. Invarianten des Spannungstensors, der 2. Invarianten des Spannungsdeviators und teilweise des Verzerrungstensors. Damit sind zwar die grundlegenden Forderungen erfüllt und auch die Stetigkeit ist meist gegeben, für allgemeine Spannungszustände wird das Verhalten des Bodens jedoch schlechter beschrieben als es selbst im Rahmen dieser einfachen Modelle möglich ist. Denn der Grenzspannungszustand - in diesem Fall der Zustand, bei dem  $G$  bzw.  $E = 0$  werden - entspricht der Drucker'schen oder erweiterten von Mises'schen Fließbedingung, die, wie in Abschnitt 2.2.7 gezeigt wurde, das Verhalten des Bodens weniger gut wiedergibt als die Coulomb'sche Fließbedingung. (Durch das Nullsetzen von  $E$  bzw.  $G$  wird erreicht, daß ein bestimmtes Spannungs-kriterium eingehalten wird. Die Auswirkungen von  $E$  bzw.  $G = 0$  auf die Spannungen sind also mit denen der Fließfläche in der Plastizitätstheorie vergleichbar).

In dieser Arbeit wird nun ein Modell vorgeschlagen, das sowohl den Vorteil des Modells von Naylor [56] - einfache mathematische Formulierung mittels Schub- und Kompressionsmodul - als auch den Vorteil des Modells von Duncan/Chang - Erfüllung des Coulomb'schen Kriteriums - besitzt.

$$G = G_0 - \alpha_G \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) - \beta_G \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \tag{3.1}$$

$$K = K_0 + \alpha_K \cdot p \tag{3.2}$$

Für Entlastung und Wiederbelastung werden  $K$  und  $G$  als konstant angenommen. Im allgemeinen werden dafür die Moduln des Ausgangszustands gewählt, es können aber auch zusätzliche Entlastungs- und Belastungsmoduln angegeben werden. Entlastungs- und Wiederbelastungsmodul werden gleichgesetzt.

Für  $G$  ist der Entlastungsmodul zu nehmen, wenn  $d(\sigma_1 - \sigma_3) < 0$  oder wenn  $d(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$ , jedoch  $(\sigma_1 - \sigma_3) < (\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$  ist.

Für  $K$  ist der Entlastungsmodul zu nehmen, wenn  $dp < 0$  oder wenn  $dp > 0$ , jedoch  $p < p_{\max}$  ist.

Für dieses einfache nichtlineare Stoffgesetz, das eine hypoelastische Formulierung darstellt, wird im folgenden die Abkürzung NOEL verwendet.

Sobald die Fließbedingung erreicht ist, wird  $G = 0$ . Dann kann Gleichung (3.1) geschrieben werden:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{G_0}{\beta_G} - \frac{\alpha_G}{\beta_G} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \tag{3.3}$$

Gleichung (3.3) ist somit identisch mit dem Coulomb'schen Kriterium

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = 2c \cdot \cos\phi - \sin\phi \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \quad (3.4)$$

Aus den Gleichungen (3.3) und (3.4) wird der Zusammenhang zwischen den Parametern des Modells NOEL und den bodenmechanischen Parametern  $c$  und  $\phi$  deutlich.

Da das Stoffgesetz NOEL im wesentlichen in Hauptspannungssumme und Hauptspannungsdifferenz formuliert ist, wird für die Berechnung der Scherzahl wie in [45] die Definition von Smolczyk [70] verwendet. Dabei wird die Scherzahl über den mobilisierten Scherwinkel festgelegt und ist definiert durch

$$s = \frac{\sin\phi_{\text{mob}}}{\sin\phi}$$

Für rollige Böden ist  $s$  als Funktion des Spannungszustandes gegeben durch die Gleichung

$$s = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{-(\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \sin\phi}$$

Für kohäsive Böden wird diese Gleichung erweitert und man erhält

$$s = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{-(\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \sin\phi + 2 \cdot c \cdot \cos\phi}$$

Die Scherzahl ist also anders definiert als bei Duncan/Chang (siehe Seite 111). Für die praktische Berechnung ist der Unterschied unwesentlich, insbesondere deshalb, weil sich für  $s = 0$  und  $s = 1$  vollkommene Übereinstimmung zwischen den unterschiedlichen Definitionen ergibt.

### 3.1 BESTIMMUNG DER MATERIALPARAMETER FÜR DAS MODELL NOEL

(In der folgenden Beschreibung der Bestimmung der Parameter sind die Kurven und Versuchspunkte nur zur Illustration der Methode dargestellt. Sie beruhen nicht auf realen Versuchen. Die Ermittlung der Parameter für die Berechnungsbeispiele erfolgt in Abschnitt 4.2.)

Die fünf Parameter in den Gleichungen 3.1 und 3.2 können auf zwei Arten bestimmt werden:

1. aus drainierten Triaxialversuchen (theoretisch mindestens zwei, wegen Versuchungenaugigkeiten möglichst viele, i.a. drei), bei denen nicht nur die axiale Dehnung gemessen wird, sondern auch die radiale Dehnung bestimmt werden kann. Entweder wird sie direkt gemessen oder aus der Messung der Volumenänderung errechnet;
2. die Scherparameter  $c$  und  $\phi$  werden aus Triaxialversuchen (drainiert oder undrainiert) oder direkten Scherversuchen bestimmt. Zur Ergänzung müssen noch die Ergebnisse eines Oedometerversuchs vorliegen.

#### 3.1.1 Bestimmung der Materialparameter aus drainierten Triaxialversuchen mit Volumenmessung (oder direkter Messung der radialen Dehnung)

Da die volumetrische Dehnung gleich der 1. Invariante des Verzerrungstensors ist und im Triaxialversuch Radial- und Tangentialdehnung gleich sind, gilt:

$$\epsilon_1 - \epsilon_3 = \frac{\epsilon_v - 3 \cdot \epsilon_3}{2} \quad \text{wegen } \epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (3.6)$$

Man kann also für jeden der Versuche ein  $\{(\sigma_1 - \sigma_3) - (\epsilon_1 - \epsilon_3)\}$ -Diagramm auftragen (Bild 3.2).

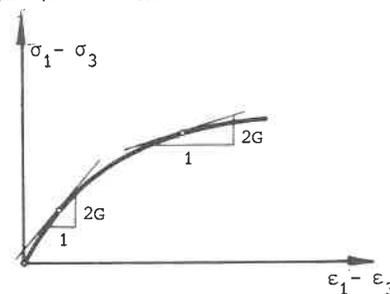


Bild 3.2: Messung der Spannungs-Dehnungsbeziehung in einem Triaxialversuch

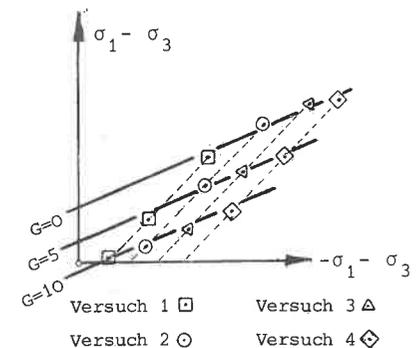


Bild 3.3: Zusammenstellung der Ergebnisse mehrerer Triaxialversuche

Für den Sonderfall des Triaxialversuchs wird die Oktaederschubspannung

$$\tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \text{da } \sigma_1 = \sigma_2 \quad \tau_{oc} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (3.7)$$

und die Oktaederschubverzerrung

$$\gamma_{oc} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad \text{da } \epsilon_1 = \epsilon_2 \quad \gamma_{oc} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_3) \quad (3.8)$$

Auf Grund des Hooke'schen Gesetzes ist das Verhältnis von Oktaederschubspannung zu Oktaederschubverzerrung durch den Schubmodul definiert:

$$G = \frac{\tau_{oc}}{\gamma_{oc}} \rightarrow 2G = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d(\epsilon_1 - \epsilon_3)} \quad (3.9)$$

Da es sich bei NOEL um eine inkrementelle Form des Hooke'schen Gesetzes handelt, stellt die Steigung der Kurve im  $\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\epsilon_1 - \epsilon_3)\}$ -Diagramm den doppelten Schubmodul dar.

Die Werte des tangentialen Schubmoduls aus allen Versuchen werden in der  $\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}$ -Ebene (Bild 3.3) aufgetragen. In diese Ebene legt man eine Schar paralleler Ausgleichsgeraden, so daß jeweils durch eine Gerade Punkte gleichen Schubmoduls repräsentiert werden. Aus der Änderung  $\Delta G/\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)$  von G auf der  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ -Achse wird  $\beta_G$  bestimmt. Aus der Änderung von G auf der  $(\sigma_1 + \sigma_3)$ -Achse wird  $\alpha_G$  bestimmt ( $\alpha_G$  ist immer positiv,  $\beta_G$  negativ). In der dreidimensionalen Darstellung von Bild 3.4 sieht man, daß aufgrund von Gl. 3.1 die Funktion von G als Ebene abgebildet wird.  $G_0$  ist die Größe von G im Ursprung des Koordinatensystems.

Beim Hooke'schen Gesetz ist der Kompressionsmodul durch die Gleichung

$$K = \frac{-p}{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3} \quad (3.10)$$

festgelegt. Die Bestimmung der Parameter  $K_0$  und  $\alpha_K$  erfolgt nun analog zu der von  $G_0$ ,  $\alpha_G$  und  $\beta_G$ . Die Ergebnisse aller Versuche werden in ein  $p-\epsilon_v$ -Diagramm eingetragen. In diese Punkteschar wird eine Kurve eingepaßt, deren Steigung den tangentialen K-Modul darstellt. Die Werte von K werden dann in das K-p-Diagramm eingetragen. Durch diese Punkte legt man eine Gerade, deren Abschnitt auf der K-Achse den Parameter  $K_0$  und deren Steigung den Parameter  $\alpha_K$  ergibt (Bild 3.5). Das Verfahren, das in den Bildern 3.3 bis 3.5 dargestellt ist, kann natürlich auch programmiert werden, so daß direkt aus den Versuchsergebnissen die Materialparameter bestimmt werden können.

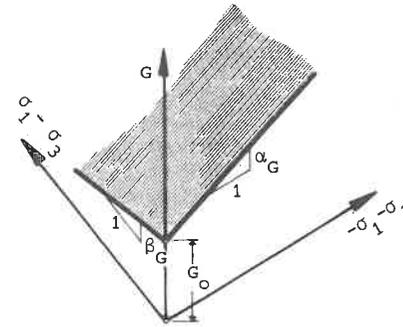


Bild 3.4: Graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Schubmodul (G) und den Hauptspannungen

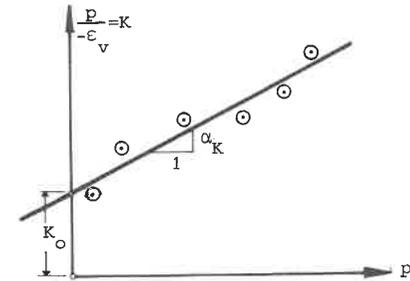


Bild 3.5: Versuchsergebnisse zur Bestimmung des Kompressionsmoduls

Die Bestimmung der Parameter  $K_0$  und  $\alpha_K$  wird wesentlich einfacher, wenn dafür ein spezieller drainierter Triaxialversuch mit  $(\sigma_1 - \sigma_3) = q = 0$  gefahren wird. Da im undrainierten Zustand der Boden inkompressibel ist, erübrigt sich in den Fällen dieser Versuch. Dann ist nur der Schubmodul G eine Funktion des Spannungszustands, und die Querdehnungszahl  $\mu$  ist konstant ( $\mu = 0.5$ ).

### 3.1.2 Bestimmung der Materialparameter aus den Scherparametern c und $\phi$ und einem Oedometerversuch

Aus den Gleichungen (3.3) und (3.4) ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen den Parametern von NOEL und c und  $\phi$ :

$$\beta_G = \frac{\alpha_G}{\sin \phi} \quad (3.11)$$

$$G_0 = 2 \cdot c \cdot \cos \phi \cdot \beta_G \quad (3.12)$$

speziell für den Grenzfall  $\phi = 0 \rightarrow \alpha_G = 0$ .

Aus den Randbedingungen des Oedometerversuchs und dem Stoffgesetz ergibt sich durch Integration der Spannungs- und Dehnungsinkremente für jeden Dehnungszustand der entsprechende Spannungszustand.

Es soll nun der Zusammenhang zwischen  $\dot{\sigma}_3$  und  $\dot{\epsilon}_3$  für den Oedometerversuch abgeleitet werden:

Für einaxiale Dehnung lautet die Beziehung zwischen  $\dot{\sigma}_3$  und  $\dot{\epsilon}_3$

$$\frac{\dot{\sigma}_3}{\dot{\epsilon}_3} = \frac{1}{3} \cdot (4G + 3K) \quad (3.13)$$

Da bei einaxialer Dehnung  $\epsilon_3 = \epsilon_v$  und der Kompressionsmodul definiert ist durch

$$K = K_0 + \alpha_K \cdot p = \frac{-\dot{p}}{\dot{\epsilon}_v} = -\frac{\dot{p}}{\dot{\epsilon}_3} \quad (3.14)$$

lautet die Beziehung zwischen der Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_3$  und der Änderung der hydrostatischen Spannung:

$$\dot{\epsilon}_3 = \frac{\dot{p}}{K_0 + \alpha_K \cdot p} \quad (3.15)$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\int_0^t \dot{\epsilon}_3 dt = \int_0^t \frac{\dot{p}}{K_0 + \alpha_K p} dt \quad (3.16)$$

Aus der Integralgleichung folgt:

$$C_1 = \frac{1}{\alpha_K} \ln(\alpha_K p + K_0) - \epsilon_3 \quad (3.17)$$

Aus den Anfangsbedingungen  $p = 0$  und  $\epsilon_3 = 0$  wird die Integrationskonstante  $C_1$  bestimmt:

$$C_1 = \frac{1}{\alpha_K} \ln K_0 \quad (3.18)$$

Damit ergibt sich zwischen mittlerer Normalspannung  $p$ , der Dehnung  $\epsilon_3$  und den Materialparametern der Zusammenhang

$$p = \frac{K_0}{\alpha_K} [\exp(-\alpha_K \cdot \epsilon_3) - 1] \quad (3.19)$$

Aus dem nichtlinearen Stoffgesetz (3.1) und (3.2) und der Beziehung (3.13) zwischen  $\dot{\sigma}_3$  und  $\dot{\epsilon}_3$  folgt:

$$\dot{\sigma}_3 = \frac{1}{3} \{ 3 \cdot (K_0 + \alpha_K p) + 4 [G_0 - \alpha_G (\sigma_1 + \sigma_3) - \beta_G (\sigma_1 - \sigma_3)] \} \cdot \dot{\epsilon}_3 \quad (3.20)$$

Da  $\sigma_3$  nur eine Funktion von  $\epsilon_3$  und den Materialparametern ist, kann man auch schreiben:

$$3 \cdot \frac{d\sigma_3}{d\epsilon_3} = 3 \cdot K_0 + 4 \cdot G_0 - 4 \cdot \sigma_3 \cdot (\alpha_G - \beta_G) + 3 \cdot \alpha_K \cdot p - 4 \cdot \sigma_1 \cdot (\alpha_G + \beta_G) \quad (3.21)$$

Da bei einaxialer Dehnung  $\sigma_1 = \sigma_2$  ist, ergibt sich  $\sigma_1$  als Funktion von  $p$  und  $\sigma_3$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_3 - 3 \cdot p}{2} \quad (3.22)$$

Mit der Bestimmungsgleichung für  $p$  (Gl.3.19) folgt:

$$\frac{d\sigma_3}{d\epsilon_3} + \underbrace{\left( \frac{2}{3} \alpha_G - 2\beta_G \right)}_{A_1} \cdot \sigma_3 = \underbrace{\frac{\alpha_K + 2\alpha_G + 2\beta_G}{\alpha_K}}_{A_2} \cdot K_0 \cdot \exp(-\alpha_K \epsilon_3) + \underbrace{\left[ \frac{4}{3} G_0 - 2 \cdot K_0 \cdot \frac{\alpha_G + \beta_G}{\alpha_K} \right]}_{A_3} \quad (3.23)$$

Mit der Einführung der Konstanten  $A_1, A_2$  und  $A_3$  wird deutlich, daß es sich um eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

handelt. Die Lösung einer solchen Differentialgleichung lautet allgemein:

$$y = \exp(-\int P dx) \left\{ \int [Q \cdot \exp(\int P dx)] dx + C_2 \right\}$$

Damit wird:

$$\sigma_3 = \exp(-\int A_1 \cdot d\epsilon_3) \cdot \left\{ \int [(A_2 \cdot K_0 \cdot \exp(-\alpha_K \cdot \epsilon_3) + A_3) \cdot \exp(\int A_1 \cdot d\epsilon_3)] \cdot d\epsilon_3 + C_2 \right\} \quad (3.24)$$

$$\sigma_3 = \exp(-A_1 \cdot \epsilon_3) \cdot \left\{ \int [A_2 \cdot K_0 \cdot \exp(A_1 \cdot \epsilon_3 - \alpha_K \cdot \epsilon_3) + A_3 \cdot \exp(A_1 \cdot \epsilon_3)] \cdot d\epsilon_3 + C_2 \right\}$$

$$\sigma_3 = \exp(-A_1 \cdot \epsilon_3) \cdot \left\{ \frac{A_2 \cdot K_0}{\alpha_K - A_1} \cdot \exp[(A_1 - \alpha_K) \cdot \epsilon_3] - \frac{A_3}{A_1} \cdot \exp(A_1 \cdot \epsilon_3) + C_2 \right\}$$

Aus dem Ausgangszustand  $\sigma_3 = 0$  und  $\epsilon_3 = 0$  kann die Integrationskonstante  $C_2$  ermittelt werden:

$$\sigma_3 = \frac{A_2 \cdot K_0}{\alpha_K - A_1} - \frac{A_3}{A_1} + C_2$$

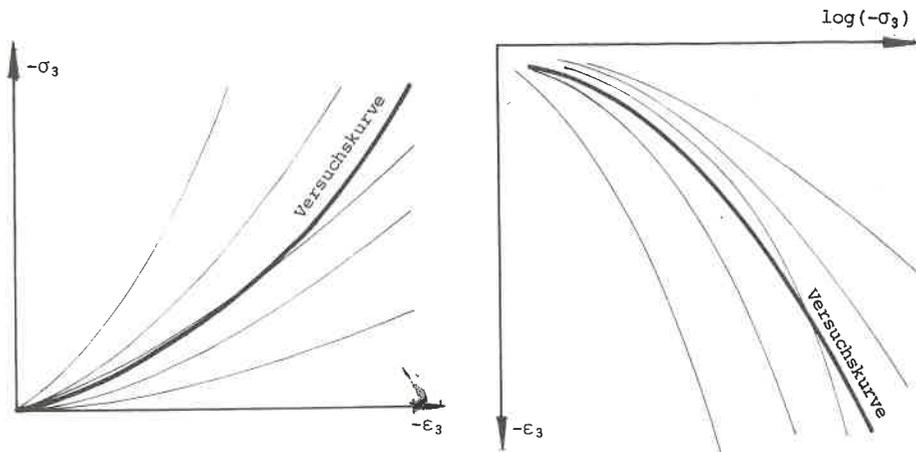
$$C_2 = \frac{A_3}{A_1} - \frac{A_2 \cdot K_0}{\alpha_K - A_1}$$

Damit lautet die Lösung:

$$\sigma_3 = \exp(-A_1 \cdot \epsilon_3) \cdot \left[ \frac{K_0 \cdot A_2}{\alpha_K - A_1} \cdot \exp(A_1 - \alpha_K) \cdot \epsilon_3 - \frac{A_3}{A_1} \cdot \exp(A_1 \cdot \epsilon_3) + \frac{A_3}{A_1} - \frac{A_2 \cdot K_0}{\alpha_K - A_1} \right] \quad (3.25)$$

wo  $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \alpha_G - 2 \cdot \beta_G$   
 $A_2 = (\alpha_K + 2 \cdot \alpha_G + 2 \cdot \beta_G) / \alpha_K$   
 $A_3 = \frac{4}{3} \cdot G_0 - 2 \cdot K_0 \cdot (\alpha_G + \beta_G) / \alpha_K$

Für jede Parametergruppe kann nun die Kurve im  $(\sigma_3 - \epsilon_3)$ -Diagramm berechnet werden. (Es können nicht alle Parameter unabhängig voneinander variiert werden, da durch (3.11) und (3.12) schon bestimmte Abhängigkeiten festgelegt sind.) Es wird die Parametergruppe als für das entsprechende Material maßgebend angenommen, bei der die Fläche zwischen gerechneter und gemessener Kurve in der  $\{\sigma_3 - \epsilon_3\}$ -Ebene zu einem Minimum wird (Bild 3.6). Da diese Berechnung relativ aufwendig ist, wird sie einschließlich des Auftragens der Kurven programmiert, so daß auf diese Art aus sehr einfachen und wenigen bodenmechanischen Laborversuchen mit geringem Aufwand die Materialparameter für eine hypoelastische Berechnung gewonnen werden können. (Flußdiagramm für den Ablauf der Berechnung siehe Bild 3.7).



a.) direkte Auftragung

b.) in der Bodenmechanik übliche halblogarithmische Darstellung

Bild 3.6: Spannungs-Dehnungsdiagramme des Oedometersversuchs

Es werden zwei Versionen des Modells NOEL formuliert und in die FE-Programme implementiert:

NOEL 1: Schub- und Kompressionsmodul werden in Abhängigkeit vom Spannungszustand festgelegt (Gl. 3.1 und Gl. 3.2). Aufgrund von Gl. 3.1 ergibt sich mit zunehmender Scherbeanspruchung eine stetige Verminderung des Schubmoduls bis beim Erreichen des Coulomb'schen Kriteriums  $G = 0$  ist. Das bedeutet, daß nach dem Erreichen des Coulomb'schen Kriteriums keine zusätzliche Schubbeanspruchung mehr aufgenommen werden kann.

NOEL 2: Vor Erreichen des Grenzspannungszustandes, d. h. des Coulomb'schen Kriteriums, werden die elastischen Moduln wie bei NOEL 1 berechnet. Nach Erreichen des Grenzspannungszustandes wird die Tangentialmatrix auf der Basis der Plastizitätstheorie entsprechend Gl. 2.32 ermittelt (Coulomb'sche Fließfläche, assoziierte Fließregel, keine Ver- oder Entfestigung). Beim Erreichen des Grenzspannungszustandes ergibt sich also eine nicht-stetige Änderung der  $[D]$ -Matrix, Die Formulierung auf der Grundlage der Plastizitätstheorie bewirkt, daß nach dem Erreichen des Fließkriteriums noch Spannungen aufgenommen werden können, soweit das Grenzspannungsverhältnis eingehalten wird. Die Ableitung der "plastischen Matrix" erfolgt nach dem Schema von Bild 2.6, die ausführliche Herleitung der Formeln siehe Abschnitt A 3.

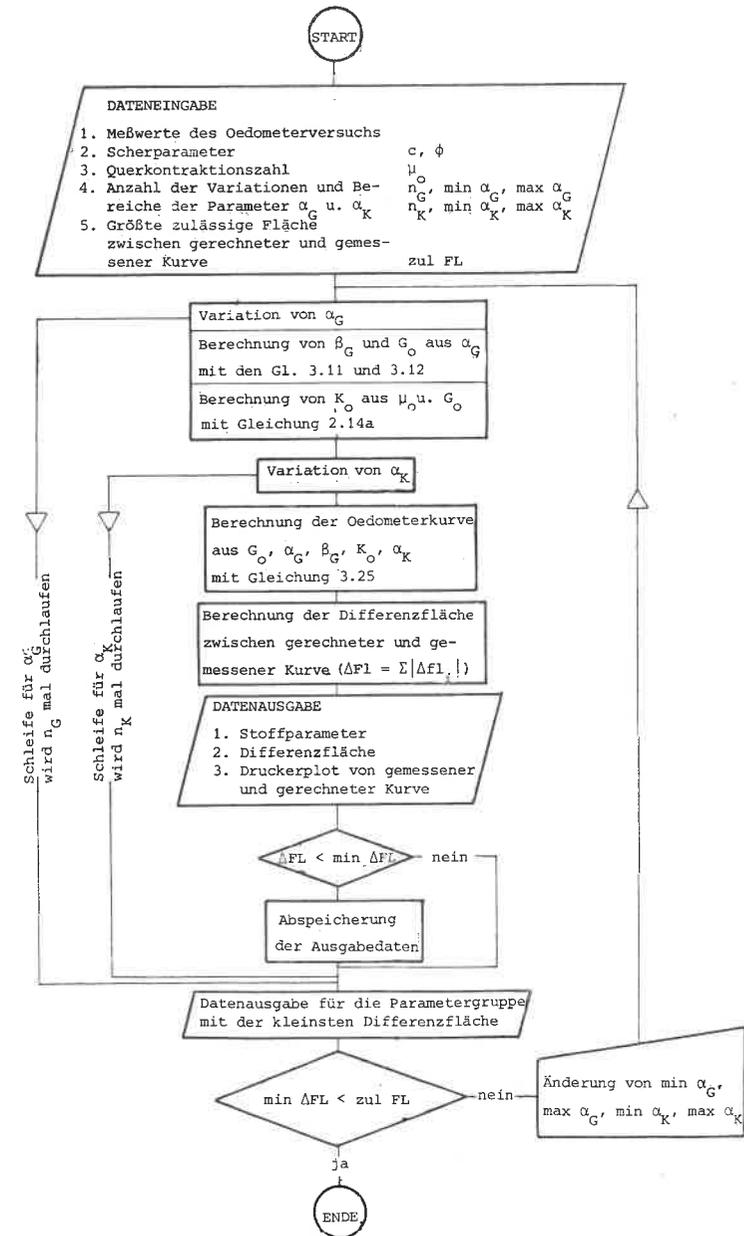


Bild 3.7: Flußdiagramm zur Nachrechnung von Oedometersversuchen mit dem Modell NOEL

Bei den pseudoelastischen Modellen wird für  $G \rightarrow 0$  die Stoffmatrix  $[D]$  singulär, und daraus kann sich eine Singularität der Strukturmatrix ergeben. Um trotzdem in allen Fällen eine numerische Lösung zu erhalten, wird nach dem Erreichen des Coulomb'schen Kriteriums ein "Restschubmodul" angesetzt. Bei der Implementierung in die FE-Programme werden für das Stoffgesetz NOEL 1 folgende Schranken festgelegt:

$$G > K_0/1000 \text{ und } \mu < 0.48 \quad (\text{Für das Stoffgesetz von Duncan/Chang siehe Bild 4.6})$$

Ein ähnliches Problem ergibt sich bei elasto-plastischen Modellen für ideale Plastizität, wenn die Fließfläche erreicht wird. Aufgrund der Fließregel ist nur eine Beziehung zwischen dem Spannungszustand und der Richtung des plastischen Verzerrungszinkrements festgelegt, es gibt also keine Spannungs-Verzerrungsbeziehung. Um auch mit der Methode der tangentialen Steifigkeit eine stabile numerische Lösung zu erhalten, wird für den Ausdruck  $A_1$  von Bild 2.6 eine untere Schranke von  $1.0^{-50}$  festgelegt. D. h. aus numerischen Gründen muß eine geringe Verfestigung angenommen werden.

Zwar beeinflußt die Festlegung der Schranken die Konditionierung des Gleichungssystems, doch bei einem Computer mit einer Genauigkeit von über 14 Dezimalstellen, wie bei CD 6600 und Cyber 174, ist die numerische Stabilität auch bei hinreichend genauer Erfassung der physikalischen Voraussetzungen gegeben (siehe Bild 4.6).

## 4. Beispiele

### 4.1 NUMERISCHE PROBLEME

Da die Ergebnisse und die Wirtschaftlichkeit von FE-Berechnungen wesentlich von der Diskretisierung, dem verwendeten Elementtyp und dem Iterationsverfahren abhängen, sollen kurz die wichtigsten Aspekte dargestellt und die im Rahmen dieser Arbeit an dem Programmsystem GEOFEP durchgeführten Verbesserungen beschrieben werden.

#### 4.1.1 Programmsysteme und Iterationsverfahren

Für die Berechnung des ersten Beispiels (Lastplatte) wird das Programmsystem SMART I [5], für die des zweiten Beispiels (Baugrube) das Programm GEOFEP [45] verwendet.

In SMART I und GEOFEP wurden das Stoffgesetz von Duncan/Chang in einer modifizierten Form (siehe 4.2.2) und das hypoelastische Stoffgesetz NOEL eingebaut; in SMART I außerdem das elastoplastische Stoffgesetz ELPL 2 (das Modell ELPL 1 ist als Sonderfall in ELPL 2 enthalten, s. a. S. 14).

Wenn die Vorteile der FE-Programmsysteme (wie z.B. SMART I und GEOFEP) genutzt werden sollen, bedeutet das, daß zur Berücksichtigung der Nichtlinearität inkrementelle und/oder iterative Rechenverfahren verwendet werden müssen. (Zusammenstellung der Rechenverfahren zur Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität siehe Bild 4.1).

Im allgemeinen werden inkrementelle Verfahren verwendet, bei denen die Belastung in Stufen aufgebracht wird. Es gibt dann zwei Möglichkeiten:

1. in jedem Schritt werden die Grundlagen der Berechnung (Geometrie, Spannungs-Verzerrungsbeziehungen) dem jeweiligen Zustand angepaßt (Bild 4.1 a, b, c);
2. der Einfluß der Nichtlinearität wird durch Korrekturglieder berücksichtigt (Bild 4.1 e, f).

Außerdem können die beiden Verfahren kombiniert werden (Bild 4.1 g, h).

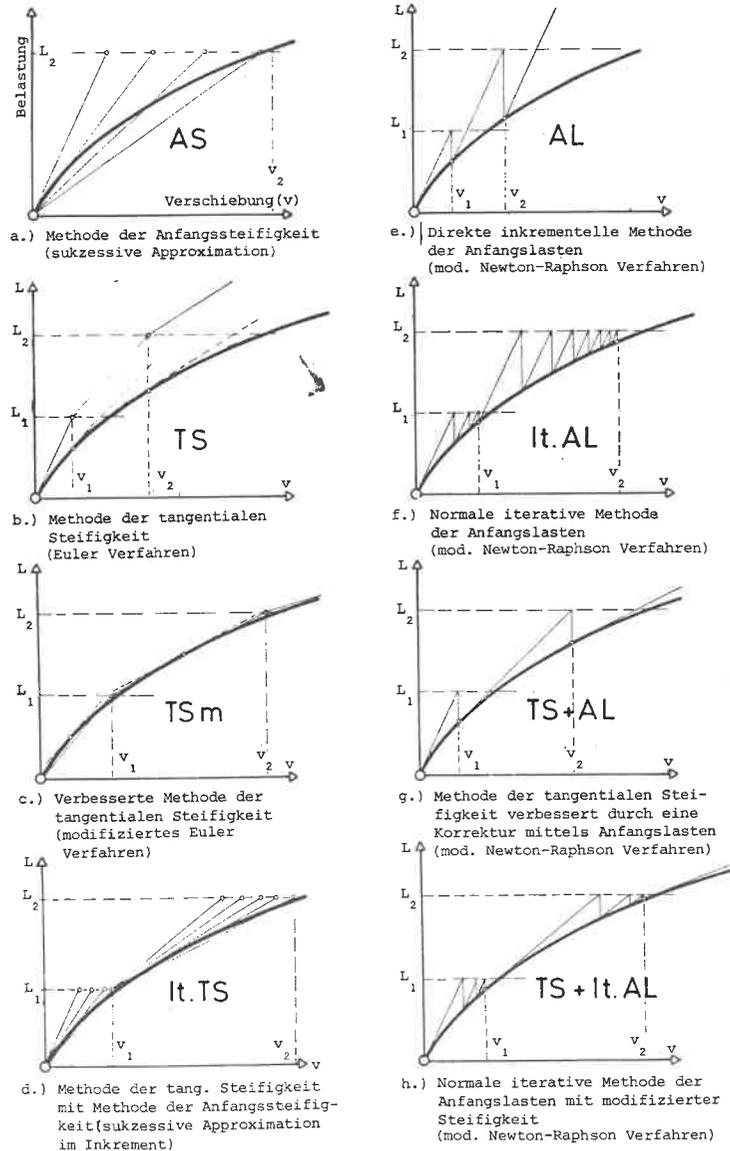


Bild 4.1: Numerische Verfahren zur Erfassung der nicht-linearen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Bei den rein inkrementellen Verfahren (Bild 4.1 b, c, e, g) kann zwar abgeprüft werden, ob die Spannungs-Verzerrungsbeziehung des Stoffgesetzes in jedem Inkrement hinreichend genau erfüllt ist, es können aber keine Maßnahmen getroffen werden, um Abweichungen gezielt zu korrigieren. Es gibt nur die Möglichkeit, die Berechnung mit kleineren Inkrementen neu zu starten. Die "richtige" Inkrementierung ergibt sich also aus der Erfahrung des Anwenders, nicht aufgrund eines mathematisch fundierten Kriteriums. Die Erfahrung hat gezeigt, daß auch ein einfaches inkrementelles Verfahren wie die Methode der tangentialen Steifigkeit (Bild 4.1 b) bei monotoner Belastung zutreffende Ergebnisse liefert.

Bei den iterativen Verfahren (Bild 4.1 a, d, f, h) kann in jedem Inkrement und in jeder Iteration geprüft werden, wie groß die Abweichung von der durch das Stoffgesetz vorgegebenen Spannungs-Verzerrungsbeziehung ist. Der Iterationsprozeß wird erst dann abgebrochen, wenn die Abweichung eine festgelegte Schranke unterschreitet. Als Maßstab für die Konvergenz können u. a. folgende Größen verwendet werden: die Spannungen, die Verschiebungen, die Anfangslasten. U. U. ist es sinnvoll, verschiedene Kriterien zu kombinieren (ausführliche Untersuchung der Möglichkeiten der Methode von Bild 4.1 f siehe Scharpf [67]).

Für die Erfassung der physikalischen Nichtlinearität - die geometrische Nichtlinearität soll im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden - erfolgt die Bezeichnung der Verfahren entsprechend den Größen der linearen Spannungs-Verzerrungsbeziehung

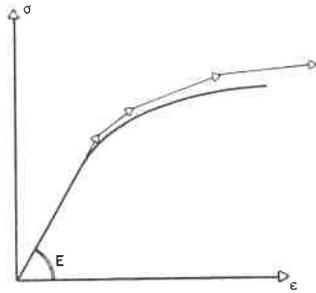
$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \cdot \{\dot{\epsilon}\},$$

die zur Berücksichtigung der Nichtlinearität modifiziert werden. Wenn die Materialmatrix in jedem Inkrement dem jeweiligen Spannungs- bzw. Dehnungszustand angepaßt wird, spricht man von der Methode der Tangentialen Steifigkeit (Bild 4.1 b, c, d).

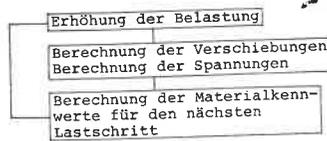
Wenn die Belastung auf einmal aufgebracht, also nicht in Inkrementen, und die Materialmatrix so lange verändert wird, bis für den Endzustand die Spannungs-Dehnungsbeziehungen erfüllt sind, wird das Verfahren als Methode der Anfangssteifigkeit bezeichnet (Bild 4.1 a). Denn in jeder Iteration beginnt die Berechnung am Anfang mit einer modifizierten Steifigkeit.

Wenn der Dehnungszustand mit Hilfe von Anfangsdehnungen korrigiert wird, spricht man von der Methode der Anfangsdehnungen (Bild 4.2); wird der Spannungszustand durch Anfangsspannungen korrigiert (Bild 4.2), von der Methode der Anfangsspannungen. Da Anfangsspannungen und Anfangsdehnungen im Rahmen der FE-Methode durch

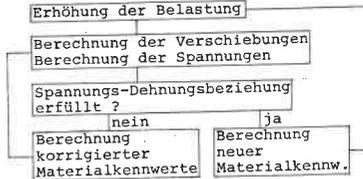
METHODE DER TANGENTIALEN STEIFIGKEIT



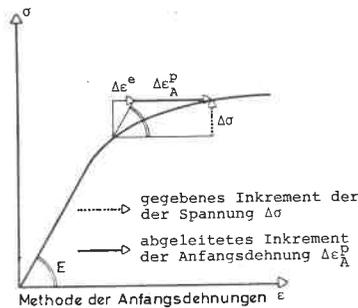
ohne Iteration im Lastschritt



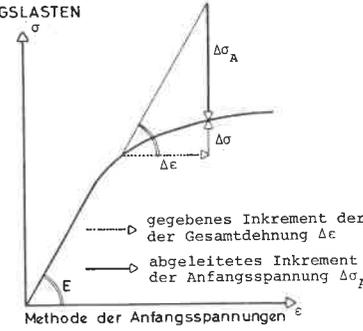
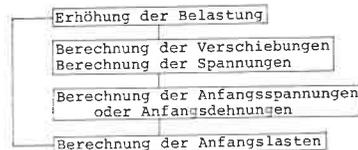
mit Iteration im Lastschritt



METHODE DER ANFANGSLASTEN



ohne Iteration im Lastschritt



mit Iteration im Lastschritt

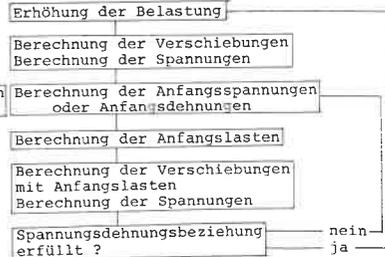


Bild 4.2: Methode der tangentialen Steifigkeit - Methode der Anfangslasten

Anfangslasten erfaßt werden, können beide Verfahren als Methode der Anfangslasten bezeichnet werden. D. h. die Rechenprozesse in der iterativen, inkrementellen Berechnung (Bild 4.1 d, e) sind dieselben.

Da die verschiedenen Verfahren von Bild 4.1 auf die zwei grundsätzlichen Verfahren von Modifizierung der Steifigkeit und Korrektur mittels Anfangslasten zurückgeführt werden können, sind diese beiden Verfahren in Bild 4.2 einander gegenübergestellt.

In dieser Arbeit wurden die pseudoelastischen Stoffgesetze mit der Methode der tangentialen Steifigkeit (Bild 4.1 b, c), das elastoplastische Stoffgesetz mit der Methode der Anfangslasten bearbeitet (Bild 4.1 f). Die Formulierung nach Gleichung (2.31) entspricht der Methode der Anfangsspannungen, auch wenn die plastischen Verzerrungen ermittelt werden. Denn wie man aus dem Übergang von Gleichung (2.26) zu Gleichung (2.31) und Bild 2.5 sieht, bleibt das totale Verzerrungsincrement konstant, und der Spannungszustand wird korrigiert. Mit diesem Verfahren kann dann auch ideal-plastisches Verhalten erfaßt werden, was mit der Methode der Anfangsdehnungen nicht möglich ist.

Gründe für die Wahl dieser Iterationsverfahren:

- Bei den nichtlinear-elastischen Stoffgesetzen muß immer auf der Grundlage der Methode der Tangentialen Steifigkeit gearbeitet werden, da nicht nach elastischen und plastischen Verzerrungen unterschieden wird.

Es gibt allerdings die Möglichkeit, Spannungszustände, die die Spannungs-Verzerrungsbeziehung nicht hinreichend befriedigen, mit der Methode der Anfangslasten zu korrigieren. Von dieser in [45] dargestellten Möglichkeit wird bei der Berechnung der Baugrube (Abschnitt 4.4) Gebrauch gemacht.

- Im überkritischen Bereich hat das elasto-plastische Stoffgesetz eine nicht-assozierte Fließregel, so daß sich für die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen eine nichtsymmetrische Matrix (Gleichung 2.32) ergibt. Das bedeutet, daß die Steifigkeitsmatrizen der FE-Rechnung nichtsymmetrisch werden und sich die Anzahl der Rechenoperationen und der Speicherplätze annähernd verdoppelt.

Da der Ausgangszustand jedoch elastisch ist, sind hier die Steifigkeitsmatrizen symmetrisch. Wenn also nur die Methode der Anfangslasten zur Erfassung der plastischen Verzerrungen verwendet wird, muß nur die symmetrische Steifigkeitsmatrix des Anfangszustandes triangularisiert werden. Diese Vereinfachung wird bei der Berechnung des Beispiels ausgenutzt.

#### 4.1.2 Wahl der Elemente

Für das erste Beispiel werden isoparametrische Scheiben- bzw. Ringelemente mit bi-quadratischem Verschiebungsansatz (Vierecke) und quadratischem Verschiebungsansatz (Dreiecke) verwendet. Die Elemente lassen eine Variation der Spannungs-Verzerrungsbeziehung innerhalb des Elements zu und sind in [5] ausführlich beschrieben. Spannungen, Verzerrungen etc. werden an den Aufpunkten der numerischen Integration bestimmt. Für die Spannungsberechnung wird die in [4] entwickelte "Integralen Spannungsberechnung" mit einem linearen Ansatz innerhalb der Elemente verwendet, da sich diese Methode als sehr vorteilhaft bei Problemen des Grundbaus erwiesen hat ([11], S. 7). Im allgemeinen werden die Spannungen über die Verzerrungen aus den Ableitungen des Verschiebungsfeldes berechnet. Bei der "Integralen Spannungsberechnung" erfolgt die Berechnung durch die nochmalige Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Aus der Gleichheit von äußerer Arbeit (Skalarprodukt von Elementknotenkräften und Elementverschiebungen) und negativer innerer Arbeit (Skalarprodukt von Spannungen und Verzerrungen über das Element integriert) können die Spannungen mit Hilfe der "Fundamentalmatrix", einer Matrix, die ähnlich wie die Steifigkeitsmatrix aufgebaut ist, ermittelt werden.

Für die Baugrube wird das in [18] beschriebene viereckige Scheibenelement verwendet. Das Viereck besteht aus vier Dreiecken mit linearem Verschiebungsansatz, wobei die Freiheitsgrade des Innenpunktes durch statische Kondensation eliminiert werden. Die Elementspannung wird durch Mittelbildung der Spannungen der Dreieckselemente ermittelt und für den Bereich des ganzen Viereckelements als konstant angenommen.

Die verwendeten Verschiebungselemente können mit dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie hergeleitet werden. Das bedeutet dann, daß das Stoffgesetz Potentialeigenschaften haben muß. Diese sind bei den pseudoelastischen Stoffgesetzen, z.B. NOEL 1, gegeben, bei elasto-plastischen Stoffgesetzen jedoch nur bei einsinnigen Belastungswegen und bei einem Zusammenfallen von Fließfläche und plastischem Potential (assoziierte Fließregel). Da die verwendeten Verschiebungselemente jedoch auch mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen hergeleitet werden können und es bei diesem Prinzip keine Einschränkungen bezüglich des Stoffgesetzes gibt, können auch Stoffgesetze implementiert werden, die keine Potentialeigenschaften besitzen. Allerdings ist die Konvergenz des Verfahrens nicht grundsätzlich und allgemeingültig bewiesen.

#### 4.1.3 Diskretisierung der Beispiele

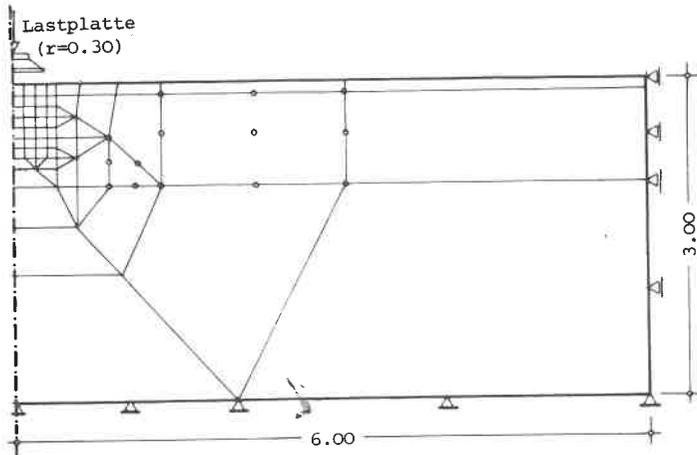
Bei der Einteilung des Untergrunds in Elemente ist zunächst zu klären, wie groß der Bereich, der in Elemente eingeteilt werden soll, überhaupt sein muß. Auf Grund der Untersuchung von [32] kann man davon ausgehen, daß für den Lastfall "Streifen(Kreis)-Last auf Halbraum" ein Untergrundausschnitt, dessen Höhe größer oder gleich der dreifachen Lastbreite ist und bei dem das Verhältnis Breite zu Höhe mindestens vier zu eins ist, hinreichend genau das Verhalten des Halbraums simuliert. Deshalb wurden die in Bild 4.3 dargestellten Untergrundausschnitte gewählt. Da die Mächtigkeit der Tonablagerungen im Konstanzer Raum, also in dem Gebiet, in dem die Bodenproben zur Bestimmung der Stoffparameter entnommen wurden, dreißig bis sechzig Meter beträgt, war es naheliegend, bei dem Beispiel der Baugrube bei einer Tiefe von 42 m einen festen Rand anzusetzen.

Die Elemententeilung hängt sowohl vom Elementtyp [4,12] und den elastischen Parametern [25,32] als auch von der Art der Ausbreitung der Fließ(Bruch)zone ab. Da die Rechenzeiten für linear-elastische Berechnungen relativ niedrig sind, ist es in diesen Fällen ohne Schwierigkeiten möglich, eine Diskretisierung aufgrund von Testberechnungen so zu wählen, daß der Einfluß der Diskretisierung gering bleibt und deshalb vernachlässigt werden kann. Bei einer nichtlinearen Berechnung ändern sich jedoch während der Berechnung die Koeffizienten der [D]-Matrix (Methode der tang. Steifigkeit) bzw. die angreifenden Lasten (Methode der Anfangslasten). Das bedeutet, daß eine Diskretisierung, die für den ursprünglichen Belastungszustand vollkommen genügte, für einen Zustand mit veränderten Steifigkeiten oder mit großen Anfangslasten völlig unzureichend sein kann. So erklärt sich der starke Einfluß der Diskretisierung auf das Verformungsverhalten, wie er in [6] und [55] festgestellt wurde. Bild 4.4 aus [6], zeigt, daß der Einfluß der Diskretisierung u.U. - trotz anfänglicher Übereinstimmung - so groß sein kann, daß er das Ergebnis total verfälscht. Aus diesem Grund ist die Diskretisierung der Beispiele (Bild 4.3) in den Bereichen, in denen Fließen auftritt, gleichmäßig und durchgehend sehr fein.

#### 4.1.4 Rechenzeit und Rundungsfehler

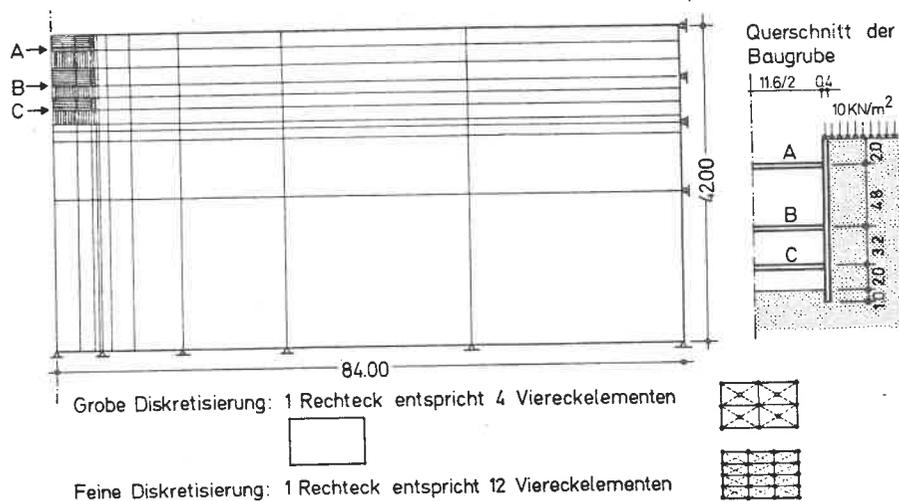
Da der Anwendung der FE-Methode durch die verfügbare bzw. wirtschaftlich vertretbare Rechenzeit und die Rechnergenauigkeit (Wortlänge) Grenzen gesetzt sind, werden an dem Programmsystem GEOFEP Verbesserungen durchgeführt, um auch größere Probleme wirtschaftlich und zuverlässig berechnen zu können.

Wie aus Bild 4.5 hervorgeht, wird ein großer Teil der Rechenzeit für die Trian-



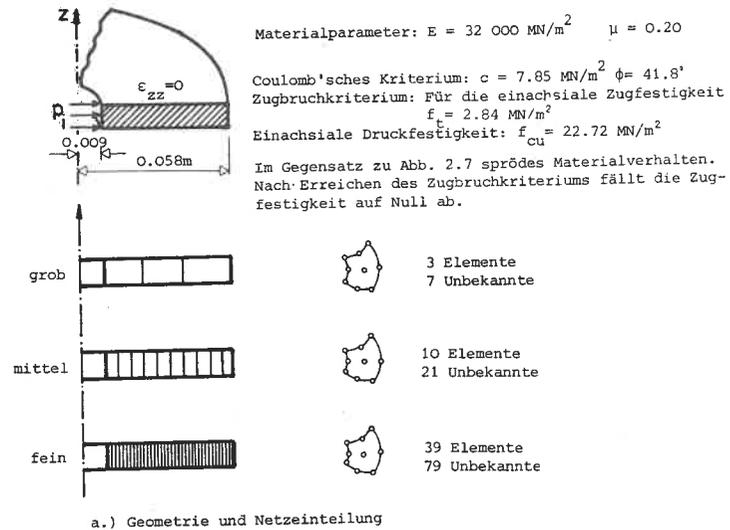
51 Elemente mit biquadratischem Verschiebungsansatz  
 12 Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz  
 454 Unbekannte

a.) Diskretisierung der Lastplatte für die FE-Berechnung



b.) Diskretisierungen der ausgesteiften Baugrube für die FE-Berechnung

Bild 4.3: Diskretisierung der Beispiele



a.) Geometrie und Netzeinteilung

b.) Grenzlaster in Abhängigkeit von der Netzeinteilung

Bild 4.4: Der Einfluß der Diskretisierung auf die Grenzlaster nach Argyris et. al. [6]

gularisierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix verwendet. Rechenzeit kann gespart werden, wenn es gelingt die Bandbreite klein zu halten und/oder die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. Zur Steigerung der Genauigkeit und Reduzierung der Rechenzeit wird das Programmsystem GEOFEF für die Berechnung von Böschungen, Tunneln, Baugruben etc. erweitert:

Die Kräfte, die sich infolge des Aushubs ergeben, werden nicht durch Integration der Spannungen an den freien Rändern ermittelt, sondern aus Elementsteifigkeit und Elementverschiebungen. Die Multiplikation der Elementsteifigkeitsmatrix mit dem Elementverschiebungsvektor ergibt den Vektor der Elementknotenkräfte. Aus den Vektoren mit den Knotenkräften der Elemente im auszuhebenden Bereich können dann die für die "Aushubbelastung" anzusetzenden Kräfte ermittelt werden. So können die Ungenauigkeiten, die sich bei der Spannungsberechnung selbst und bei der Integration der Spannungen längs des Randes zu Kräften ergeben, vermieden werden.

Elemente, die "ausgehoben" werden, entfallen für die weitere Berechnung und werden nicht als "Luftlemente" (Elemente mit einer Steifigkeit nahe Null) eingeführt. Weil somit die Elemente und Knotenverschiebungen im ausgehobenen Bereich nicht berücksichtigt werden, ergibt sich eine Reduzierung der Anzahl der Elemente und der Unbekannten sowie bereichsweise eine Verkleinerung der Bandbreite.

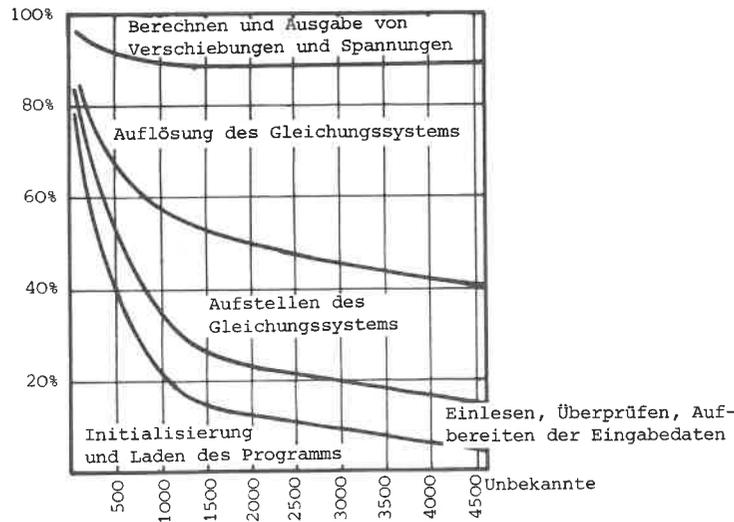
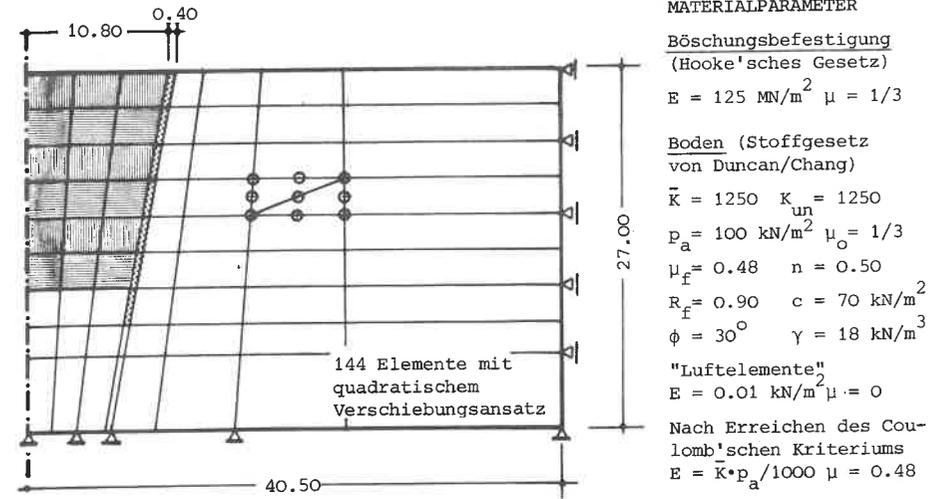


Bild 4.5: Anteil der verschiedenen Programmschritte an der Gesamtrechenzeit (lineare Analyse mit SMART)



a.) Struktur zur Untersuchung von Rechenzeit und Rundungsfehler

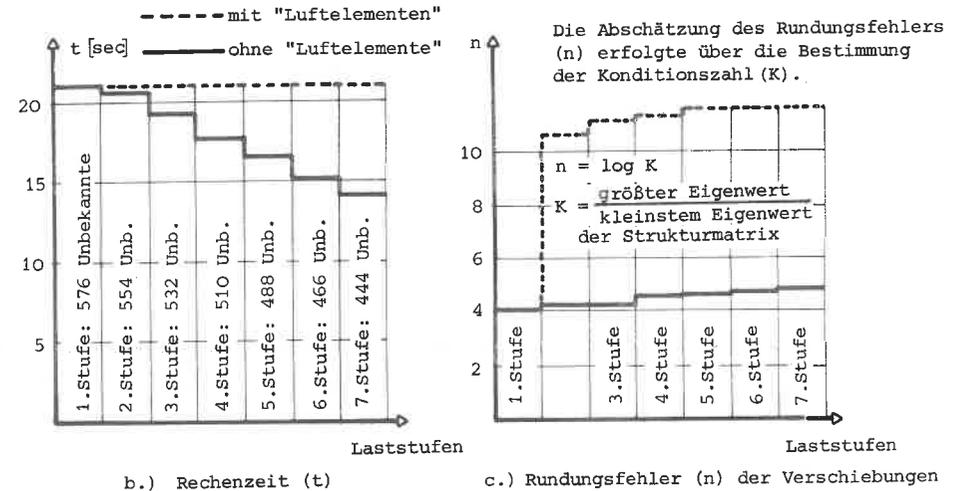


Bild 4.6: Rechenzeit und Rundungsfehler

Für Probleme mit großen auszuhebenden Bereichen, wie z. B. Böschungsprobleme, kann sich eine Reduzierung der Rechenzeit bis zu 40 % ergeben. Schon bei einem einfachen Beispiel (Bild 4.6) ergibt sich eine Ersparnis der Rechenzeit um 16%<sup>1)</sup>

Dadurch, daß auf die im allgemeinen üblichen "Luftelemente" verzichtet wird, ergibt sich auch eine wesentliche Verbesserung der Konditionierung des Gleichungssystems. Denn die "Luftelemente" mit ihrer kleinen Steifigkeit, neben Elementen mit sehr hoher Steifigkeit (z. B. Elemente der Baugrubenwand), bewirken, daß in der Gesamtsteifigkeitsmatrix unmittelbar neben sehr hohen Werten von Diagonalelementen sehr kleine stehen und sich ein großer Abfall an Genauigkeit bei der Auflösung des Gleichungssystems ergibt. Die Aussage ist zu beziehen auf die Genauigkeit der Maschine, die bei einem CD-Computer (60Bit Worte) 14 Dezimalstellen, bei einem IBM-Computer (36Bit Worte) 7 Dezimalstellen beträgt. Man sieht aus Bild 4.6, daß der Genauigkeitsverlust bei einer Maschine mit 60Bit Wortlänge unwesentlich ist, während bei einer Maschine mit 36Bit Worten für die entscheidenden Operationen die doppelte Wortlänge notwendig wird (s. Roy [66]).

4.1.5 Auswertung der FE-Berechnung

Da bei FE-Berechnungen große Datenmengen erzeugt und ausgegeben werden, ist die Auswertung für den Ingenieur oft sehr mühsam. In der Regel werden für jeden Knotenpunkt bzw. jedes Element die Verschiebungen bzw. Spannungen ausgegeben. Bei Bauteilen wie z. B. Tunnelauskleidungen, Gründungsplatten und Stützmauern, die meist mit denselben Elementen diskretisiert werden wie der Boden, interessieren den Ingenieur jedoch weniger die Spannungen als vielmehr die Schnittkräfte (Normalkraft, Querkraft, Biegemoment). Bei den Spannungen ist der Fehler um ein Vielfaches größer als bei den Verschiebungen [4, 10]. D. h. die Schnittkräfte, die durch Integration der Spannungen ermittelt werden, sind mit einem relativ hohen Diskretisierungsfehler behaftet. Deshalb wird in dem Programmsystem GEOFEP [45] die Möglichkeit geschaffen, beliebige Elementketten als Balken zu kennzeichnen und die Schnittkräfte aus Elementsteifigkeiten und Elementverschiebungen zu ermitteln. (Analog zum Vorgehen bei der "Integralen Spannungsberechnung"). Damit ist der Diskretisierungsfehler bei den Schnittkräften nur noch so groß wie bei den Verschiebungen, und Berechnung und Auswertung sind wesentlich einfacher als bei einer Integration aus den Spannungen.

<sup>1)</sup> Das Beispiel wurde auf einer Maschine (CD 6600) mit einer Wortlänge von 60 bit gerechnet, so daß auch bei einem Genauigkeitsverlust von 11 Dezimalstellen die Verschiebungen noch brauchbar sind.

4.2 ERMITTLUNG DER STOFFPARAMETER FÜR DIE BERECHNUNG DER BEISPIELE

4.2.1 Stoffparameter für das Modell ELPL2

Da die Lastplattenversuche, von denen einer in dieser Arbeit nachgerechnet werden soll, auf demselben Boden durchgeführt wurden, den bereits Thamm in [77] untersuchte, werden die Parameter teilweise von [77, Seite 50] übernommen.

$M = 1.04 [1] \quad \lambda_c = 0.15 [1] \quad \lambda_s = 0.06 [1] \quad c_o = 0.4 [1] \quad \mu = 0.15 [1] \quad (s.s.60)$

Die drainierten Scherversuche (Bild 4.7), die mit Bodenproben aus dem Bereich der Lastplattenversuche durchgeführt wurden, ergaben die Scherparameter  $\phi' = 21^\circ$  und  $c' = 11 \text{ kN/m}^2$  (Lagerungsdichte  $e_1 = 1.16$ ). Für den Dilatanzwinkel wird  $v = 0$  angenommen.

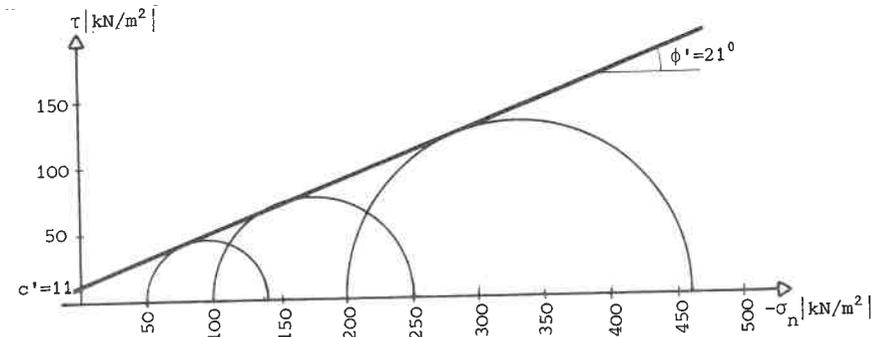


Bild 4.7: Die Bestimmung der Scherparameter aus drainierten triaxialen Scherversuchen

Aus der gemessenen Kohäsion von  $c' = 11 \text{ kN/m}^2$  kann auf eine geologische Vorbelastung geschlossen werden.

Im p-q Diagramm (Bild 4.8) ist die Steigung der überkritischen Fließkurve

$$m_q^* = \frac{6 \cdot \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$$

Der Achsenabschnitt auf der q-Achse

$$c_q^* = \frac{6 \cdot c' \cdot \cos \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (\text{Ableitung siehe Anhang 3.1})$$

Aus Bild 4.8 folgt:

$$p_f = \frac{c_q^*}{c_o \cdot (M - \frac{6 \cdot \sin \phi'}{3 - \sin \phi'})} = 258 \text{ kN/m}^2$$

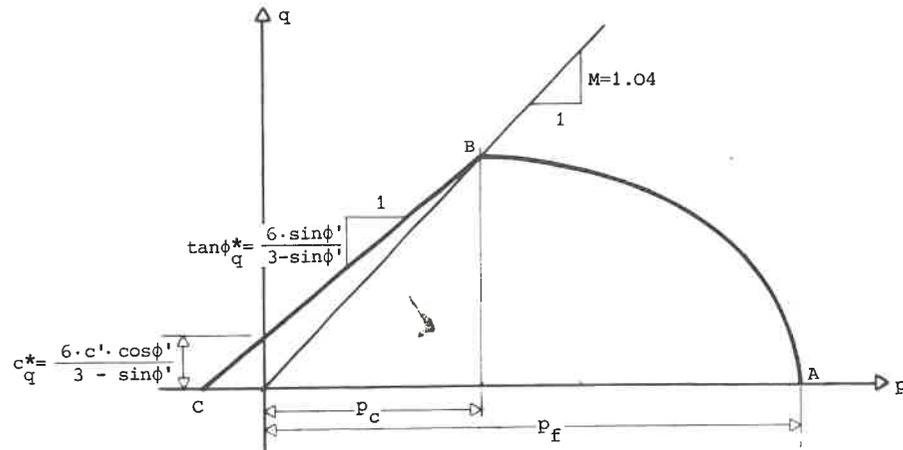


Bild 4.8: Anfangsfließfläche für die elastoplastische Berechnung mit ELPL2

Für die Nachrechnung des Lastplattenversuchs wird also davon ausgegangen, daß der hydrostatische Druck der geologischen Vorbelastung  $258 \text{ kN/m}^2$  betragen hat. D.h. die in Bild 4.8 dargestellte Kurve ABC ist ein Schnitt durch die Anfangsfließfläche.

#### 4.2.2 Stoffgesetz von Duncan/Chang

Das Stoffgesetz, wie es in [24] beschrieben wird, hat noch einige Unzulänglichkeiten bezüglich der Variation der Querkontraktionszahl und der Bestimmung des Elastizitätsmoduls für kohäsive Böden.

##### Erweiterung für variable Querkontraktionszahl:

Da die Kompressibilität von Böden im Vergleich zu den Scherverformungen gering ist, empfiehlt es sich, nicht die Querkontraktionszahl (wie in [24]), sondern den Kompressionsmodul  $K = \text{const}$  zu setzen.

Da sich das Stoffgesetz von Duncan/Chang jedoch schon bei vielen Anwendungen bewährt hat, soll der funktionale Zusammenhang dieser Formulierung soweit wie möglich beibehalten werden.

Es wird angenommen, daß die Abhängigkeit des Schubmoduls von der Scherzahl die-

selbe ist wie die für den Elastizitätsmodul in [24] formulierte:

$$G = (1 - R_f \cdot S)^2 \cdot G_0 \quad (4.1)$$

wobei  $G_0$  eine Funktion von  $\sigma_1$  ist.

Die Querkontraktionszahl bei  $S = 0$  wird mit  $\mu_0$  und die bei  $S = 1$  mit  $\mu_f$  bezeichnet, wobei  $\mu_f = 0.5$ .

Aus den Abhängigkeiten zwischen den elastischen Moduln (siehe Abschnitt 2.1.2) folgt für  $S = 0$ :

$$\frac{G_0}{K_0} = \frac{1.5 \cdot (1 - 2 \cdot \mu_0)}{1 + \mu_0} \quad (4.2)$$

Für  $G$  als Funktion von  $S$  ergibt sich nach Gleichung 4.1:

$$\frac{G}{K_0} = \frac{1.5 \cdot (1 - 2 \cdot \mu_0)}{1 + \mu_0} \cdot (1 - R_f \cdot S)^2 \quad (4.3)$$

Damit ergibt sich für  $\mu$  folgende Abhängigkeit von den Stoffparametern  $\mu_0$ ,  $R_f$  und der Scherzahl  $S$ :

$$\mu = 0.5 - \frac{3 \cdot \frac{G}{K_0}}{6 + 2 \cdot \frac{G}{K_0}} = 0.5 - \frac{3 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \mu_0}{1 + \mu_0} \cdot (1 - R_f \cdot S)^2}{4 + 2 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \mu_0}{1 + \mu_0} \cdot (1 - R_f \cdot S)^2} \quad (4.4)$$

##### Erweiterung für kohäsive Böden:

Die Verwendung des Ansatzes von Ohde [59]

$$E_i = \bar{K} \cdot p_a \cdot \left( \frac{-\sigma_1}{p_a} \right)^n \quad (4.5)$$

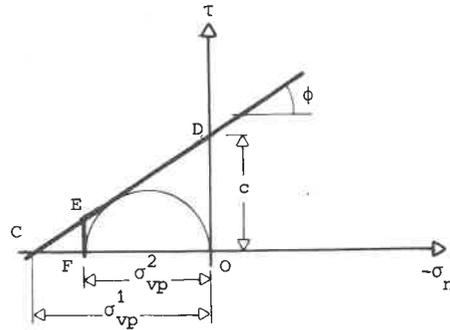
im Stoffgesetz von Duncan/Chang ist nur sinnvoll, wenn  $\sigma_1$  eine Druckspannung ist.

Wenn das Stoffgesetz von Duncan/Chang auch für kohäsive Böden verwendet werden soll, muß man es so modifizieren, daß sich auch für positive  $\sigma_1$  reelle Werte für  $E_i$  ergeben.

Dazu wird der Grenzspannungswert  $\sigma_{vp}$  eingeführt (Bild 4.9) und der Ausdruck für  $E_i$  modifiziert zu

$$E_i = \bar{K} \cdot p_a \cdot \left( \frac{-\sigma_1 + \sigma_{vp}}{p_a} \right)^n$$

Bild 4.9: Die Begrenzung der maximalen Zugspannung bei kohäsiven Böden



Für  $\sigma_{vp}$  kann jeder plausible Wert eingeführt werden, vorausgesetzt, er wird bei der Ermittlung der Parameter  $\bar{K}$  und  $n$  berücksichtigt. Liegen keine besonderen Kenntnisse über das Materialverhalten bei Zugbeanspruchung vor, so ergeben sich zwei Möglichkeiten auf Grund des Mohr'schen Diagramms,  $\sigma_{vp}$  zu definieren:

- 1.) Für  $\sigma_{vp}$  wird der Abschnitt  $\bar{CO}$  (Bild 4.9) auf der  $\sigma$ -Achse genommen.

Also: 
$$\sigma_{vp} = c \cdot \cot\phi$$

Diese Formulierung entspricht einer Verschiebung des Koordinatenursprungs um  $c \cdot \cot\phi$ , wie sie in der Bodenmechanik häufig angewendet wird, um Ergebnisse, die für nichtbindige Böden ermittelt wurden, auf bindige Böden zu übertragen. Bei dieser Formulierung muß die Einschränkung gemacht werden, daß für  $\phi \rightarrow 0$   $n = 0$  ist.

- 2.) Für  $\sigma_{vp}$  nimmt man den Abschnitt  $\bar{FO}$  auf der  $\sigma$ -Achse. Also:

$$\sigma_{vp} = \frac{2 \cdot c \cdot \cos\phi}{1 + \sin\phi}$$

Diese Formulierung entspricht der Einführung eines Hauptnormalspannungs-Kriteriums, wie es in der Felsmechanik üblich ist. Es wird angenommen, daß die maximale Zugspannung nicht größer sein darf als die Grenzspannung im einaxialen Zugversuch.

Bei der Berechnung der Beispiele dieser Arbeit wurde  $\sigma_{vp}$  wie in 2.) ausgeführt festgelegt. Für die Scherparameter der Beispiele ( $c' = 11 \text{ kN/m}^2$  und  $\phi' = 21^\circ$ ) ist die Festlegung von  $\sigma_{vp}$ , ob nach 1.) oder 2.), von ganz geringer Bedeutung.

Da die Einführung von  $\sigma_{vp}$  eine gewisse Willkür darstellt, wird der  $\sigma_{vp}$ -Wert als Eingabeparameter für das Computerprogramm vorgesehen. Daher ist es ohne weiteres

möglich, auch mit anderen Festlegungen für  $\sigma_{vp}$  zu rechnen.

Zusätzlich zu den Scherparametern  $c'$  und  $\phi'$  (siehe Abschnitt 4.2.1) müssen noch die "Duncan/Chang-Parameter"  $R_f$ ,  $\bar{K}$ ,  $n$  bestimmt werden. Sie ergeben sich aus den drei drainierten triaxialen Kompressionsversuchen, die bereits zur Bestimmung der Scherparameter verwendet wurden.

Die Versuchswerte werden zunächst in einem  $\left\{ \frac{\epsilon_3 \cdot p_a}{\sigma_1 - \sigma_3} \right\} / \epsilon_3$ -Diagramm aufgetragen (Bild 4.10).

Durch die Punkte eines Versuchs wird die Regressionsgerade gelegt, deren Steigung den Wert  $b$  und deren Ordinatenabschnitt  $a$  ergibt.

Weil es besonders wichtig ist, das Verhalten im Grenzbereich beim Übergang zum Fließen genau zu beschreiben, wird in [24] empfohlen, bei der Auswertung vor allem die Versuchspunkte, bei denen die Scherzahl zwischen 0.70 und 0.95 liegt, zu berücksichtigen.

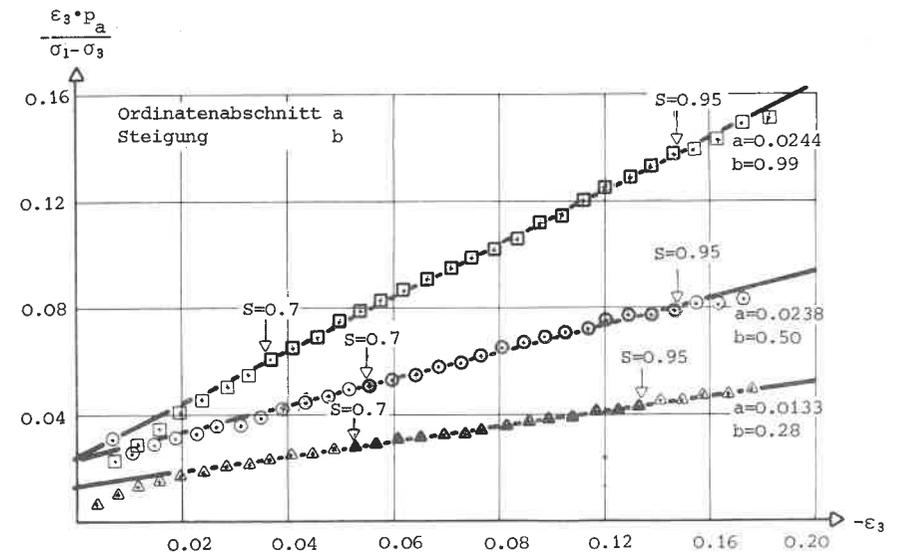


Bild 4.10: Die Bestimmung der Vorwerte für die Duncan/Chang Parameter

Aus Bild 4.10 folgt 
$$b = \frac{\frac{\epsilon_3 \cdot p_a}{\sigma_1 - \sigma_3}}{\epsilon_3} = \frac{p_a}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

D. h. aus der Spannungsdehnungsbeziehung ergibt sich eine Hauptspannungsdifferenz  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  (siehe Bild 3.1), die in Relation gesetzt werden muß zur ge-

messenen maximalen Hauptspannungsdifferenz  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ . Dazu wird der Parameter  $R_f$  eingeführt. Er ist definiert:

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad R_f = \frac{b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)_f}{p_a}$$

Da die Versuchsspuren nicht vollkommen den hyperbolischen Ansatz befriedigen, ergeben sich für verschiedene Versuche unterschiedliche  $R_f$ -Werte. Für die FE-Berechnung ergibt sich der  $R_f$ -Wert als arithmetisches Mittel aus den n Versuchen zu

$$R_f = \frac{\sum_{i=1}^n b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)_f}{n \cdot p_a} = \frac{0.813 + 0.776 + 0.772}{3} = 0.79 \quad (4.6)$$

Der Grenzspannungswert  $\sigma_{vp}$  ergibt sich für den untersuchten Boden zu

$$\sigma_{vp} = \frac{2 \cdot c' \cdot \cos \phi'}{1 + \sin \phi'} = \frac{2 \cdot 11 \cdot \cos 21^\circ}{1 + \sin 21^\circ} = 15.12 \text{ kN/m}^2$$

Zur Bestimmung der Parameter  $\bar{K}$  und n werden in doppelt logarithmischem Maßstab die Summe von Zeldruck und  $\sigma_{vp}$  sowie der Anfangsmodul  $E_i = \frac{1}{a}$  aufgetragen (Bild 4.11). Der Ordinatenabschnitt ergibt den Parameter  $\bar{K}$ , die Steigung den Exponenten n.

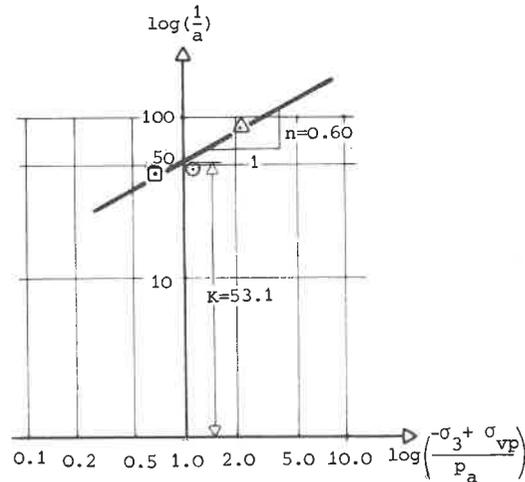


Bild 4.11: Die Bestimmung der Duncan/Chang Parameter  $\bar{K}$  und n

Für Belastungsvorgänge gilt:

$$E_t = (1 - R_f \cdot S)^2 \cdot \bar{K} \cdot p_a \cdot \left( \frac{-\sigma_1 + \sigma_{vp}}{p_a} \right)^n$$

Der tangentielle Elastizitätsmodul wird wesentlich durch den "stress-level" S bestimmt, der definiert ist zu

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot (1 - \sin \phi)}{2 \cdot c' \cdot \cos \phi' - 2 \cdot \sin \phi \cdot \sigma_1}$$

S ist also - ähnlich wie die Scherzahl von Smoltczyk - eine dimensionslose Zahl, die das Maß der Beanspruchung des Bodens angibt (S=0 keine Scherbeanspruchung, S=1 Coulomb'sches Kriterium erreicht). Der "stress-level" S ist allerdings etwas anders definiert als die Scherzahl s (Vergl. dazu S.84).

Der Elastizitätsmodul für Entlastung und Wiederbelastung ist vom "stress-level" unabhängig. In Anlehnung an [24] wird für Ent- und Wiederbelastung die Formel von Ohde verwendet:

$$E_{un} = \bar{K}_{un} \cdot p_a \cdot \left( \frac{-\sigma_1 + \sigma_{vp}}{p_a} \right)^n$$

Als Entlastungsvorgang bezeichnet man einen Spannungsweg für den  $dS < 0$ , Wiederbelastung ist gegeben, wenn  $dS > 0$  und  $S < S_{max}$ .

Für die Berechnungsbeispiele dieser Arbeit wurde angenommen  $\bar{K}_{un} = \bar{K} = 53.1$  und  $\mu_o = 0.15$ .

#### 4.2.3 Stoffparameter für das Modell NOEL

Da bei den triaxialen Scherversuchen keine Volumenmessungen durchgeführt wurden, müssen die Stoffparameter für das Stoffgesetz NOEL aus den Scherparametern  $c'$  und  $\phi'$  und einem Oedometerversuch, wie in 3.1.2 beschrieben, gewonnen werden. Aus den triaxialen Scherversuchen (Bild 4.7) ergibt sich  $c' = 11 \text{ kN/m}^2$  und  $\phi' = 21^\circ$ . Mit verschiedenen Gruppen von Stoffparametern wird nun das Diagramm des Oedometerversuchs nach Gleichung 3.25 berechnet. Die Fläche zwischen der gerechneten und beim Oedometerversuch gemessenen Kurve wird zu einem Minimum bei den Stoffparametern

$$\begin{aligned} G_o &= 383.3 \text{ kN/m}^2 & \alpha_G &= 6.7 & \beta_G &= 18.66 \\ K_o &= 420.0 \text{ kN/m}^2 & \alpha_K &= 20.0 & \mu_o &= 0.15 \text{ (entsprechend den Angaben in [83])} \end{aligned}$$

(Zur Bestimmung der Parameter siehe Bild 4.12)

Für Entlastung und Wiederbelastung wird näherungsweise angenommen, daß das Hooke'sche Gesetz gilt und  $\mu_o = \mu_{un}$  ist.

Damit können die elastischen Konstanten für Entlastung und Wiederbelastung  $G_{un}$  und  $K_{un}$  berechnet werden.

a.) Aus Gleichung 2.14 ff. folgt:

$$\mu_{un} = \frac{3 \cdot K_{un} - 2 \cdot G_{un}}{6 \cdot K_{un} + 2 \cdot G_{un}}$$

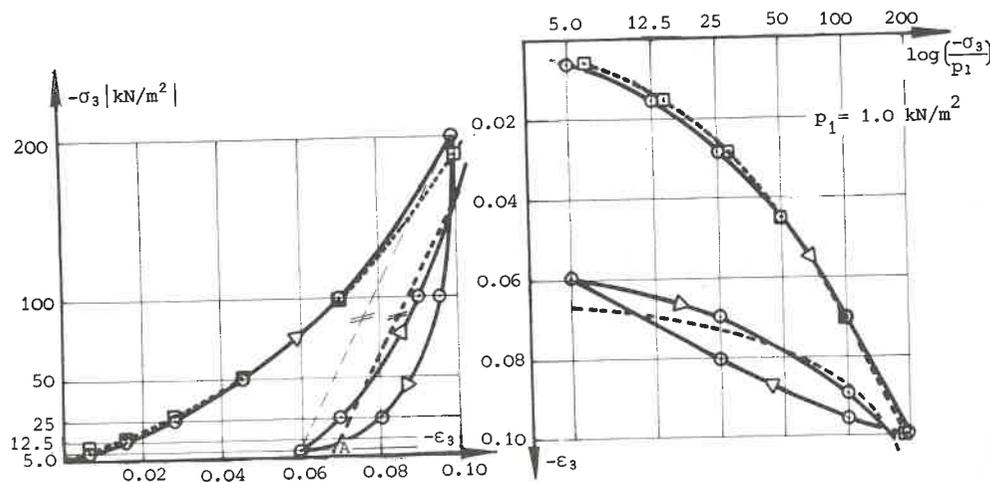
Für  $\mu_{un} = 0.15$  folgt daraus  $K_{un} = 1.095 \cdot G_{un}$ .

b.) Aus Gleichung 3.13 und der Geraden AB in Bild 4.12 ergibt sich:

$$\sigma_3 = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot G + 3 \cdot K) \cdot \epsilon_3 \quad 195 = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot G_{un} + 3 \cdot K_{un}) \cdot 0.0415$$

Aus a.) und b.) folgt:

$$G_{un} = 1935 \text{ kN/m}^2 \quad K_{un} = 2120 \text{ kN/m}^2$$



a.) natürlicher Maßstab

b.) halblogarithmischer Maßstab

- Meßwerte des Oedometersversuchs
- - -□- - Nachrechnung des Oedometersversuchs

Bild 4.12: Diagramm des Oedometersversuchs zur Bestimmung der Stoffparameter für das Stoffgesetz NOEL

### 4.3 1. Beispiel: KREISPLATTE AUF HALBRAUM

#### 4.3.1 Idealisierung des Problems

Die hier zugrundegelegten Lastplattenversuche wurden in einer 1.5 m tiefen Baugrube durchgeführt (Bild 4.13). Deshalb muß nicht nur der Belastungsvorgang durch die Lastplatte, sondern auch der Aushubvorgang in der FE-Rechnung simuliert werden.

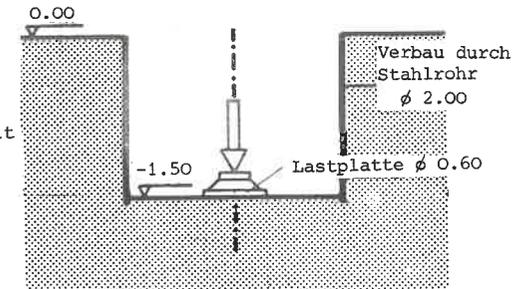


Bild 4.13: Baugrube mit Lastplatte

Eine Voruntersuchung hat gezeigt, daß es genügt, den Boden unterhalb der Lastplatte zu diskretisieren und den Boden oberhalb durch eine entsprechende seitliche Auflast zu berücksichtigen.

Bild 4.14 zeigt, daß der "Fehler", der durch diese Vereinfachung verursacht wird, im Einflußbereich der Lastplatte nicht größer als 3% ist. Als Fehler" ist hier der Unterschied in der Oktaederschubspannung aus zwei linear-elastischen Be-

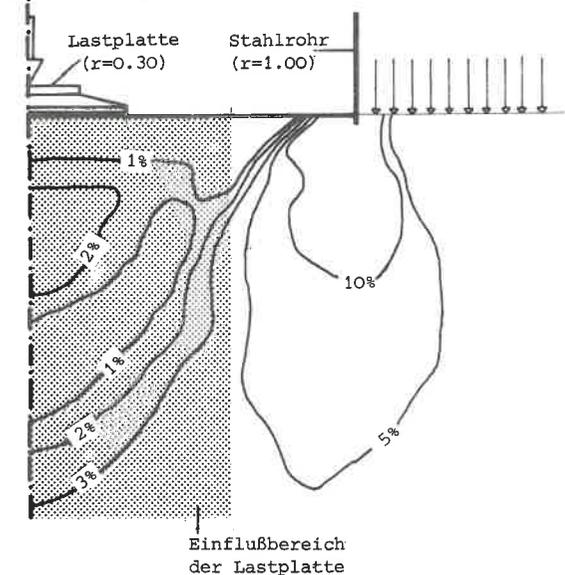
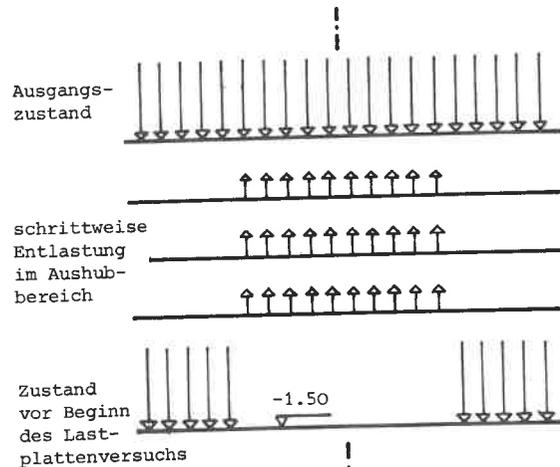


Bild 4.14: Fehler infolge der Idealisierung des Aushubs

rechnungen aufgetragen, der durch die Oktaederschubspannung des Ausgangszustandes normiert wird (für die linear-elastische Berechnung wurden durchgehend  $E = 10000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\mu = 0.2$  angesetzt. Der Wert von 0.2 für die Querkontraktionszahl wird gewählt als Mittelwert zwischen der in [83] angegebenen Größe von 0.10 bis 0.20 und den meist [24,35] angegebenen Werten von 0.30 bis 0.40.

Der Aushubvorgang wird dadurch simuliert, daß zunächst durchgehend eine Gleichlast von  $15 \text{ kN/m}^2$  aufgebracht wird; im Bereich der Baugrube wird sie dann schrittweise abgebaut (Bild 4.15), so daß zu Beginn des Lastplattenversuchs die Vertikalspannung in der Baugrubensohle Null ist.



Lastplattenversuch:  
Die starre Belastung wird durch vorgeschriebene Verschiebungen simuliert, die schrittweise aufgebracht werden.

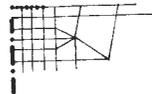


Bild 4.15: Idealisierung der Belastungsgeschichte

#### 4.3.2 Vergleich der Ergebnisse der nichtlinearen Berechnungen mit den Versuchsergebnissen

In Bild 4.16 sind die Ergebnisse der Berechnungen und des Feldversuchs zusammengestellt. Als Nullzustand für die Verschiebungen wurde der Zustand unmittelbar vor Beginn des Lastplattenversuchs angenommen. D.h. der Aushubvorgang wurde in der Berechnung zwar simuliert, aber der Verlauf der Hebung der Baugrubensohle wird nicht weiter untersucht, da hierfür keine Meßergebnisse vorliegen und dieser Vorgang im Vergleich zur Belastung unbedeutend ist.

Der Feldversuch wurde weggesteuert bis zu einer maximalen Verschiebung von 4.896 cm gefahren, da eine weitere Steigerung der Verschiebung aufgrund der Versuchseinrichtung nicht mehr möglich war. Das Last-Setzungsdiagramm des Versuchs zeigt, daß ab einer Setzung von 3.5 cm das Verhältnis von Laststeigerung zu Setzungszunahme konstant bleibt. Die Last-Setzungslinie ist also dadurch charakterisiert, daß sich an eine gekrümmte Kurve eine Gerade anschließt. Für Linien dieses Typs wird von Terzaghi/Jelinek ([76], S. 120) empfohlen, als "Traglast" die Last anzusetzen, bei der die gekrümmte Kurve in die Gerade übergeht. Diese Last soll im folgenden zur Grundlage des Vergleichs mit den Rechenergebnissen herangezogen werden und wird daher als Vergleichslast bezeichnet.

Bei den FE-Berechnungen wird die Last als Grenzlast definiert, bei der sich unter der Lastplatte eine bis zur Oberfläche durchgehende Fließzone (Gebiet in dem die Fließfläche erreicht oder überschritten ist) ausgebildet hat.

Aus Bild 4.16 sieht man, daß die mit den Stoffgesetzen ELPL und Duncan/Chang erreichten Grenzlasten in derselben Größenordnung wie die Vergleichslast des Feldversuchs liegen, während die Nichtlinearität des Last-Setzungsdiagramms am besten mit dem Stoffgesetz NOEL 1 widergegeben wird. Qualitativ ergeben auch die Berechnungen mit den Stoffgesetzen NOEL 2 und Duncan/Chang den nichtlinearen Last-Setzungs-Verlauf des Feldversuchs.

Überhaupt nicht erfaßt wird die Nichtlinearität durch das elasto-plastische Stoffgesetz ELPL 2. Die Gründe dafür sind:

- die auf der Basis des Modells ELPL 2 und der gemessenen Kohäsion von  $11,0 \text{ kN/m}^2$  errechnete Vorbelastung ist im Vergleich mit der Belastung durch die Lastplatte so groß, daß sich eine idealelastisch-idealplastisches Verhalten ergibt.
- D. h. die Kappe liegt außerhalb des Bereichs, in dem die Spannungswege liegen,

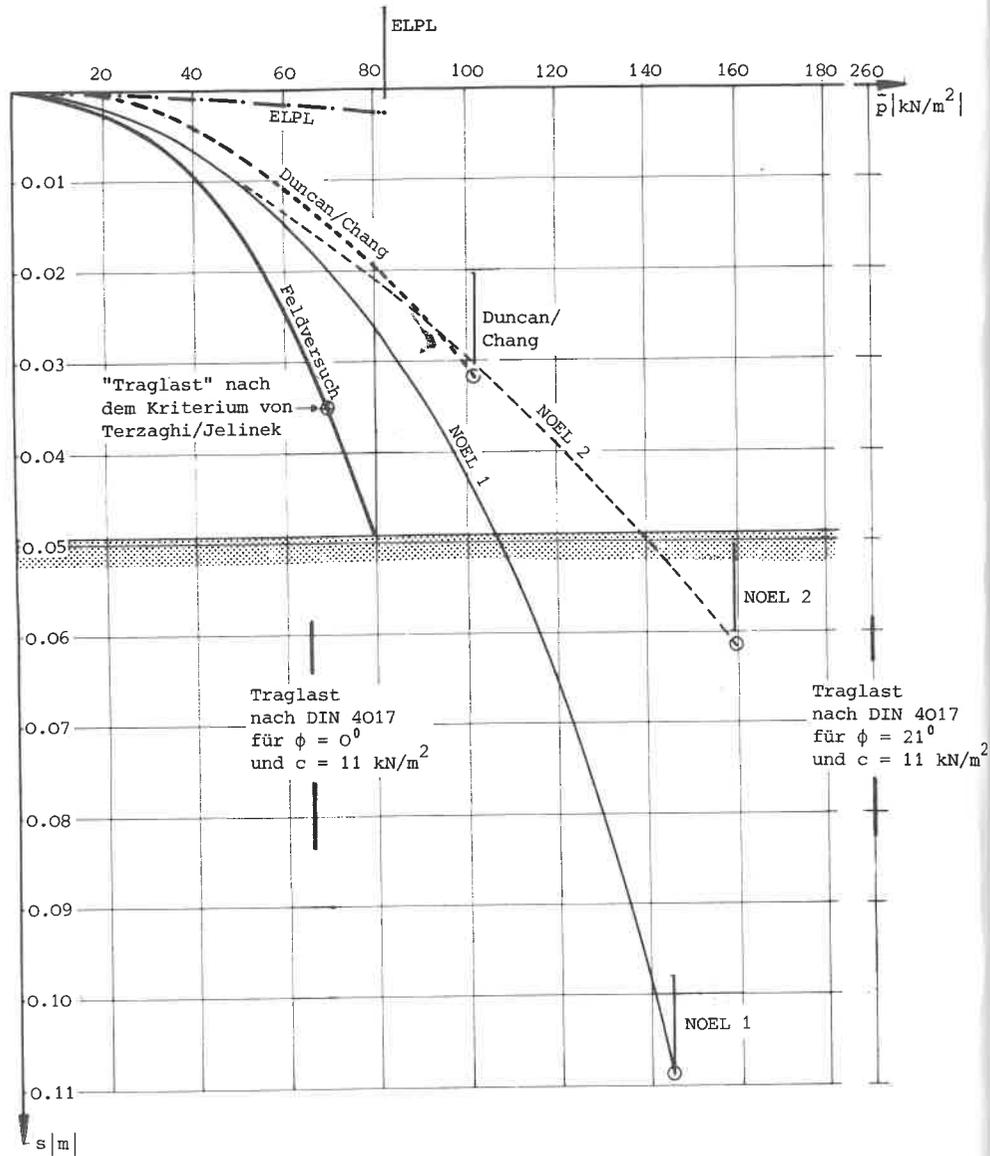


Bild 4.16: Last-Setzungsdiagramme aus Versuch und Rechnung

und deshalb gibt es niemals Fließen auf der Kappe, also Fließen mit Verfestigung (s. Bild 4.17);

- die Fließzone erfährt nur eine geringe Ausbreitung, und die "elastische Last" (Last, bei der an keinem Punkt des Kontinuums Fließen auftritt) ist bereits halb so groß wie die Grenzlast;
- der Elastizitätsmodul ist zu groß, so daß auch die Anfangsneigung viel zu klein ist. Dieser Mangel liegt allerdings weniger im Ansatz begründet als vielmehr in der Unsicherheit bei der Bestimmung der Materialparameter. So gibt Thamm [77] einen Schwellbeiwert für den von ihm untersuchten Ton von 0 bis 0.06 an. Außerdem ist die zuverlässige Bestimmung der Kohäsion bei dem anstehenden Seeton nur schwer möglich. Und sowohl der Schwellbeiwert als auch die Kohäsion, über die Vorbelastung, sind umgekehrt bzw. direkt proportional dem Elastizitätsmodul (s. Gl. 2.53). Durch entsprechende Variation der Parameter wäre es also ohne weiteres möglich, eine Übereinstimmung in der Anfangsneigung zwischen Versuch und elasto-plastischer Berechnung zu erzielen.

Die nichtlinear-elastischen Stoffgesetze ergeben durch die stetige Abnahme des Elastizitäts- bzw. Schubmoduls eine wesentlich größere Ausbreitung der "Fließzone" (Bereiche mit einer Scherzahl  $\geq 1$ ) und infolgedessen eine größere Grenzlast als das elasto-plastische Stoffgesetz. Dieser Effekt ist aufgrund der Unstetigkeit in der Formulierung bei Duncan/Chang (s. Bild 3.1) nicht so ausgeprägt wie bei dem Stoffgesetz NOEL.

Da bei NOEL 2 auch nach dem Erreichen des Coulomb'schen Kriteriums noch Spannungen aufgenommen werden können - sofern das Grenzspannungsverhältnis eingehalten wird - ergibt diese Formulierung ein steiferes Verhalten als die von NOEL 1. Wenn nun in diesem Fall das Stoffgesetz NOEL 2 das Versuchsergebnis schlechter approximiert als NOEL 1, so wäre es voreilig, daraus zu schließen, die pseudo- bzw. hypoelastischen Stoffgesetze seien besser als die elasto-plastischen. Z. B. zeigt sich bei der Berechnung eines Streifenfundaments auf Sand in [1], daß die pseudoelastischen Stoffgesetze viel zu kleine Traglasten ergeben.

Außerdem ist zu fragen, wie weit die Materialparameter zutreffen, die für die Berechnung verwendet wurden. In Bild 4.17 ist der Bereich der Spannungswege dargestellt, die die Coulomb'sche Gerade erreichen. Man sieht, daß die hydrostatischen Spannungen in diesem Bereich relativ niedrig sind und folglich die Traglast wesentlich durch die Größe der Kohäsion bestimmt wird. Bei der Durchführung des Laborprogramms hat sich gezeigt, daß die Kohäsion nur schwer zutreffend beurteilt werden kann. Wenn man also die Streubreite von Feldversuch

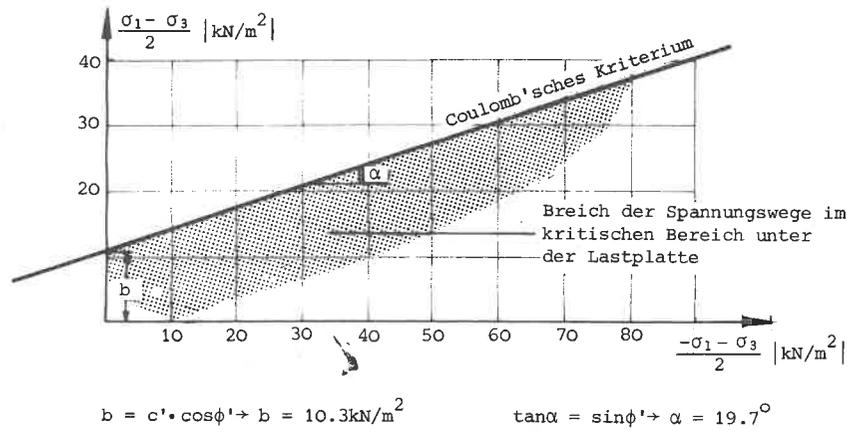


Bild 4.17: Bereich der Spannungswege in der kritischen Zone unter der Lastplatte

und Berechnung betrachtet, muß diese ins Verhältnis gesetzt werden zur Streubreite bei der Bestimmung der Kohäsion. Die Ergebnisse von Feldversuch und FE-Berechnungen haben eine Abweichung von maximal  $\pm 30\%$  von einem Mittelwert von  $110 \text{ kN/m}^2$ . Das ist etwa dieselbe Streubreite, wie sie auf Grund umfangreicher Laboruntersuchungen in [77, S. 37] für einen ähnlichen Boden bei den Scherparametern festgestellt wurde (Streubreite:  $c' \pm 25\%$ ,  $\phi' \pm 7\%$ ).

Unter diesem Aspekt kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß bei der Nachrechnung des Lastplattenversuchs das elasto-plastische Stoffgesetz ELPL eine brauchbare Aussage über die Traglast liefert, nicht jedoch über die Verformungen; die Berechnungen mit den nichtlinear-elastischen Modellen führen zu brauchbaren Ergebnissen bezüglich der Traglast und der Verformungen.

#### 4.4 2.Beispiel: BAUGRUBE

Bei der Berechnung der Baugrube soll vor allem die Effektivität der Rechenverfahren dargestellt werden, die zur numerischen Approximation der Nichtlinearität notwendig sind. Da die Belastung bei einer ausgereiften Baugrube nicht monoton erfolgt, ist die Art der inkrementellen und/oder iterativen Erfassung der Nichtlinearität des Stoffverhaltens von besonderer Bedeutung. Bei Problemen mit monotoner Belastung und einfachen Randbedingungen wie bei der Lastplatte ergeben sich dagegen keine Schwierigkeiten bei der numerischen Erfassung der Nichtlinearität.

Als Vergleichsgrößen der verschiedenen Berechnungen werden die Steifenkräfte gewählt. Da die Beanspruchung der Verbauwand in etwa proportional zu den Steifenkräften ist, sind die Steifenkräfte ein geeigneter Maßstab für die Kosten des Verbaus.

Da es zum einen nicht notwendig und zum andern ökonomisch nicht vertretbar ist, alle iterativen und inkrementellen Rechenverfahren zur Erfassung der Nichtlinearität mit allen Stoffgesetzen auszutesten, wurden folgende Einschränkungen getroffen:

- Austesten der Netzeinteilung und der inkrementellen/iterativen Rechenverfahren mit dem Stoffgesetz von Duncan/Chang in der in Abschnitt 4.2.2 dargestellten Form;
- Vergleich der Stoffgesetze untereinander aufgrund von Berechnungen mit dem feinen Netz.

##### 4.4.1 Diskretisierung, Wahl der Lastschritte, Anzahl der Iterationen

Die Verbundwirkung zwischen Verbau und Boden wird durch die in [45] beschriebenen Kontaktelemente simuliert. Dabei wird angenommen, daß der Wandreibungswinkel  $\delta = \frac{2}{3}\phi'$  ist und zwischen Verbau und Boden keine Kohäsion wirkt ( $c'=0$ ). Die Nichtlinearität vor Erreichen des Coulomb'schen Kriteriums wird für alle Berechnungen durch die in Abschnitt 4.2.2 für das Stoffgesetz von Duncan/Chang ermittelten Parameter definiert. Um den Einfluß der Netzeinteilung festzustellen, werden mit dem Stoffgesetz von Duncan/Chang Berechnungen für die beiden in Bild 4.3 dargestellten Netze durchgeführt. Aus Bild 4.18 sieht man, daß der Einfluß der Diskretisierung auf die Steifenkräfte relativ klein ist. Die grobe Netzeinteilung ist also fein genug für die Berechnung der Steifenkräfte.

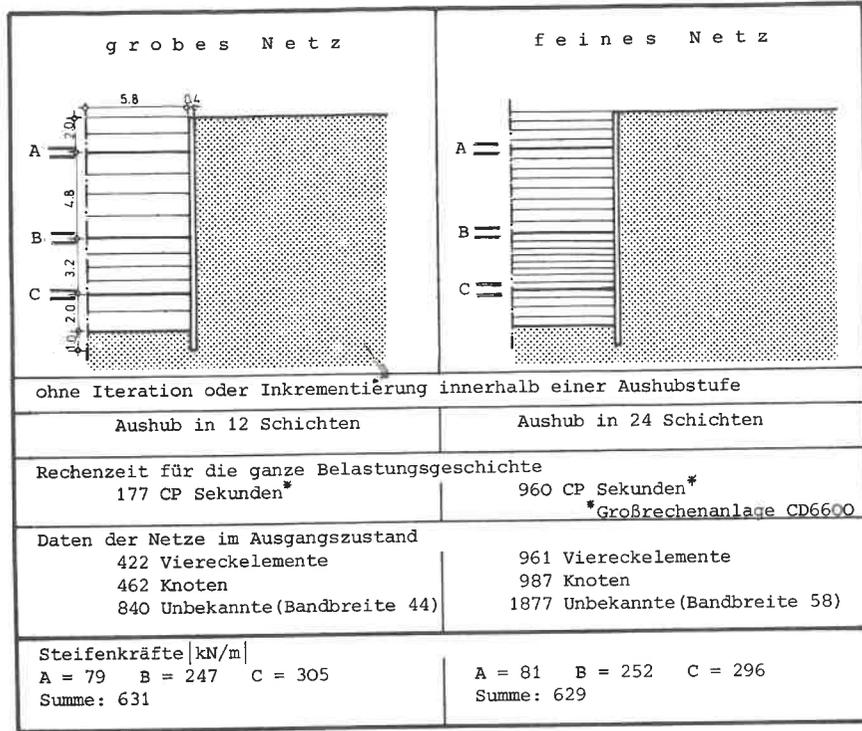


Bild 4.18: Einfluß der Diskretisierung

Um den Einfluß der in Bild 4.1 dargestellten Methoden zur Erfassung der Nichtlinearität zu ermitteln, werden drei verschiedene Verfahren getestet. Eine ausführliche Beschreibung der grundlegenden Verfahren "Methode der tangentialen Steifigkeit" und "Methode der Anfangslasten" findet sich in [3,45 und 67].

Die getesteten Verfahren sind:

1. Die Lasten, die sich in einer Aushubstufe ergeben, werden in Inkremente eingeteilt. Dieses Verfahren entspricht der einfachen Methode der tangentialen Steifigkeit (Bild 4.1 b).

Abkürzung: TS.

2. In einer Aushubstufe werden die elastischen Parameter so variiert, daß sich eine optimale Anpassung an die durch das Stoffgesetz gegebene Funktion ergibt. Da von Aushubstufe zu Aushubstufe die Methode der tangentialen Steifigkeit verwendet wird und innerhalb einer Aushubstufe eine iterative Verbesserung

der Steifigkeit erfolgt, kann man dieses Verfahren als iterative Version der Methode der tangentialen Steifigkeit bezeichnen (Bild 4.1 d).

Abkürzung: It. TS.

3. Von Aushubstufe zu Aushubstufe werden die elastischen Parameter und damit die Steifigkeit entsprechend dem jeweiligen Spannungszustand geändert. Der "overshoot", also der Spannungsanteil, der über das Coulomb'sche Kriterium hinausgeht, wird mit Hilfe der Methode der Anfangslasten umgelagert (siehe Abschn. 2.1.3).

Dabei wird angenommen, daß die Normalspannung konstant ist und somit die Schubspannung durch Anfangslasten soweit reduziert werden muß, bis das Coulomb'sche Kriterium erfüllt ist.

Bei diesem Verfahren handelt es sich also um eine Kombination der Methode der tangentialen Steifigkeit mit der iterativen Methode der Anfangslasten (s. Bild 4.1 h).

Abkürzung: TS + It. AL.

Um das Konvergenzverhalten bei dem Verfahren TS + It.AL. zu verbessern, werden die Anfangslasten ( $\Delta G_i^j$ ) "gedämpft". Es werden nicht die in der jeweiligen Iteration  $j$  berechneten Anfangslasten ( $\Delta F_i^j$ ) genommen, sondern das arithmetische Mittel aus den in der Iteration  $j$  ermittelten Kräften und den in der vorhergehenden Iteration  $j-1$  berechneten ( $\Delta F_i^{j-1}$ ).

$$\Delta G_i^j = \frac{\Delta F_i^j + \Delta F_i^{j-1}}{2}$$

Diese Mittelbildung entspricht der in [61, S. 73] beschriebenen Dämpfung

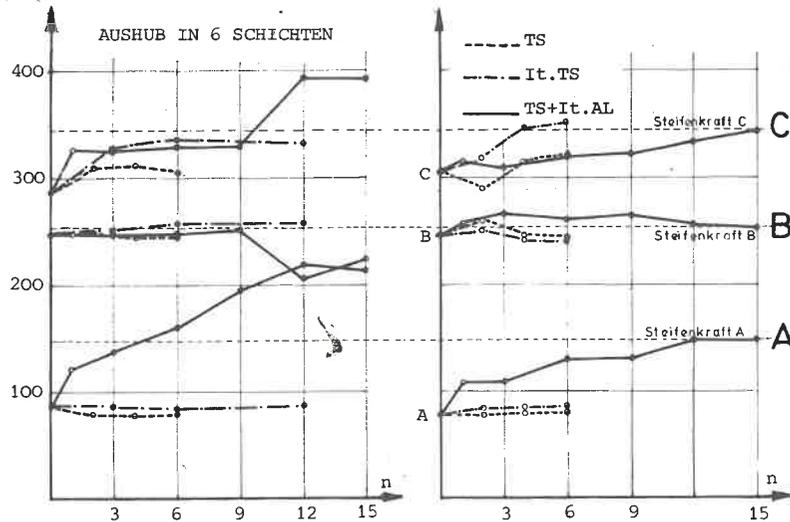
$$\Delta G_i^j = (1 - \rho) \cdot \Delta F_i^{j-1} + \rho \cdot \Delta F_i^j$$

für  $\rho = 0.5$ .

Die Ursachen für die Notwendigkeit der Dämpfung sind dieselben, die in [61, S. 73] für geometrisch nichtlineare Probleme angegeben werden:

"In vielen Fällen werden - ausgelöst durch die Linearisierung - unverhältnismäßig große Ungleichgewichtskräfte im System erzeugt. An den unbelasteten Freiheitsgraden wird häufig "über das Ziel hinausgeschossen". Diese nachteilige Wirkung trifft insbesondere beim modifizierten Newton-Raphson-Verfahren (Kombination von TS und AL) zu."

Steifenkraft |kN/m|  
bei vollem Aushub



Die Aushubschichten sind die "Oberinkremente" innerhalb derer n Iterationen durchgeführt werden bzw. die wieder in n "Unterinkremente" eingeteilt werden.

n bedeutet also bei den verschiedenen Verfahren:

- TS..... Anzahl der Inkremente pro Aushubschicht
- It.TS..... Anzahl der Iterationen pro Aushubschicht,
- TS+It.AL.. keine Einteilung in "Unterinkremente"

Bild 4.19: Die Abhängigkeit der Steifenkräfte von den Lastinkrementen und Iterationen

In Bild 4.19 sind die Steifenkräfte in Abhängigkeit von der Anzahl der Inkremente und der Iterationen für die verschiedenen Verfahren aufgetragen. Man sieht, daß in dem Fall "Aushub in 6 Schichten" das Verfahren TS+It.AL nicht konvergiert, wenn man als Kriterium die Unveränderlichkeit der Steifenkräfte bei einer Steigerung der Anzahl der Inkremente bzw. Iterationen annimmt. Denn die Stufen, in denen die Steifigkeit variiert wird, sind so groß, daß die Anfangslasten nicht mehr in der Lage sind, die Abweichungen vom Coulomb'schen Kriterium auszugleichen.

Das Konvergenzverhalten der Verfahren TS und It. TS scheint zwar sehr stabil, die Steifenkräfte werden jedoch unterschätzt. Bild 4.20 zeigt, daß mit den Verfahren TS und It. TS der "Spannungsüberschuß", der über das Coulomb'sche Kriterium hinausgeht, nur unzureichend abgebaut wird. Durch diese numerische Ungenauigkeit wird die Scherfestigkeit des Materials überschätzt, und somit ergibt sich eine Unterschätzung der Steifenkräfte.

AUSHUB IN 12 SCHICHTEN

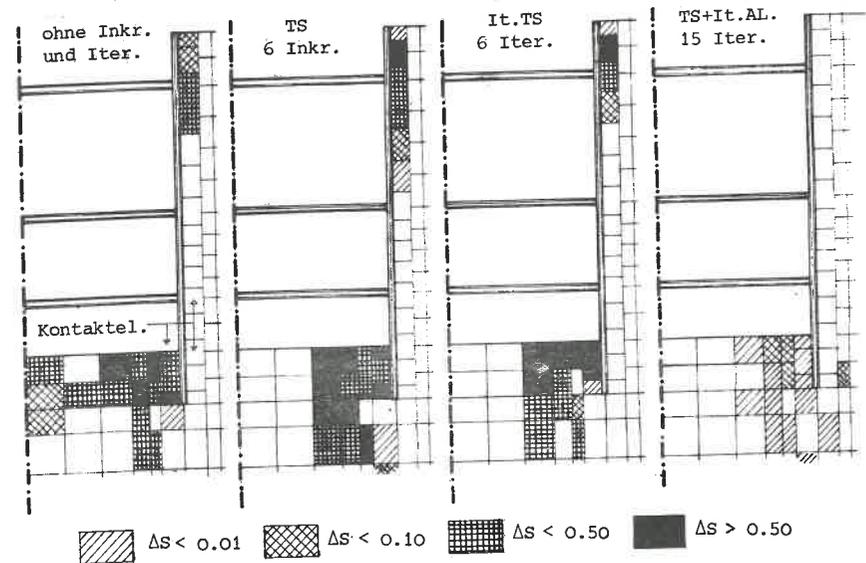


Bild 4.20: Überschreitung des Coulomb'schen Kriteriums bei verschiedenen nichtlinearen Verfahren

Die Methode TS + It. AL erweist sich als die effektivste im Hinblick auf die Rechenzeit. Da innerhalb einer Aushubstufe die Steifigkeit konstant bleibt, ergibt sich von Iteration zu Iteration nur eine Änderung der rechten Seite des Gleichungssystems. Für das grobe Netz werden folgende Rechenzeiten für eine Iteration benötigt:

It. TS 10.6 CP sec, TS + It. AL 1.5 CP sec.

Bei 12 Iterationen mit der Methode der Anfangslasten pro Aushubstufe erhöht sich die Rechenzeit um 125% auf insgesamt 400CP Sekunden gegenüber der Rechenzeit ohne jede Inkrementierung und Iteration. Dieser Aufwand ist zum einen notwendig zur hinreichend genauen Erfüllung des Fleißkriteriums (s. Bild 4.20), zum andern ist er nicht so groß, daß dadurch die Berechnung unwirtschaftlich oder gar unmöglich würde. Die Untersuchung hat gezeigt, daß von den getesteten Verfahren die Methode TS+It.AL optimal ist, jedoch den Nachteil hat, daß sie nicht in jedem Fall konvergiert und Divergenz deshalb nicht unbedingt ein Zeichen dafür ist, daß die Grenzlast überschritten wurde.

Im allgemeinen wird man eine geeignete Konvergenznorm einführen (|61, S. 72| und

nicht die Anzahl der Iterationen variieren wie in diesem Beispiel. Da bei der Baugrube jedoch gezeigt werden sollte, welchen Einfluß die verschiedenen Faktoren der numerischen Verfahren auf die Größen haben, die Maßstab sind für die Kosten der Konstruktion, wurde kein abstraktes Konvergenzkriterium gewählt, sondern es wurde die Entwicklung dieser Größen in Abhängigkeit von den Inkrementen und Iterationen untersucht.

4.4.2 Vergleich der Ergebnisse von FE-Berechnungen mit den Ergebnissen konventioneller Rechenverfahren

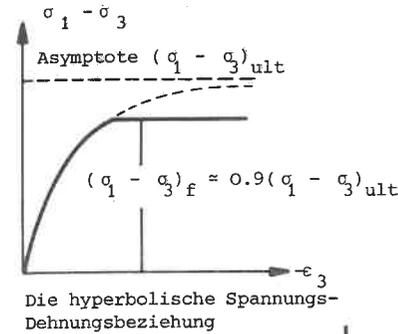
Aus der Zusammenstellung Bild 4.21 sieht man, daß die Art, wie das Stoffverhalten mit einem pseudoelastischen Ansatz erfaßt wird, ohne großen Einfluß auf die Steifenkräfte ist. Der Einfluß des Stoffmodells liegt bei den Steifenkräften in der gleichen Größenordnung wie die Ungenauigkeiten auf Grund des numerischen Näherungsverfahrens. Es zeigt sich also, daß es weniger darauf ankommt, wie die Nichtlinearität im Rahmen eines bestimmten theoretischen Konzepts erfaßt wird, als vielmehr darauf, daß sie überhaupt erfaßt wird.

STEIFEN - KRÄFTE   kN/m	DUNCAN / CHANG	NOEL	
		NOEL 1	NOEL 2
feines Netz 24 Aushubstufen ohne Iteration	siehe Abschnitt 4.2.2	siehe Abschnitt 3 und 4.2.3	
A	81	68	54
B	252	230	216
C	296	308	259
Summe	629	608	529

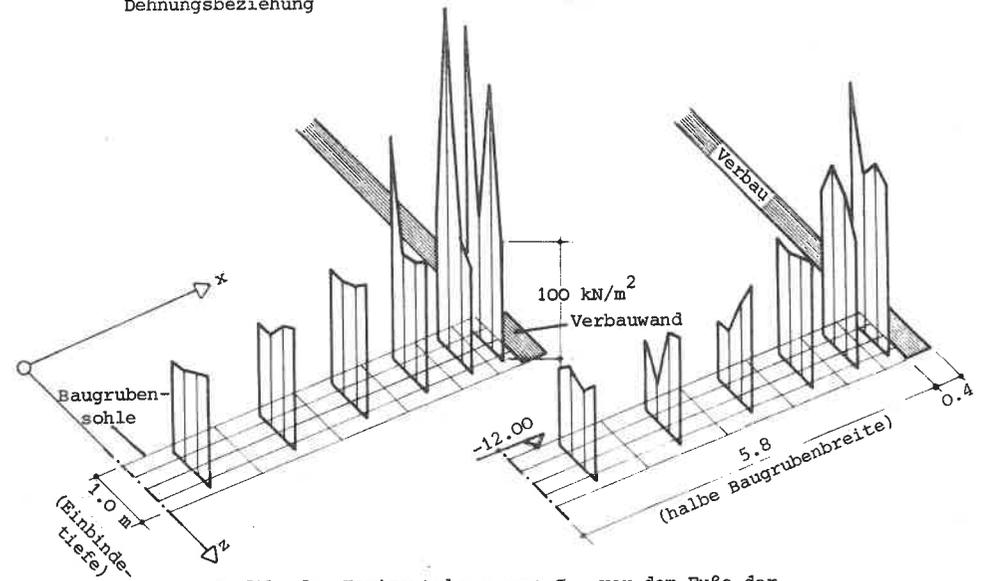
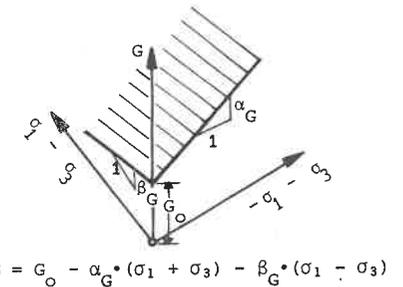
Bild 4.21: Steifenkräfte bei verschiedenen Stoffgesetzen

Die Art, wie die Nichtlinearität formuliert wird, hat zwar keinen großen Einfluß auf globale Größen wie z. B. Steifenkräfte und Wandverschiebung, jedoch bei der Spannungsverteilung an einer kritischen Stelle zeigt sich der Vorteil der Formulierung NOEL. Man sieht aus Bild 4.22, daß die Unstetigkeit in der Formulierung von Duncan/Chang (siehe Bild 3.1) mit eine Ursache der Spannungsozillationen vor der Verbauwand ist, denn die stetige Formulierung des Modells NOEL ergibt eine gleichförmigere Spannungsverteilung. Ein weiterer wesentlicher Grund für die Oszillationen ist die Ungenauigkeit des numerischen Verfahrens (dazu siehe [11, 25, 55]).

DUNCAN / CHANG



NOEL



Profile der Horizontalspannung  $\sigma_{xx}$  vor dem Fuße der Verbauwand (Feines Netz, 24 Aushubstufen ohne Iteration)

Bild 4.22: Einfluß des Stoffgesetzes auf die Spannungsverteilung

Der Vergleich von konventioneller Berechnung und FE-Analyse in Bild 4.23 (stellvertretend für die FE-Berechnung werden die Ergebnisse aus der Berechnung mit dem Stoffgesetz von Duncan/Chang verwendet) zeigt, daß die Summe der Steifenkräfte der FE-Berechnung in etwa übereinstimmt mit denen aus der Rechnung mit erhöhtem aktivem Erddruck (Empfehlung [80]). Der Verlauf des Erddrucks und damit das Verhältnis der Steifenkräfte untereinander liegt bei der FE-Berechnung zwischen der Rechnung mit dreieckförmiger Erddruckverteilung, wie sie sich aus

der Coulomb'schen Erddrucktheorie für frei verformbare Stützbauwerke ergibt, und dem Ansatz einer rechteckigen Erddruckfläche, wie sie in [80] für Baugrubenwände empfohlen wird. Die Ergebnisse der FE-Berechnungen zeigen also dieselbe Tendenz wie fast alle Messungen an ausgesteiften oder verankerten Baugruben: die Resultierende des Erddrucks liegt, im Gegensatz zur Coulomb'schen Erddrucktheorie, eher in der Wandmitte als im unteren Drittelpunkt. Da die Fließzonen (Bereiche, in denen das Fließkriterium erreicht oder überschritten ist) bei der Baugrube bei weitem nicht so ausgedehnt sind wie bei der Lastplatte, ist die Übereinstimmung der einzelnen FE-Berechnungen untereinander und mit den konventionellen Verfahren noch besser als bei der Lastplatte.

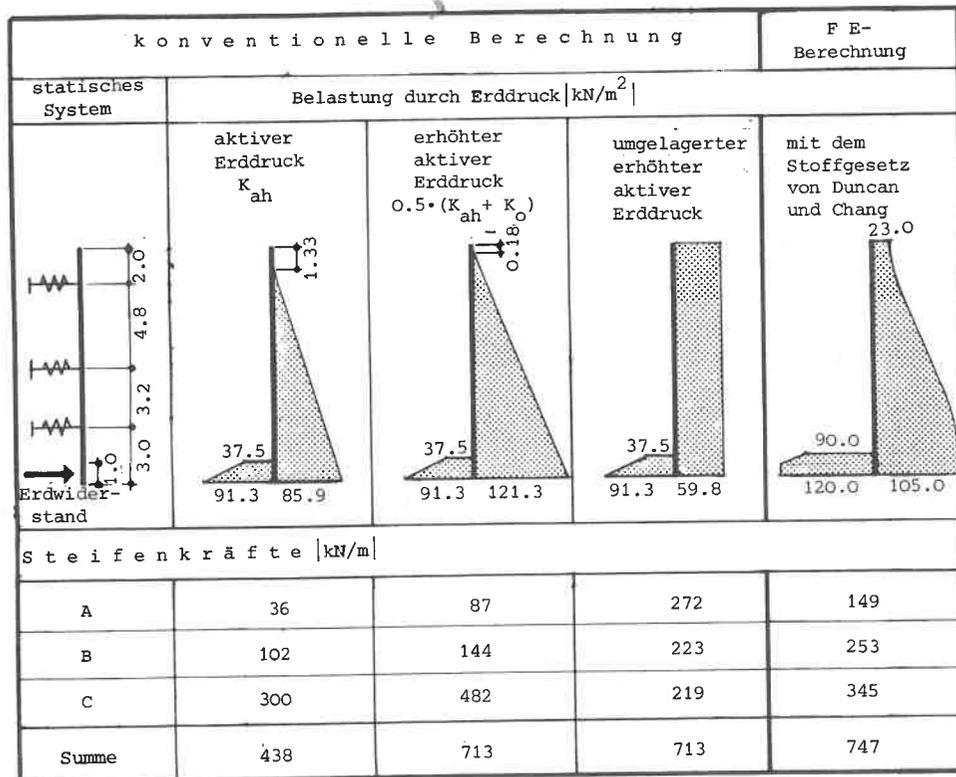


Bild 4.23: Stiefenkräfte bei verschiedenen Erddruckansätzen

## 5. Zusammenfassung

Mit der Anwendung von FE-Programmen im Grundbau wurde die Frage aktuell, mit welchen Stoffgesetzen diese Berechnungen durchgeführt werden können und sollen. Denn das ausgeprägt nichtlineare Verhalten des Bodens läßt sich mit dem Hooke'schen Gesetz nicht beschreiben.

Für die Formulierung und Implementierung von Spannungs-Verzerrungsbeziehungen zur Berechnung komplexer Probleme aus der Baupraxis ergeben sich im wesentlichen folgende Kriterien:

1. Das Stoffgesetz soll möglichst einfach in ein FE-Programm implementiert werden können. Daraus ergibt sich die Forderung nach einem klaren modularen Aufbau der Programmsysteme.
2. Das Stoffgesetz soll durch möglichst wenig Parameter definiert sein. Diese sollen entweder durch einfache Versuche bestimmt werden können oder aber in einem direkten Zusammenhang zu einfach meßbaren Kennwerten stehen.
3. Die Berechnung muß wirtschaftlich sein. Um die Rechenzeiten niedrig zu halten, ergibt sich der Zwang zur Optimierung der Rechentechniken, die die Nichtlinearität simulieren.

In der vorliegenden Arbeit wurden nun zwei grundsätzlich verschiedene Stoffgesetze, ein nichtlinear-elastisches und ein elastoplastisches, formuliert, in ein FE-Programm implementiert, die entsprechenden Stoffparameter für einen schwach vorbelasteten Ton bestimmt und FE-Berechnungen von zwei typischen Randwertproblemen (Lastplatte und Baugrube) des Grundbaus durchgeführt.

Die Nachrechnung des Lastplattenversuchs zeigt, daß das elasto-plastische Modell gut geeignet ist zur Bestimmung der Traglast, nicht jedoch für die Ermittlung der Verformungen. Mit den nichtlinear-elastischen Modellen ergibt sich eine brauchbare Übereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung sowohl bei der Traglast als auch bei den Verformungen.

Bei der Berechnung einer ausgesteiften Baugrube zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den verschiedenen pseudo-elastischen Modellen. Der Vorteil des neu formulierten Stoffgesetzes NOEL gegenüber dem Gesetz von Duncan/Chang liegt weniger in der besseren Approximation der Realität als vielmehr in der einfacheren Bestimmung der Stoffkonstanten, der klareren mathematischen Formulierung und der größeren numerischen Stabilität.

Für die Formulierung und Implementierung von Stoffgesetzen können folgende Schlußfolgerungen gezogen werden:

1. Nichtlinear-elastische Stoffgesetze vom Typ der inkrementellen Hooke'schen Formulierung (z.B. Noel,Duncan/Chang) sind geeignet zur Berechnung von Verformungen, solange an keinem Punkt des Kontinuums Fließen oder Bruch auftritt oder wenn diese Zonen relativ klein sind.
2. Es hat sich gezeigt, daß linearelastisch-idealplastische Modelle und elastoplastische Modelle mit einem großen linear-elastischen Bereich geeignet sind zur Berechnung von Grenzlasten und kritischen Bereichen; zutreffende Aussagen über Verformungen sind jedoch erst dann möglich, wenn Verfestigungsgesetze implementiert werden, die das nichtlineare Verhalten des Bodens schon weit vor dem Erreichen der Versagensfläche beschreiben.
3. Für die quantitative Beurteilung einer nichtlinearen FE-Berechnung ist die exakte numerische Simulation der Nichtlinearität durch entsprechende inkrementelle/iterative Verfahren sowie die Art der Einteilung des Kontinuums in Elemente von entscheidender Bedeutung. Als sehr effektiv hat sich in dieser Arbeit ein modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren (Kombination von Methode der tangentialen Steifigkeit und Methode der Anfangslasten) erwiesen. Durch eine weitere Verbesserung der inkrementellen/iterativen Verfahren und die Entwicklung neuer Elementtypen, z.B. gemischter Elemente (Formulierung auf der Basis des Prinzips von Hellinger-Reissner), kann die Effektivität noch gesteigert werden.
4. Die Drehung der Verzerrungshauptachsen gegenüber den Spannungshauptachsen kann qualitativ mit elasto-plastischen Modellen erfaßt werden. Dadurch, daß die elastischen Verzerrungsinkremente koaxial sind zum Spannungsinkrement und die plastischen Verzerrungsinkremente koaxial zur Gesamtspannung, ergibt sich aus dem Verfestigungsgesetz eine Hauptachsenschneidung. Eine quantitative Erfassung der Hauptachsenschneidung wird aber erst durch Einführung anisotroper Stoffgesetze möglich. Bei der Durchführung von Versuchen und der Formulierung von Stoffgesetzen sollte sowohl die Anisotropie im Ausgangszustand als auch die Anisotropie, die sich infolge der Belastungsgeschichte ergibt, durch geeignete Parameter erfaßt werden.
5. Aus der Beobachtung von Labor-,Feldversuchen und realen Problemen (z.B. Hangrutschungen) ist bekannt, daß die Bewegungen häufig durch die Entstehung diskreter Gleitzonen verursacht werden. Man spricht daher auch von Linienbrüchen. Es wird zu untersuchen sein, ob die in der Felsmechanik angewandte Technik des Einfügens spezieller Kontaktelemente bei Gleitflächen auf die Bodenmechanik

übertragen werden kann. Eine besondere Schwierigkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß die Lage der Gleitlinien nicht von vornherein festliegt, sondern sich erst im Lauf der Belastungsgeschichte ergibt.

6. Es ist noch eine Steigerung der Effektivität notwendig und möglich: sowohl durch eine Verbesserung der inkrementellen/iterativen Verfahren als auch durch die Entwicklung neuer Elementtypen (gemischte und hybride Elemente). Um auch die Gleitflächenausbildung erfassen zu können, müssen die numerischen Verfahren noch erweitert werden.

# Anhang

## A 1 DIE DARSTELLUNG IM HAUPTSPANNUNGSRAUM

Entsprechend den Konventionen der technischen Mechanik werden Zugspannungen positiv definiert. Wenn Zugspannungen negativ definiert sind, was im Bereich von Grundbau und Bodenmechanik häufig der Fall ist, gilt:

$$\sigma_1^{Bo} = -\sigma_3^{TM} \quad \sigma_2^{Bo} = -\sigma_2^{TM} \quad \sigma_3^{Bo} = -\sigma_1^{TM}$$

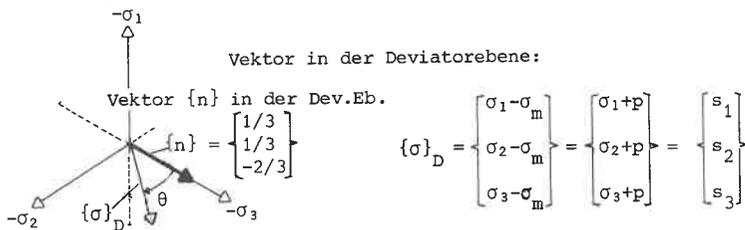
### A 1.1 Der Zusammenhang zwischen den Hauptspannungen und den in dieser Arbeit verwendeten Größen $r, p, \theta$ .

$$\text{Spannung: } \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

Vektor auf der Raumdiagonale:

$$\{\sigma\}_N = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{Bmatrix} = \sigma_m \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -p \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad p = -\frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{-I_1}{3}$$



$$r = |\{\sigma\}_D| = \sqrt{(\sigma_1 + p)^2 + (\sigma_2 + p)^2 + (\sigma_3 + p)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-J_2}$$

Skalarprodukt:  $\{n\}^T \cdot \{\sigma\}_D = |\{n\}| \cdot |\{\sigma\}_D| \cdot \cos \theta$

$$\frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 - \sigma_m) + \frac{1}{3} \cdot (\sigma_2 - \sigma_m) - \frac{2}{3} \cdot (\sigma_3 - \sigma_m) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} \cdot r \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_3}{3 \cdot \sqrt{2/3} \cdot r} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_3}{\sqrt{6} \cdot r}$$

$$\cos \theta = \frac{s_1 - p + s_2 - p - 2 \cdot s_3 + 2 \cdot p}{\sqrt{6} \cdot r} = \frac{s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3}{\sqrt{6} \cdot r}$$

da  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$

$$\cos \theta = \frac{-s_3}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot r} \quad \text{wenn } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\cos(3\theta) = 4 \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta = \frac{-4 \cdot 27 \cdot s_3^3}{6 \cdot \sqrt{6} \cdot r^3} + \frac{9 \cdot s_3}{\sqrt{6} \cdot r}$$

$$= -\frac{9 \cdot s_3}{\sqrt{6} \cdot r^3} \cdot (2 \cdot s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2)$$

$$\text{da } s_3 = -(s_1 + s_2) \quad \cos(3\theta) = -\frac{9}{\sqrt{6} \cdot r^3} \cdot (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + \frac{s_1 \cdot s_2^2 + s_2 \cdot s_1^2}{s_1 \cdot s_2 \cdot (s_2 + s_1)} - s_3)$$

$$\cos(3\theta) = -\frac{9}{\sqrt{6} \cdot r^3} \cdot \left( \frac{s_1^3 + s_2^3 + s_3^3}{3 \cdot J_3} - \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3}{J_3} \right)$$

$$\cos(3\theta) = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot (-J_2)^{3/2}}$$

$$r^2 = (\sigma_1 + p)^2 + (\sigma_2 + p)^2 + (\sigma_3 + p)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2 \cdot p \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3 \cdot p^2$$

$$r^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$r^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{1}{3} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)]$$

$$r^2 = (\sigma_1 + p)^2 + (\sigma_2 + p)^2 + (\sigma_3 + p)^2 = \frac{1}{3} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

### A 1.2. Die Ableitungen von $p, r$ und $\theta$ nach den Hauptspannungen

Die Ableitungen von  $p$ :

$$p = -\frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}^T} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Die Ableitungen von r:

$$r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{1}{r} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

Die Ableitungen von  $\theta$ :

$$\theta = \arccos \frac{-s_3}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot r} = \frac{s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3}{\sqrt{6} \cdot r}$$

da  $\frac{\partial(\arccos x)}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

ergibt sich:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3}{\sqrt{6} \cdot r}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\partial(s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3)}{\partial \{\sigma\}^T} \cdot \frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot r} \cdot \sqrt{6 \cdot r^2 - s_1^2 - s_2^2 - 4 \cdot s_3^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 + 4 \cdot s_1 \cdot s_3 + 4 \cdot s_2 \cdot s_3}$$

da  $6 \cdot r^2 = 2 \cdot [(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2]$  folgt:

$$A = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot r} \cdot \sqrt{3 \cdot s_1^2 + 3 \cdot s_2^2 - 6 \cdot s_1 \cdot s_2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot r} (s_1 - s_2)$$

da  $\frac{\partial(s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3)}{\partial \{\sigma\}^T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  und  $\frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{1}{r} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3 \cdot r} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot s_1 - s_2 - s_3 \\ 2 \cdot s_2 - s_3 - s_1 \\ 2 \cdot s_3 - s_1 - s_2 \end{bmatrix}$

folgt für {b}:  $\{b\} = \frac{1}{3 \cdot r} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot r^2 - (s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3) \cdot (2 \cdot s_1 - s_2 - s_3) \\ 3 \cdot r^2 - (s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3) \cdot (2 \cdot s_2 - s_3 - s_1) \\ -6 \cdot r^2 - (s_1 + s_2 - 2 \cdot s_3) \cdot (2 \cdot s_3 - s_1 - s_2) \end{bmatrix}$

$$\{b\} = \frac{1}{3 \cdot r} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 \cdot s_2 - s_2 \cdot s_3 - s_3 \cdot s_1) - 2 \cdot s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_3^2 - s_1 \cdot s_2 - s_2 \cdot s_3 + 5 \cdot s_3 \cdot s_1 \\ 2 \cdot (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 \cdot s_2 - s_2 \cdot s_3 - s_3 \cdot s_1) + s_1^2 - 2 \cdot s_2^2 - 2 \cdot s_3^2 - s_1 \cdot s_2 + 5 \cdot s_2 \cdot s_3 - 5 \cdot s_3 \cdot s_1 \\ -4 \cdot (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 \cdot s_2 - s_2 \cdot s_3 - s_3 \cdot s_1) + s_1^2 + s_2^2 + 4 \cdot s_3^2 + 2 \cdot s_1 \cdot s_2 - 4 \cdot s_2 \cdot s_3 - 4 \cdot s_3 \cdot s_1 \end{bmatrix}$$

$$\{b\} = \frac{1}{3 \cdot r} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot s_2^2 - 3 \cdot s_1 \cdot s_2 - 3 \cdot s_2 \cdot s_3 + 3 \cdot s_3 \cdot s_1 \\ 3 \cdot s_1^2 - 3 \cdot s_1 \cdot s_2 + 3 \cdot s_2 \cdot s_3 - 3 \cdot s_3 \cdot s_1 \\ -3 \cdot s_1^2 - 3 \cdot s_2^2 + 6 \cdot s_1 \cdot s_2 \end{bmatrix}$$

$$\{b\} = \frac{1}{r} \cdot \begin{bmatrix} s_2 \cdot (s_2 - s_1) - s_3 \cdot (s_2 - s_1) \\ -s_1 \cdot (s_2 - s_1) + s_3 \cdot (s_2 - s_1) \\ -(s_2 - s_1) \cdot (s_2 - s_1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot A} \cdot \frac{\{b\}}{r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot r \cdot (s_1 - s_2) \cdot \sqrt{6} \cdot r^2} \cdot (s_2 - s_1) \cdot \frac{1}{r} \cdot \begin{bmatrix} s_2 - s_3 \\ s_3 - s_1 \\ s_1 - s_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot r^2} \cdot \begin{bmatrix} s_2 - s_3 \\ s_3 - s_1 \\ s_1 - s_2 \end{bmatrix}$$

A 1.3 Die Beziehung zwischen dem Winkel  $\theta$  im Hauptspannungsraum und dem Verhältnis b der Hauptschubspannungen

b wird definiert:  $b = \frac{\sigma_2^{Bo} - \sigma_3^{Bo}}{\sigma_1^{Bo} - \sigma_3^{Bo}}$

In der Schreibweise der technischen Mechanik:

$$b = \frac{-\sigma_2 + \sigma_3}{-\sigma_3 + \sigma_1} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3}$$

Da  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$  ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} s_1 \cdot (1 - b) - s_2 &= -s_3 \cdot b \\ s_1 + s_2 &= -s_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 \cdot (2 - b) &= -s_3 \cdot (1 + b) \longrightarrow s_1 = \frac{b + 1}{2 - b} \cdot (-s_3) \\ s_2 \cdot (b - 2) &= -s_3 \cdot (2 \cdot b - 1) \longrightarrow s_2 = \frac{2 \cdot b - 1}{b - 2} \cdot (-s_3) \end{aligned}$$

Für den Winkel  $\theta$  gilt die Beziehung:

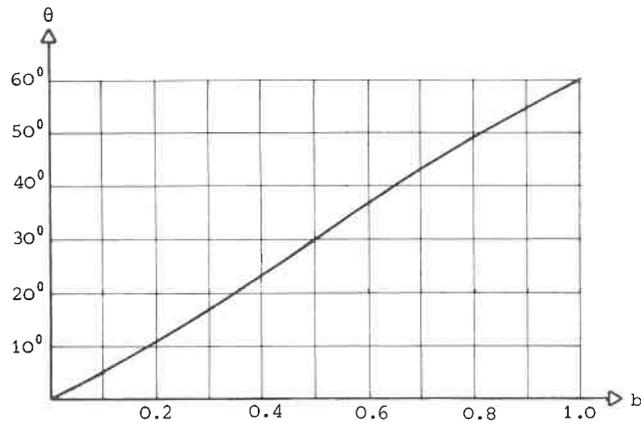
$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{s_3}{\sqrt{\left(\frac{b+1}{b-2} \cdot s_3\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot b - 1}{b-2} \cdot -s_3\right)^2 + s_3^2}}$$

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b-2}{\sqrt{b^2 + 2 \cdot b + 1 + 4 \cdot b^2 - 4 \cdot b + 1 + b^2 - 4 \cdot b + 4}}$$

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b-2}{\sqrt{3 \cdot b^2 - 6 \cdot b + 6}}$$

$$\cos\theta = \frac{1 - \frac{b}{2}}{\sqrt{b^2 - b + 1}}$$



### A 1.4 Transformation von Spannungen

Aus den Gleichungen E00.10 bis E00.14 von [65] ergeben sich die Hauptspannungen  $\sigma_i$  und die Hauptspannungsrichtungen  $n_{ij}$  ( $n_{ij}$  ist die normierte Projektion der Richtung  $i$  auf die Richtung  $j$ ) in Abhängigkeit von den kartesischen Komponenten des Spannungstensors. Die Gleichung E00.08 von [65] auf die Hauptspannungen angewandt führt zu folgenden Gleichungen:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \cdot n_{1x}^2 + \sigma_2 \cdot n_{2x}^2 + \sigma_3 \cdot n_{3x}^2$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_1 \cdot n_{1y}^2 + \sigma_2 \cdot n_{2y}^2 + \sigma_3 \cdot n_{3y}^2$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_1 \cdot n_{1z}^2 + \sigma_2 \cdot n_{2z}^2 + \sigma_3 \cdot n_{3z}^2$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_1 \cdot n_{1x} \cdot n_{1y} + \sigma_2 \cdot n_{2x} \cdot n_{2y} + \sigma_3 \cdot n_{3x} \cdot n_{3y}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_1 \cdot n_{1y} \cdot n_{1z} + \sigma_2 \cdot n_{2y} \cdot n_{2z} + \sigma_3 \cdot n_{3y} \cdot n_{3z}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_1 \cdot n_{1z} \cdot n_{1x} + \sigma_2 \cdot n_{2z} \cdot n_{2x} + \sigma_3 \cdot n_{3z} \cdot n_{3x}$$

Damit lautet die Transformationsmatrix (Richtungskosinusmatrix)  $[B]$ :

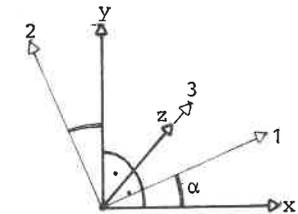
$$[B] = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{2x} & n_{3x} \\ n_{1y} & n_{2y} & n_{3y} \\ n_{1z} & n_{2z} & n_{3z} \\ n_{1x} \cdot n_{1y} & n_{2x} \cdot n_{2y} & n_{3x} \cdot n_{3y} \\ n_{1y} \cdot n_{1z} & n_{2y} \cdot n_{2z} & n_{3y} \cdot n_{3z} \\ n_{1z} \cdot n_{1x} & n_{2z} \cdot n_{2x} & n_{3z} \cdot n_{3x} \end{bmatrix}$$

Für den ebenen und rotationssymmetrischen Fall ist speziell:

$$n_{1x} = \cos\alpha ; n_{1y} = \sin\alpha ; n_{1z} = 0$$

$$n_{2x} = -\sin\alpha ; n_{2y} = \cos\alpha ; n_{2z} = 0$$

$$n_{3x} = 0 ; n_{3y} = 0 ; n_{3z} = 1$$

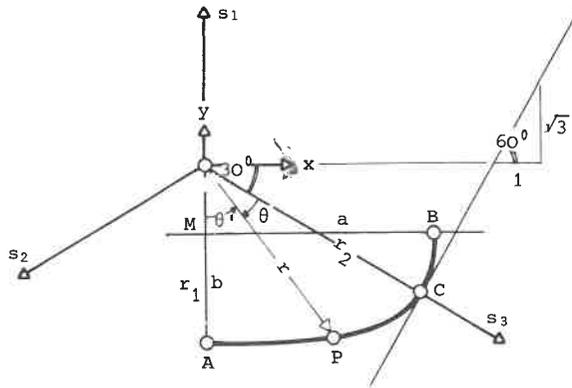


$$[B] = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha & -\sin\alpha \cdot \cos\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

A 2 DIE ABLEITUNG DER ERFORDERLICHEN WERTE FÜR DAS ELASTOPLASTISCHE STOFFGESETZ ELPL

A 2.1 Fließfläche und plastisches Potential

A 2.1.1 In der Deviatorebene



Gleichung der Ellipse im x-y Koordinatensystem:

$$\frac{(y+r_1-b)^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Zwischen den Polarkoordinaten und den kartesischen Koordinaten gelten die Beziehungen:  $x = r \cdot \sin \theta'$ ;  $y = -r \cdot \cos \theta'$  wobei  $\theta' = 60^\circ - \theta$

Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten:

$$\frac{(r \cdot \cos \theta' - r_1 + b)^2}{b^2} + \frac{r^2 \cdot \sin^2 \theta'}{a^2} = 1$$

Steigung der Ellipse im x-y System:

$$\frac{dy}{dx} = + \frac{b \cdot x}{a^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

Da im Punkt C  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$  ergibt sich:

$$\sqrt{3} = \frac{b \cdot r_2 \cdot \sin 60^\circ}{a^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{r_2^2 \cdot \sin^2 60^\circ}{a^2}}}$$

$$b = \frac{2 \cdot a^2}{r_2} \cdot \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_2^2}{a^2} \right)$$

Die Koordinaten des Punktes C in die Ellipsengleichung eingesetzt:

$$\frac{(r_2 \cos 60^\circ - r_1 - b)^2}{b^2} + \frac{(r_2 \sin 60^\circ)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{\left(\frac{r_2}{2} - r_1 + b\right)^2}{b^2} = 1 - \frac{3 \cdot r_2^2}{4 \cdot a^2}$$

Mit der Gleichung für die Steigung im Punkte C:

$$\frac{\frac{r_2}{2} - r_1 + b}{b} = \frac{b \cdot r_2}{4 \cdot a^2} \quad \longrightarrow \quad a^2 = \frac{r_2 \cdot b^2}{r_2 - 2 \cdot r_1 + 2 \cdot b}$$

Wenn man die Gleichung für  $a^2$  in die Ellipsengleichung einsetzt, ergibt sich  $b$  als Funktion von  $r_1$  und  $r_2$ .

$$\frac{(r_2/2 - r_1 + b)^2}{b^2} + \frac{2 \cdot (r_2/2 - r_1 + b) \cdot r_2^2 \cdot 3}{4 \cdot r_2 \cdot b^2} = 1$$

$$r_2^3 + 4 \cdot r_1^2 \cdot r_2 + 4 \cdot b^2 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1 \cdot r_2^2 + 4 \cdot b \cdot r_2^2 - 8 \cdot b \cdot r_1 \cdot r_2 + 3 \cdot r_2^3 - 6 \cdot r_1 \cdot r_2^2 + 6 \cdot b \cdot r_2^2 = 4 \cdot r_2 \cdot b^2$$

$$b = \frac{5 \cdot r_1 \cdot r_2 - 2 \cdot r_1^2 - 2 \cdot r_2^2}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1} = \frac{(2 \cdot r_2 - r_1) \cdot (2 \cdot r_1 - r_2)}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1} = r_1 - \frac{2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1}$$

Die Gleichungen für  $b$  in die Gleichung für  $a^2$  eingesetzt ergibt:

$$a^2 = \frac{r_2 \cdot b^2}{r_2 - 2 \cdot r_1 + 2 \cdot b} = r_2 \cdot \frac{(2 \cdot r_2 - r_1)^2 \cdot (2 \cdot r_1 - r_2)^2}{(5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1)^2 \cdot \left[ r_2 - 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_1 - \frac{4 \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1} \right]}$$

$$a^2 = \frac{r_2 \cdot (2 \cdot r_2 - r_1)^2}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1}$$

Die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten nach  $r$  aufgelöst ergibt:

$$r = \frac{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \theta' \cdot (r_1 - b) + a \cdot b \cdot \sqrt{\cos^2 \theta' \cdot \left[ a^2 - r_1 \cdot (2 \cdot b - r_1) + r_1 \cdot (2 \cdot b - r_1) \right]}}}{\underbrace{\cos^2 \theta' \cdot (a^2 - b^2) + b^2}_u}$$

Die Hilfsgrößen s, t und u lauten in Abhängigkeit von  $r_1$ ,  $r_2$  und  $\theta'$ :

$$s = \left( \frac{2 \cdot r_2 - r_1}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1} \right)^2 \cdot 2 \cdot r_2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos \theta'$$

$$t = \left( \frac{2 \cdot r_2 - r_1}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1} \right)^2 \cdot r_2 \cdot (2 \cdot r_1 - r_2) \cdot \sqrt{\cos^2 \theta' \cdot 4 \cdot (r_2^2 - r_1^2) + r_1 \cdot (5 \cdot r_1 - 4 \cdot r_2)}$$

$$u = \left( \frac{2 \cdot r_2 - r_1}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1} \right)^2 \cdot \left[ 4 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos^2 \theta' + (2 \cdot r_1 - r_2)^2 \right]$$

Somit kann man für r schreiben:

$$r = \frac{s + t}{u} = \frac{2r_2(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\theta' + r_2(2r_1 - r_2)\sqrt{4(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\theta' + r_1(5r_1 - 4r_2)}}{4(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\theta' + (2r_1 - r_2)^2}$$

Es wird der Materialparameter  $c_r$  und die Hilfsgröße A eingeführt zwischen denen folgender Zusammenhang besteht:

$$A = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3 - \sin\phi_{\text{com}}}{3 + \sin\phi_{\text{com}}} \cdot c_r$$

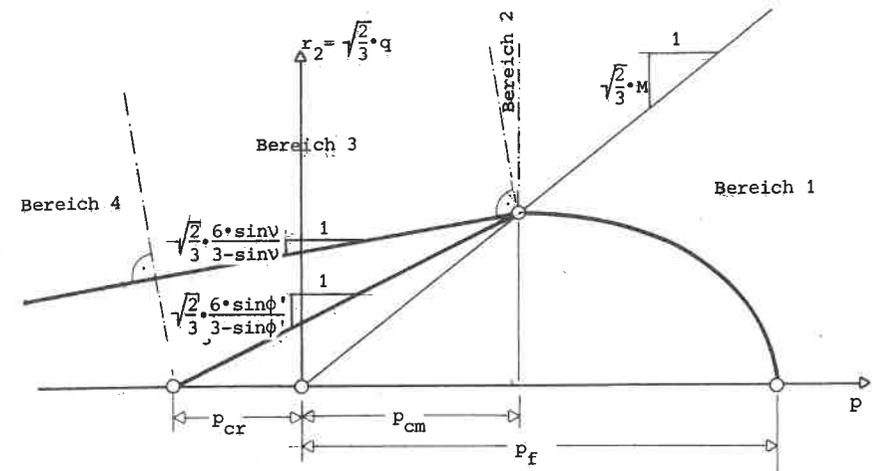
Wird der Radius im Extensionsversuch mit  $r_1$  bezeichnet und der Radius im Kompressionsversuch mit  $r_2$  so gilt für das Coulomb'sche Kriterium:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3 - \sin\phi}{3 + \sin\phi}$$

Für das Verhältnis  $r/r_2$  kann man nun schreiben:

$$f_{rr} = \frac{r}{r_2} = \frac{2 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos \theta' + (2 \cdot A - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + 5 \cdot A^2 - 4 \cdot A}}{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + (2 \cdot A - 1)^2}$$

A 2.1.2 In der hydrostatischen Ebene (Ebene des triaxialen Kompressionsversuchs)



$$p_{cm} = c_o \cdot p_f \quad p_{cr} = p_{cm} \cdot \left( \frac{3 - \sin\phi'}{6 \cdot \sin\phi'} \cdot M - 1 \right)$$

bei Modified Cam-Clay  $c_o = 0.5$

$$p_f = p_1 \cdot \exp\left(\frac{K}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$$

Im Bereich 1:

für die Fließkurve: 
$$\left( \frac{p - p_{cm}}{p_f - p_{cm}} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{r_2}{c_o \cdot M \cdot p_f} \right)^2 = 1$$

für das plastische Potential: 
$$\left( \frac{p - p_{cm}}{p_f - p_{cm}} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{r_2}{c_o \cdot M \cdot p_f} \right)^2 = C_1$$

$$f_1 = \left( \frac{p - p_{cm}}{1 - c_o} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{r_2}{c_o \cdot M} \right)^2 - p_f^2 = 0$$

$$g_1 = \left( \frac{p - p_{cm}}{1 - c_o} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{r_2}{c_o \cdot M} \right)^2 - C_1 \cdot p_f^2 = 0$$

Im Bereich 2:

$$f_2 = (p - p_{cm})^2 + \left( r_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot M \cdot p_{cm} \right)^2 = 0$$

$$g_2 = (p - p_{cm})^2 + \left( r_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot M \cdot p_{cm} \right)^2 - C_2 = 0$$

Im Bereich 3:

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} \cdot p + p_{cm} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left( M - \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} \right)$$

$$f_3 = r_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} \cdot p + p_{cm} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} - M \right) = 0$$

$$g_3 = r_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} \cdot p + p_{cm} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} - M \right) - C_3 = 0$$

Im Bereich 4:

$$f_4 = (p - p_{cr})^2 + r_2^2 = 0$$

$$g_4 = (p - p_{cr})^2 + r_2^2 - C_4 = 0$$

In der Deviatorenebene gilt in allen vier Bereichen die Beziehung

$$r = f_{rr} \cdot r_2 \longrightarrow r_2 = \frac{r}{f_{rr}}$$

Mit diesen Beziehungen ergibt sich aus den Fließkurven in der deviatorischen und der hydrostatischen Ebene die Gleichung für die Fließfläche im Hauptspannungsraum. Analog ergibt sich die Gleichung für das plastische Potential.

Zusammenstellung der Gleichungen für Fließfläche und plastisches Potential

Bereich 1	$f_1 = \left( \frac{p - c_o \cdot p_f}{1 - c_o} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{r}{c_o \cdot M \cdot f_{rr}} \right)^2 - p_f^2 = 0$ $g_1 = \left( \frac{p - c_o \cdot p_f}{1 - c_o} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{r}{c_o \cdot M \cdot f_{rr}} \right)^2 - C_1 \cdot p_f^2 = 0$
Bereich 2	$f_2 = (p - c_o \cdot p_f)^2 + \left( \frac{r}{f_{rr}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c_o \cdot M \cdot p_f \right)^2 = 0$ $g_2 = (p - c_o \cdot p_f)^2 + \left( \frac{r}{f_{rr}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c_o \cdot M \cdot p_f \right)^2 - C_2 = 0$
Bereich 3	$f_3 = \frac{r}{f_{rr}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} \cdot p + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c_o \cdot p_f \cdot \left( \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} - M \right) = 0$ $g_3 = \frac{r}{f_{rr}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} \cdot p - C_3 = 0$
Bereich 4	$f_4 = \left\{ p - c_o \cdot p_f \cdot \left[ 1 - \frac{M \cdot (3 - \sin\phi')}{6 \cdot \sin\phi'} \right] \right\}^2 + \left( \frac{r}{f_{rr}} \right)^2 = 0$ $g_4 = \left\{ p - c_o \cdot p_f \cdot \left[ 1 - \frac{M \cdot (3 - \sin\phi')}{6 \cdot \sin\phi'} \right] \right\}^2 + \left( \frac{r}{f_{rr}} \right)^2 - C_4 = 0$

A 2.2 Ableitung von Fließfläche, plastischem Potential und Ver(Ent)festigungsgesetz nach den Spannungen bzw. Verzerrungen

Auf Grund der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial f_{rr}} \cdot \frac{\partial f_{rr}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial g}{\partial f_{rr}} \cdot \frac{\partial f_{rr}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = \frac{\partial f}{\partial p_f} \cdot \frac{\partial p_f}{\partial \kappa}$$

Die Ableitungen in den verschiedenen Bereichen

	Bereich 1	Bereich 2	Bereich 3	Bereich 4
$\frac{\partial f}{\partial p}$	$2 \cdot \frac{(p - c_o \cdot p_f)}{(1 - c_o)^2}$	$2 \cdot (p - c_o \cdot p_f)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'}$	$2 \cdot \left\{ p - c_o \cdot p_f \cdot \left[ 1 - \frac{M \cdot (3 - \sin\phi')}{6 \cdot \sin\phi'} \right] \right\}$
$\frac{\partial g}{\partial p}$			$-\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'}$	
$\frac{\partial f}{\partial r}$	$\frac{3 \cdot r}{(c_o \cdot M \cdot f_{rr})^2}$	$\frac{2}{f_{rr}} \cdot \left( \frac{r}{f_{rr}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c_o \cdot M \cdot p_f \right)$	$\frac{1}{f_{rr}}$	$\frac{2 \cdot r}{f_{rr}^2}$
$\frac{\partial g}{\partial r}$				
$\frac{\partial f}{\partial f_{rr}}$	$\frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{-r}{f_{rr}}$	$\frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{-r}{f_{rr}}$	$\frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{-r}{f_{rr}}$	$\frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{-r}{f_{rr}}$
$\frac{\partial g}{\partial f_{rr}}$				
$\frac{\partial f}{\partial p_f}$	$-c_o \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - 2 \cdot p_f$	$+ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot M \cdot \frac{r}{f_{rr}} - \frac{2}{3} \cdot M^2 \cdot c_o \cdot p_f$	$-2 \cdot c_o \cdot (p - c_o \cdot p_f) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c_o \cdot \left( \frac{6 \cdot \sin\phi'}{3 - \sin\phi'} - M \right)$	$-c_o \cdot \left[ 1 - \frac{M \cdot (3 - \sin\phi')}{6 \cdot \sin\phi'} \right] \cdot \frac{\partial g}{\partial p}$

Da in der Deviatorenebene Fließfläche und plastisches Potential immer dieselbe Form haben gilt in allen Bereichen:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial f_{rr}} \cdot \frac{\partial f_{rr}}{\partial \theta'} \cdot \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \quad \text{Da } \theta' = \frac{\pi}{3} - \theta \rightarrow \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = -1$$

$$f_{rr} = \frac{\overbrace{2 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos \theta'}^a + \overbrace{(2 \cdot A - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + 5 \cdot A^2 - 4 \cdot A}}^b}{\underbrace{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + (2 \cdot A - 1)^2}_c}$$

Aus der Gleichung für  $f_{rr}$  folgt:

$$\frac{\partial f_{rr}}{\partial \theta'} = \frac{c \cdot \left( \frac{\partial a}{\partial \theta'} + \frac{\partial b}{\partial \theta'} \right) - (a + b) \cdot \frac{\partial c}{\partial \theta'}}{c^2} = \frac{1}{c} \cdot \left( \frac{\partial a}{\partial \theta'} + \frac{\partial b}{\partial \theta'} - f_{rr} \cdot \frac{\partial c}{\partial \theta'} \right)$$

$$\frac{\partial f_{rr}}{\partial \theta'} = \frac{1}{c} \cdot \left[ -2 \cdot (1 - A^2) \cdot \sin \theta' - \frac{(2 \cdot A - 1) \cdot 8 \cdot \sin \theta' \cdot \cos \theta'}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + 5 \cdot A^2 - 4 \cdot A}} + f_{rr} \cdot 8 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos \theta' \cdot \sin \theta' \right]$$

$$\frac{\partial f_{rr}}{\partial \theta} = \frac{2 \cdot (1 - A^2) \cdot \sin \theta'}{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + (2 \cdot A - 1)^2} \cdot \left[ 1 + \frac{2 \cdot (2 \cdot A - 1) \cdot \cos \theta'}{\sqrt{4 \cdot (1 - A^2) \cdot \cos^2 \theta' + 5 \cdot A^2 - 4 \cdot A}} - 4 \cdot f_{rr} \cdot \cos \theta' \right]$$

Die Ableitungen nach den Verzerrungen:

$$\frac{\partial f}{\partial \{\epsilon^P\}^T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} \text{ denn } f \text{ ist nicht direkt eine Funktion der plastischen Verzerrungen}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon\}^P} = \frac{\partial f}{\partial p_f} \cdot \frac{\partial p_f}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon\}^P} \quad \text{Da } p_f = p_1 \cdot \exp\left(\frac{\kappa}{\lambda_c - \lambda_s}\right) \rightarrow \frac{\partial p_f}{\partial \kappa} = \left(\frac{p_1}{\lambda_c - \lambda_s}\right) \cdot \exp\left(\frac{\kappa}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$$

Da  $\kappa$  nur eine Funktion der volumetrischen plastischen Verzerrungen ist, gilt:

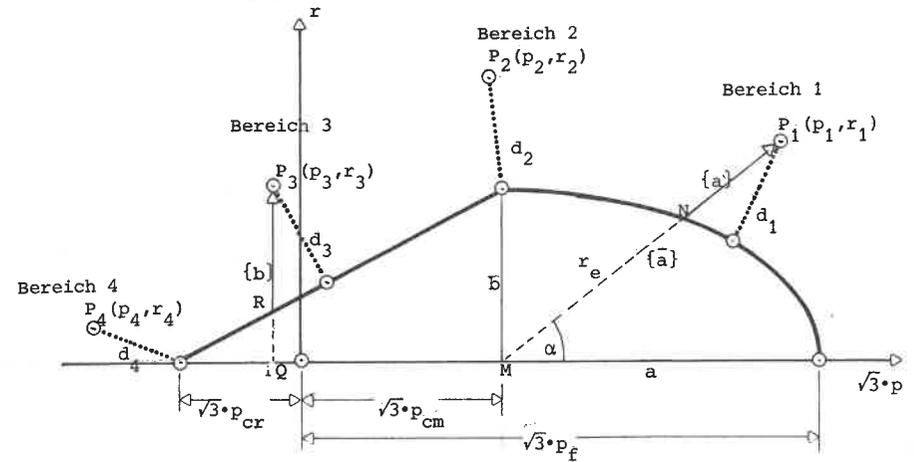
$$\frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon\}^P} = \frac{\partial \kappa}{\partial e_v^P} \cdot \frac{\partial e_v^P}{\partial \{\epsilon\}^P} \quad \text{wobei } \frac{\partial \kappa}{\partial e_v^P} = -1 - e_o \quad \text{und} \quad \frac{\partial e_v^P}{\partial \{\epsilon\}^P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denn das Verfestigungsgesetz ist definiert durch die Gleichung

$$\kappa = \kappa_o + e^P = e_o - (1 + e_o) \cdot e_v^P$$

( $e_o$  ist die Porenzahl des Ausgangszustandes)

A 2.3 Die Berechnung des Abstandes der fiktiven Spannungspunkte von der Fließfläche



Im Bereich 1:

$$\{\bar{a}\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 + p_{cm} \\ \sigma_2 + p_{cm} \\ \sigma_3 + p_{cm} \end{bmatrix} \quad \{a\} = \lambda \cdot \{\bar{a}\} \quad \lambda = \frac{P_1 N}{P_1 M}$$

$$P_1 M = \sqrt{(\sigma_1 + p_{cm})^2 + (\sigma_2 + p_{cm})^2 + (\sigma_3 + p_{cm})^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot p_1}{P_1 M} \quad \sin \alpha = \frac{r_1}{P_1 M} \quad a = \sqrt{3} \cdot p_f \cdot (1 - c_o) \quad b = \sqrt{2} \cdot c_o \cdot f_{rr} \cdot M \cdot p_f$$

Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten für den Punkt N:

$$\left(\frac{r_e \cdot \cos \alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_e \cdot \sin \alpha}{b}\right)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot \left(\frac{r_e \cdot p_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_e \cdot r_1}{b}\right)^2 = P_1 M^2$$

$$\rightarrow \quad r_e = \frac{P_1 M \cdot a \cdot b}{\sqrt{3 \cdot b^2 \cdot p_1^2 + a^2 \cdot r_1^2}} \quad \lambda = \frac{P_1 M - r_e}{P_1 M} = 1 - \frac{a \cdot b}{\sqrt{3 \cdot b^2 \cdot p_1^2 + a^2 \cdot r_1^2}}$$

$$\lambda = 1 - \frac{p_f \cdot (1 - c_o) \cdot c_o \cdot f_{rr} \cdot M}{\sqrt{(c_o \cdot f_{rr} \cdot M \cdot r_1)^2 + 3 \cdot [(1 - c_o) \cdot r_1]^2}}$$

$$d_1 = \frac{\lambda}{\left| \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} \right|} \cdot [\sigma_1 + p_{cm}, \sigma_2 + p_{cm}, \sigma_3 + p_{cm}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T}$$

Im Bereich 2:

$$d_2 = \sqrt{(\sqrt{3} \cdot p_2 - \sqrt{3} \cdot c_0 \cdot p_f)^2 + (r_2 - b)^2} \quad \text{wobei } b = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c_0 \cdot f_{rr} \cdot M \cdot p_f$$

$$d_2 = \sqrt{3 \cdot (p_2 - c_0 \cdot p_f)^2 + (r_2 - b)^2}$$

Im Bereich 3:

$$\vec{p}_3 Q = \begin{bmatrix} \sigma_1 + p_3 \\ \sigma_2 + p_3 \\ \sigma_3 + p_3 \end{bmatrix}$$

$$\{b\} = \lambda \cdot \vec{p}_3 Q$$

$$\lambda = \frac{p_3 R}{p_3 Q}$$

$$\lambda = \frac{1}{r_3} \cdot [r_3 - (p_3 - p_{cr}) \cdot \frac{6 \cdot \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \cdot f_{rr}] = 1 - \frac{p_3 - p_{cr}}{r_3} \cdot \frac{6 \cdot \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \cdot f_{rr}$$

$$d_3 = \frac{\lambda}{\left| \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} \right|} \cdot [\sigma_1 + p_3, \sigma_2 + p_3, \sigma_3 + p_3] \cdot \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T}$$

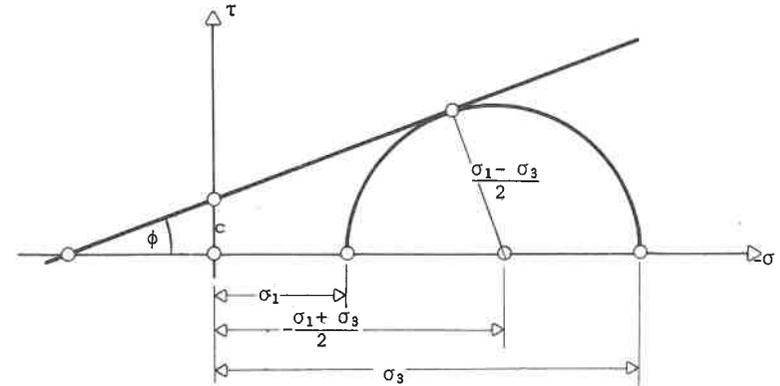
Im Bereich 4:

$$d_4 = \sqrt{(\sqrt{3} \cdot p_4 - \sqrt{3} \cdot p_{cr})^2 + r_4^2}$$

$$d_4 = \sqrt{3 \cdot (p_4 - p_{cr})^2 + r_4^2}$$

A 3 ABLEITUNG DER ERFORDERLICHEN WERTE FÜR DAS STOFFGESETZ NOEL

A 3.1 Darstellung der Coulomb'schen Fließfläche als Funktion der Invarianten des Spannungstensors



Allgemein gilt für das Coulomb'sche Kriterium:  $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < \frac{c}{\tan \phi}$

$$\frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c \cdot \cos \phi}{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \sin \phi \rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 \leq 2 \cdot c \cdot \cos \phi - \sin \phi \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$p = -\frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \rightarrow -3 \cdot p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_3}{\sqrt{6} \cdot r} \rightarrow \sqrt{6} \cdot r \cdot \cos \theta = \sigma_1 + \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_3 = -p - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot r \cdot \cos \theta$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -2 \cdot p + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot r \cdot \cos \theta$$

$$r^2 = \frac{1}{3} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$6 \cdot r^2 = 4 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_3}{\sqrt{6} \cdot r} \rightarrow 6 \cdot (r \cdot \cos \theta)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 4 \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 4 \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

$$6 \cdot r^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta) = 6 \cdot (r \cdot \sin \theta)^2 = 3 \cdot \sigma_1^2 + 3 \cdot \sigma_2^2 - 6 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 3 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{2} \cdot r \cdot \sin \theta$$

$$\sigma_1 = -p + \frac{r \cdot \cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{r \cdot \sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$-p + \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta \right) + p + r \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \cos \theta = 2 \cdot c \cdot \cos \phi - \sin \phi \cdot \left[ -2 \cdot p + \frac{r}{\sqrt{6}} \cdot (-\cos \theta + \sqrt{3} \cdot \sin \theta) \right]$$

$$r \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta \right) - \sin \phi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \theta \right) \right] = 2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sin \phi \cdot p$$

$$f = r \cdot [\cos(\theta - 30^\circ) - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\theta - 30^\circ)] - \sqrt{2} \cdot (p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi) = 0$$

$$r = \sqrt{6} \cdot \frac{p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ - \theta) - \sin\phi \cdot \sin(30^\circ - \theta)}$$

Damit ist die Steigung der Fließfläche im Hauptspannungsraum gegenüber der Raumdiagonalen:

$$\frac{\partial r}{\partial (\sqrt{3} \cdot p)} = \tan\phi^* = \frac{\sqrt{6} \cdot \sin\phi}{\sqrt{3} \cdot [\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ - \theta) - \sin\phi \cdot \sin(30^\circ - \theta)]}$$

$$\tan\phi^* = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ - \theta) - \sin\phi \cdot \sin(30^\circ - \theta)}$$

Für  $p = 0$  ergibt sich:

$$r = c^* = \frac{\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ - \theta) - \sin\phi \cdot \sin(30^\circ - \theta)}$$

Wie im Abschnitt A1 hergeleitet wurde gilt in der p-q Ebene

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot q$$

da  $\sigma_1 = \sigma_2$  und  $\theta = 0$ .

Somit erhält man die folgenden Gleichungen:

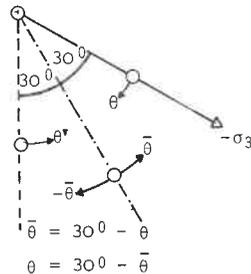
$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ) - \sin\phi \cdot \sin(30^\circ)} = 6 \cdot \frac{p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi}{3 - \sin\phi}$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \tan\phi_q^* = \frac{6 \cdot \sin\phi}{3 - \sin\phi} \quad \text{und für } p = 0 \quad q = c_q^* = \frac{6 \cdot c \cdot \cos\phi}{3 - \sin\phi}$$

Wird die Beziehung  $\bar{\theta} = 30^\circ - \theta$  eingeführt (siehe nebenstehende Abbildung) ergibt sich für die Gleichung der Fließfläche folgende Form:

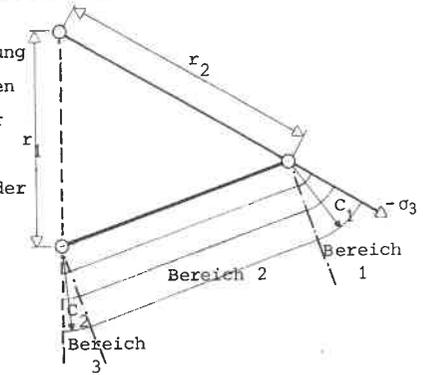
$$f = r \cdot (\cos\bar{\theta} - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} \cdot \sin\bar{\theta}) - \sqrt{2} \cdot (p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi) = 0$$

$$r = \sqrt{6} \cdot \frac{p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos\bar{\theta} - \sin\phi \cdot \sin\bar{\theta}}$$



### A 3.2 Die tangentielle Materialmatrix für das Coulomb'sche Kriterium

Damit sich immer eine stetige Richtungsänderung der Normalen auf die Fließfläche ergibt werden die Ecken der Coulomb'schen Fließkurve in der Deviatorebene als Kreisbögen mit dem Radius Null interpretiert. Dadurch ergeben sich in der Deviatorebene drei verschiedene Bereiche.



Für den Kompressionsversuch ( $\theta=0$ ):

$$r_2 = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi}{3 - \sin\phi}$$

Für den Extensionsversuch ( $\theta=60^\circ$ ):

$$r_1 = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi}{3 + \sin\phi}$$

$$A = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3 - \sin\phi}{3 + \sin\phi}$$

Bereich 1:

$$r = r_2 \cdot \cos\theta + \sqrt{C_1^2 - r_2^2 \cdot \sin^2\theta} \quad f = r - r_2 \cdot \cos\theta - \sqrt{C_1^2 - r_2^2 \cdot \sin^2\theta} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{\partial f}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T}$$

Die partiellen Ableitungen von f:

$$\frac{\partial f}{\partial r_2} = -\cos\theta + \frac{r_2 \cdot \sin^2\theta}{\sqrt{C_1^2 + r_2^2 \cdot \sin^2\theta}}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial p} = \frac{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sin\phi}{3 - \sin\phi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = r_2 \cdot \sin\theta + \frac{r_2^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{C_1^2 + r_2^2 \cdot \sin^2\theta}}$$

Der Kreisradius des fiktiven Spannungspunktes ( $C_1$ ):

$$C_1 = \sqrt{(r - r_2 \cdot \cos\theta)^2 + r_2^2 \cdot \sin^2\theta}$$

Bereich 2:

$$f = r \cdot (\cos\bar{\theta} - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} \cdot \sin\bar{\theta}) - \sqrt{2} \cdot (p \cdot \sin\phi + c \cdot \cos\phi) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\theta}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \{\sigma\}^T}$$

Die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\sqrt{2} \cdot \sin \bar{\theta} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \cos \bar{\theta} - \frac{\sin \bar{\theta}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \bar{\theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\theta}} = r \cdot (-\sin \bar{\theta} - \frac{\sin \bar{\theta}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \bar{\theta}) \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} = -1$$

Bereich 3:

$$r = r_1 \cdot \cos \theta' + \sqrt{C_2^2 - r_1^2 \cdot \sin^2 \theta'} \quad f = r - r_1 \cdot \cos \theta' - \sqrt{C_2^2 - r_1^2 \cdot \sin^2 \theta'} = 0$$

wobei  $\theta' = 60^\circ - \theta$

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} = \frac{\partial f}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \{\sigma\}^T} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \cdot \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}^T}$$

Die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} = -\cos \theta' + \frac{r_1 \cdot \sin^2 \theta'}{\sqrt{C_2^2 - r_1^2 \cdot \sin^2 \theta'}} \quad \frac{\partial r_1}{\partial p} = \frac{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sin \phi}{3 + \sin \phi} = A \cdot \frac{\partial r_2}{\partial p}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta'} = r_1 \cdot \sin \theta' + \frac{r_1^2 \cdot \sin \theta' \cdot \cos \theta'}{\sqrt{C_2^2 - r_1^2 \cdot \sin^2 \theta'}} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 1 \quad \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = -1$$

Kreisradius für den fiktiven Spannungspunkt ( $C_2$ ):

$$C_2 = \sqrt{(r - r_1 \cdot \cos \theta')^2 + r_1^2 \cdot \sin^2 \theta'}$$

Abgrenzung der Bereiche

$$a = r \cdot \sin \bar{\theta}$$

Für  $a > a_{gr}$  und  $\bar{\theta} > 0$  Bereich 1

wobei für  $a_{gr}$  gilt:

$$a_{gr} = a_1 - (r \cdot \cos \bar{\theta} - r_2 \cdot \cos 30^\circ) \cdot \tan \gamma$$

Für  $a > a_{gr}$  und  $\bar{\theta} < 0$  Bereich 3

wobei für  $a_{gr}$  gilt:

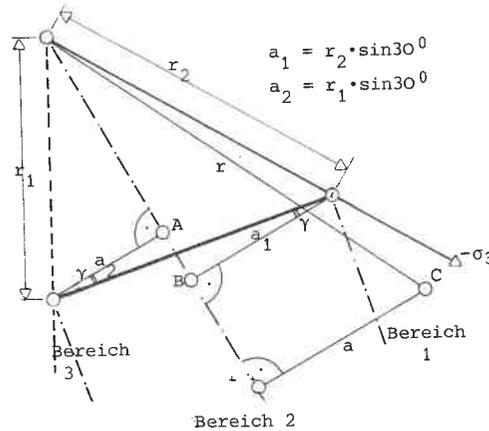
$$a_{gr} = a_2 + (r \cdot \cos \bar{\theta} - r_1 \cdot \cos 30^\circ) \cdot \tan \gamma$$

Für  $a \leq a_{gr}$  Bereich 2.

Bestimmung von  $\gamma$ :

Aus dem Kosinussatz folgt:  $b = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_1 \cdot r_2}$

Aus dem Sinussatz folgt:  $\frac{\sin \gamma}{r_2 - r_1} = \frac{\sin 60^\circ}{b} \rightarrow \sin \gamma = \frac{(r_2 - r_1) \cdot \sin 60^\circ}{b}$



Für den Tangens von  $\gamma$  gilt:

$$\tan \gamma = \frac{(r_2 - r_1) \cdot \sin 60^\circ}{b \cdot \sqrt{1 - \frac{(r_2 - r_1) \cdot \sin 60^\circ}{b}}^2} = \frac{(r_2 - r_1) \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{b^2 - [(r_2 - r_1) \cdot \sin 60^\circ]^2}}$$

$$\tan \gamma = \frac{\sqrt{3} \cdot (r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 - A)}{1 + A}$$

Der Grenzwert der Ableitungen der Fließfläche nach den Spannungen wird für

$$r \rightarrow 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}^T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Weitere Veröffentlichungen des Baugrundinstituts und seiner  
Mitarbeiter

- [1] Smoltczyk, U. (1980) *Studienunterlagen*  
426 Seiten, broschiert DM 30,-
- [2] Gußmann, P. (1973) *Ausgleichsvorgänge eindimensionaler  
Strömungen bei beliebiger Anfangsbe-  
dingung unter besonderer Berücksich-  
tigung der Konsolidation einseitig  
dräniertes Tonschichten*  
Die Bautechnik 50, 20 - 25 Sonderdruck
- [3] Thamm, B.R. (1973) *Die "Cam-Clay"-Theorie und das  
"Critical-State"-Konzept*  
Der Bauingenieur 48, 311 - 314 Sonderdruck
- [4] Gußmann, P./ (1973) *Eindimensionale Konsolidation mehr-  
schichtiger Tonböden*  
Spotka, H. Die Bautechnik 50, 265 - 272 Sonderdruck
- [5] Thamm, B.R. (1973) *Anwendung der Finite-Element-Methode  
zur Berechnung von Spannungen in  
wassergesättigten Böden*  
Der Bauingenieur 48, 370 - 374 Sonderdruck
- [6] Gußmann, P. (1974) *Different methods of evaluating the  
influence of seepage forces on slope  
stability*  
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 61 - 73
- [7] Gußmann, P./ (1974) *Practical considerations in the application of  
finite element techniques to soil problems*  
Schad, H. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 74 - 90
- [8] Gußmann, P./ (1974) *One-dimensional consolidation of multi-layered  
clays*  
Spotka, H. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 91 - 102
- [9] Gußmann, P./ (1974) *Two-dimensional consolidation of triaxial test  
specimen*  
Thamm, B. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 103 - 117
- [10] Schad, H. et al. (1974) *Stresses in concrete caisson bells*  
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 118 - 121
- [11] Smoltczyk, U. (1974) *Improved technique for foundations on slopes*  
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 122 - 129
- [12] Smoltczyk, U./ (1974) *Pressure cell for the measurement of normal  
and shear stress*  
Diem, P./Spotka, H. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 130 - 136
- [13] Smoltczyk, U./ (1974) *Stabilizing sand grains by overhead water  
pressure in bell bottoms of caisson piles*  
Ljötterud, L. Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr. 2, 137 - 141

Die Nrn. 6 bis 13 enthält das o.g. Heft 2, das von der DEUTSCHEN GESELLSCHAFT  
FÜR ERD- UND GRUNDBAU E.V., Essen, zum Preise von DM 20,- verkauft wird.

- [14] Smoltczyk, U. (1975) *Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente  
et al. in der Grundbaupraxis*  
CAD-Berichte Heft 1 der Gesellschaft für Kernfor-  
schung Karlsruhe
- [15] Gußmann, P./ (1974) *Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer  
Thamm, B.R. Versuchsproben*  
Der Bauingenieur 49, 293 - 298 Sonderdruck
- [16] Gußmann, P. (1974) *Über den Einfluß unterschiedlicher Wasserdruck-  
ansätze auf die Standsicherheit von durchströmten  
Böschungen*  
Der Bauingenieur 49, 298 - 301 Sonderdruck
- [17] Smoltczyk, U./ (1974) *DIN 4084 Beiblatt, Erläuterungen und Berech-  
Gußmann, P./Schulz, H. nungsbeispiele*  
20 S., Beuth-Verlag Berlin/Köln DM 18,-
- [18] Laumans, Q. (1975) *Die Anwendung der Methode finiter Elemente  
auf Flächengründungen*  
Technische Akademie Wuppertal, Heft 14
- [19] Smoltczyk, U. (1975) *Graving Dock Foundation on Deep Fill*  
Proc. 1 Baltic Conf. Soil Mech. Found. Engg. III,  
213 - 222
- [20] Smoltczyk, U./ (1975) *Zur Bebaubarkeit von vorbelasteten Verwitte-  
Du Thinh rungsböden*  
Fortschritt-Berichte VDI-Z., Reihe 4, Nr. 25, 70 S.
- [21] Smoltczyk, U. (1975) *Anmerkungen zum Gleitkreisverfahren*  
in: Festschrift Lorenz, Techn. Univ. Berlin, 203-218
- [22] Smoltczyk, U. (1975) *Wie kann man Baugruben verbilligen?*  
Der Architekt 2, 94 - 103
- [23] Smoltczyk, U. (1975) *Schwierigkeiten beim Bauen im entfestigten Tonstein*  
Veröff. Inst. Felsmech. Bodenmech. Univ. Karlsruhe 63,  
21 - 50
- [24] Smoltczyk, U. (1976) *Pfahlgründung eines Eisenbahndammes*  
Proc. 6. Europ. Conf. SMFE, 1.2, 561 - 566
- [25] Smoltczyk, U./ (1976) *Erddruck auf Schleusenammerwände*  
Hilmer, K. Vortr. Baugrundtagung, Nürnberg, 245 - 265
- [26] Laumans, Q./ (1976) *Calculation of mat foundations on clayey silts*  
Schad, H. Proc. Sec. Int. Conf. Num. Meth. in Geomechanics,  
Blacksburg, Vol 1
- [27] Smoltczyk, U./ (1977) *Earth Pressure Variations Due to Temperatur Change*  
Hilmer, K./Franke, E./ ICOSFME Tokyo, Vol. 2, 225 - 233  
Schuppener, B.
- [28] Smoltczyk, U./ (1977) *Lateral Deformation Testing in Keuper Marl  
Seeger, H. Boreholes*  
Int. Symp. The Geotechnics of Structurally Complex  
Formations, Capri, Vol. 1, 443 - 447
- [29] Smoltczyk, U. (1978) *Wagnis Baugrund*  
Deutsche Architekten- u. Ingenieurzeitschrift,  
8/9, 12 - 16
- [30] Hilmer, K./ (1978) *Der Einfluß der Temperatur auf den Erddruck hinter  
Vogt, N. Bauwerkswänden,*  
Geotechnik 1, 75 - 83

- [31] Schad, H. (1978) *Die Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben*  
Vorträge Baugrundtagung Berlin, 141 - 161
- [32] Schulz, H./Smoltczyk, U. (1978) *Zur Ermittlung der Scherparameter überkonsolidierter Böden für Erddruckberechnungen*  
Vorträge Baugrundtagung Berlin, 275 - 296
- [33] Smoltczyk, U. (1978) *DFG-Schwerpunktprogramm Bodenmechanik*  
GEOTECHNIK 1, 29 - 42
- [34] Gußmann, P. (1978) *Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von äußeren Kräften*  
GEOTECHNIK 1, 68 - 74
- [35] Hilmer, K./Vogt, N. (1978) *Der Einfluß der Temperaturverformung auf den Erddruck hinter Bauwerkswänden*  
GEOTECHNIK 1, 75 - 84
- [36] Schmidt, H.-H. (1978) *Entwicklung einer Eignungsprüfung für Maßnahmen zum mittelfristigen Schutz des Erdplanums unter besonderer Berücksichtigung des von oben eindringenden Wassers*  
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.033 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart
- [37] Schmidt, H.-H. (1978) *Erprobung von Versiegelungen fein- und gemischtkörniger Böden auf bituminöser Basis unter Verwendung von Handelsprodukten*  
Forschungsbericht F.A. Nr. 5.034 G 76 A für den Bundesminister für Verkehr, bearbeitet am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Universität Stuttgart
- [38] Gußmann, P. (1979) *Die Bestimmung bodenmechanischer Parameter aus der Differenz der Zeitsetzung unterschiedlich dräniert Laborversuche*  
GEOTECHNIK 2, 148 - 154
- [39] Smoltczyk, U. (1979) *Bestimmung der Baugrundfestigkeit mit der Seitendrucksonde. Vortragsband zum Pfahlsymposium München 1977, 77 - 80*
- [40] Schmidt, H.-H. (1979) *Erddruck auf Widerlager und Stützmauern in Abhängigkeit von Untergrundbewegungen durch Dammschüttungen. Forschungsbericht FA 5.042 G 77 H B.f.Verkehr*
- [41] Smoltczyk, U. (1979) *Zur Berechnung von Bodenreaktionskräften*  
Berichte Bundesvereinigung Prüfeningenieure für Baustatik, Arbeitstagung 4, 23 - 51
- [42] Smoltczyk, U./Vogt, N./Hilmer, K. (1979) *Lateral Earth Pressure Due to Surcharge*  
Proc. 7.ECSMFE Brighton, 2, 131 - 140
- [43] Smoltczyk, U. (1979) *Influence of foundation depth on raft analyses*  
Proc. 3.Int.Conf.Numerical Methods in Geomechanics, 4, 1503 - 1512
- [44] Smoltczyk, U. (1979) *Dammschüttung in Baggerseen beim Bau der Schnellbahnstrecke Mannheim-Stuttgart*  
2.Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, 113 - 119
- [45] Smoltczyk, U./Gartung, E. (1979) *Geotechnical Properties of a Soft Keuper Sandstone. Proc. 4.Int.Congr.Rock Mechanics Montreux, 639 - 644*
- [46] Smoltczyk, U./Schmidt, H.-H. (1979) *Forschungsergebnisse von Erddruckuntersuchungen an Modellwänden*  
Tagung der Arbeitsgruppe Untergrund der Forschungsgesellschaft f.d.Straßenwesen Koblenz
- [47] Smoltczyk, U./Gußmann, P./Schad, H. (1980) *Grundbautaschenbuch 3.Auflage Teil 1 mit Beiträgen:*  
1.1 Internationale Vereinbarungen; Klassifizierung des Fachschrifttums und Symbole  
1.2 Baugrundgutachten; 1.7 Numerische Verfahren in der Bodenmechanik; 1.10 Berechnung von Zeitsetzungen. Verlag W.Ernst u.Sohn Berlin München

## MITTEILUNGEN DES BAUGRUNDINSTITUTS STUTTGART

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. U. Smoltczyk

- Nr. 1 Thamm, B. (1974) Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wassergesättigten Tones  
Preis: DM 10,--
- Nr. 2 Gußmann, P. (1975) Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch  
Preis: DM 5,--
- Nr. 3 Feeser, V. (1975) Die Bedeutung des Kalziumkarbonats für die bodenphysikalischen Eigenschaften von Löss  
Preis: DM 10,--
- Nr. 4 Du Thinh, K. (1976) Standsicherheit von Böschungen: Programm-Dokumentation  
Preis einschließlich Quellenprogramm: DM 200,--
- Nr. 5 Smoltczyk, U. (1976) Messungen an Schleusen in der UdSSR  
Pertschi, O. / Schleusennorm der UdSSR (SN 303-65)  
Hilmer, K. Preis: DM 18,--
- Nr. 6 Hilmer, K. (1976) Erddruck auf Schleusenkammerwände  
Preis: DM 18,--
- Nr. 7 Laumans, Q. (1977) Verhalten einer ebenen, in Sand eingespannten Wand bei nichtlinearen Stoffeigenschaften des Bodens  
Preis: DM 18,--
- Nr. 8 Lächler, W. (1977) Beitrag zum Problem der Teilflächenpressung bei Beton am Beispiel der Pfahlkopfanschlüsse  
Preis: DM 15,--
- Nr. 9 Spotka, H. (1977) Einfluß der Bodenverdichtung mittels Oberflächen-Rüttelgeräten auf den Erddruck einer Stützwand bei Sand  
Preis: DM 15,--
- Nr. 10 Schad, H. (1979) Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben  
Preis: DM 20,--
- Nr. 11 Ulrich, G. (1980) Verschiebungs- und kraftgesteuerte Plattendruckversuche auf konsolidierenden Böden  
Gußmann, P. (1980) Zum Modellgesetz der Konsolidation  
Preis: DM 20,--
- Nr. 12 Salden, D. (1980) Der Einfluß der Sohlenform auf die Traglast von Fundamenten  
Preis: DM 25,--
- Nr. 13 Seeger, H. (1980) Beitrag zur Ermittlung des horizontalen Bettungsmoduls von Böden durch Seitendruckversuche im Bohrloch  
Preis: DM 25,--

- Nr. 14 Schmidt, H.-H. (1981) Beitrag zur Ermittlung des Erddrucks auf Stützwände bei nachgiebigem Baugrund  
Preis: DM 25,--
- Nr. 15 Smoltczyk, U. (1981) Vorstudie über bauliche Alternativen für Durchgangsstrassen in Siedlungen  
Schweikert, O. Preis: DM 12,--
- Nr. 16 Malcharek, K. (1981) Vergleich nationaler Richtlinien für die Berechnung von Fundamenten  
Smoltczyk, U. Preis: DM 15,--

