BAUGRUNDINSTITUT
STUTTGART

MITTEILUNG 2

PETER GUSSMANN

1975

EINHEITLICHE BERECHNUNG VON GRUNDBRUCH UND BÖSCHUNGSBRUCH

Das Baugrundinstitut ist unter der Bezeichnung
" INSTITUT FÜR GRUNDBAU UND BODENMECHANIK "
eine Einrichtung der Universität Stuttgart

BAUGRUNDINSTITUT STUTTGART

PROF. DR.-ING. U. SMOLTCZYK

MITTEILUNG 2

Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch

von

Dr.-Ing. Peter Gussmann

Stuttgart 1975

Gegen Vervielfältigung und Übersetzung bestehen keine Einwände, es wird lediglich um Quellenangabe gebeten.

Herausgegeben 1975 im Eigenverlag des Baugrundinstituts
Druck: Winkler & Schräpler,Reprographische Arbeiten, Stuttgart

Umschlagentwurf: Studio Fink oHG, Altdorf

Vorwort

Die Forderung der DIN 4084 bzw. der DIN 1054, in den Fällen, wo eine Flachgründung neben einer Böschung steht, außer einem Grundbruchnachweis auch den Nachweis der Böschungsstandsicherheit zu führen, ist solange berechtigt, wie es nicht gelingt, ein praxisreifes einheitliches Rechenverfahren zu empfehlen. Denn die Zweiheit "Grundbruch" - "Böschungsbruch" ist ein Scheinproblem, da es sich um denselben physikalischen Vorgang handelt. Hinzu kommt, daß die übliche Grundbruchberechnung nach DIN 4017 bei solchen Randbedingungen meist gar nicht anwendbar ist, weil die dazu gehörigen besonderen Bruchflächen in der Praxis unbekannt sind und die tabulierten Tragfähigkeitsbeiwerte nicht passen. Man muß dann ohnehin auf das Lamellenverfahren nach DIN 4084 oder ein anderes zurückgreifen und sieht sich der Frage nach der zu fordernden Sicherheit gegenübergestellt: 1,4 nach DIN 4084 oder 2,0 nach DIN 1054? Diese Ungereimtheiten, auf die besonders Herr Dr.-Ing.Franke, Hamburg, wiederholt hinwies, haben Herrn Dr.-Ing.Gußmann veranlaßt, den logischen Zusammenhang zwischen den Sicherheitsbegriffen der Böschungsberechnung und der Grundbruchberechnung in der nachfolgenden Untersuchung herzustellen. Dabei ging er von der einfachen Böschungsformel Terzaghis aus (Lamellenseitenkräfte parallel zur Bruchflächenrichtung), ohne daß das die Schlußfolgerungen entscheidend beeinflußt.- Die Arbeit ist in Verbindung mit vorausgehenden wissenschaftlichen Veröffentlichungen Gußmanns Bestandteil eines laufenden Habilitationsverfahrens der Universität Stuttgart. Ich veröffentliche sie bereits vor Abschluß des Verfahrens als Institutsmitteilung, weil die Erarbeitung eines einheitlichen Sicherheitskonzeptes im Grundbau das Ziel mehrerer anlaufender Forschungsprojekte in der Bundesrepublik ist und ich mir denke, daß die Schlußfolgerungen Gußmanns, denen ich mich anschließen möchte, diese Diskussionen gerade in der Anfangsphase beleben und in konkrete Bahnen lenken könnten.

Smoltczyk

I N H A L T

1. Einführung S. 1

2. Grundbruchberechnung nach der Böschungstheorie 2

2.1 Vergleich der Sicherheitsdefinitionen 5

2.2 Variation der Gleitkreise 13

2.2.1 Vollständige Variation 13

2.2.2 Eingeschränkte Variation 16

2.2.3 An die Grundbruchfigur angepaßter Gleitkreis 16

2.3 Einfluß der Spannungsverteilung infolge Fundamentlast 18

2.4 Auswertung 25

3. Schlußfolgerungen 41

Literaturnachweis 47

Anhang 48

1. Einführung

Zur Bemessung tragfähiger Baukonstruktionen ist es erforderlich,
- die Gebrauchsfähigkeit unter einer gegebenen Belastung nachzuweisen und
- eine gewisse Sicherheit gegenüber dem Versagensfall einzuhalten.

Hierbei bezieht sich die erforderliche Sicherheit gegen Versagen auf
- angreifende Kräfte bzw. Spannungen,
- entstehende Verformungen bzw. Dehnungen,
- Materialparameter oder/und die
- Wahrscheinlichkeit der Beanspruchung.

Der Versagensfall selbst wird hierbei entweder experimentell, theoretisch oder durch Kombination experimenteller und theoretischer Verfahren ermittelt.
Insbesondere liegt dem Nachweis der Grundbruchsicherheit nach DIN 4017 - und er ist mit das Objekt der nachfolgenden Untersuchung - ein solcher gemischter, teils theoretischer, teils empirischer Ansatz zugrunde.
Die theoretischer Ermittlung des Versagensfalles selbst kann dabei mit unterschiedlichen mechanischen Methoden und mit unterschiedlichem Aufwand durchgeführt werden.
Hinsichtlich des Abstands vom Versagensfall - d.h. also bezüglich der erforderlichen Sicherheit - bedeutet dies, daß letztere stets im Zusammenhang mit der Ursache des Versagens, also mit der Sicherheitsdefinition, gesehen werden muß. Darüberhinaus bedeutet es zum Teil sogar, daß die nachzuweisende Sicherheit auch im Zusammenhang mit der gewählten Untersuchungsmethode bewertet werden muß.

In einem konkreten Fall aus dem Gebiet des Grundbaus, nämlich beim Nachweis der Grundbruchsicherheit in komplizierten Fällen (Schichtprobleme; Auftreten von Porenwasserdrücken; Bauwerke auf der Bergseite von Geländesprüngen oder Böschungen) reicht das in DIN 4017 angebotene Verfahren kaum aus, um auch nur einigermaßen die Vielfalt der in der Praxis anzutreffenden Probleme zu berücksichtigen. Es ist zu bedenken, daß diese Norm vor allem für den schnellen und einfachen Nachweis von Regelfällen konzipiert wurde; außerdem können bei dem einfachen Ansatz auf dem Weg über die Formbeiwerte

unterschiedliche Grundrißformen - also räumliche Probleme - näherungsweise erfaßt werden.
Man behilft sich deswegen häufig in den komplizierteren Fällen mit den Verfahren zum Nachweis der Geländebruch- bzw. Böschungsbruchsicherheit (DIN 4084 Blatt 1 und 2), die - allerdings nur bei ebenen Problemen - die Berücksichtigung fast beliebiger Randbedingungen erlauben. Dies ist auch durchaus sinnvoll, denn im Prinzip stellt ja im Fall des Streifenfundaments der Grundbruch einen Sonderfall des Böschungsbruchs dar. Da außerdem in der Praxis für beide Probleme dieselbe Mohr-Coulomb'sche Bruchbedingung zugrundegelegt wird, liegt es nahe, zum mindesten in komplizierteren Fällen, den Grundbruchnachweis durch den Geländebruchnachweis zu ersetzen. Welche Sicherheit aber dann einzuhalten ist, ob
- die nach DIN 1054 erforderliche Grundbruchsicherheit: $\eta_G \geq 2{,}0$, oder
- die nach DIN 4084 erforderliche Sicherheit: $\eta_B \geq 1{,}4$,
ist eine zunächst offene Frage.

Die folgenden Untersuchungen werden zeigen, in welcher Weise die unterschiedlichen Sicherheitsdefinitionen einerseits, die unterschiedlichen Bruchlasten im Versagensfall andererseits das Ergebnis beeinflussen. Beim Vergleich der Ergebnisse wird vor allem die große Abhängigkeit des Unterschieds beider Ergebnisse vom Scherwinkel ϕ bemerkenswert sein.

2. Grundbruchberechnung nach der Böschungstheorie

Das Versagen der Standsicherheit eines Fundaments durch Grundbruch kann nach unterschiedlichen Ansätzen erfaßt werden. Allen Ansätzen gemeinsam ist das Ziel, einen Grenzzustand zu beschreiben, der nicht überschritten werden kann oder darf, ohne die Funktionsfähigkeit des Fundaments zu beeinträchtigen.
Man kann die vorhandenen theoretischen Verfahren in folgende beiden Gruppen einteilen:

a. vom Belastungsvorgang unabhängige Verfahren oder Grenzgleichgewichtsverfahren;
b. vom Belastungsvorgang abhängige Verfahren.

Unter den Verfahren der Gruppe (b), die den progressiven Bruch (bzw. auch nur progressives Fließen) berücksichtigen, ist vor allem die Methode der finiten Elemente (FEM) mit Verschiebungs-

bzw. gemischtem Verschiebungs- und Spannungsansatz zu erwähnen. Vom Prinzip her erscheint diese Methode geradezu ideal, das Grundbruchproblem, beginnend vom Ausgangszustand mit sich entwikkelnden Fließzonen bei zunehmender Belastung bis hin zu einem Grenzzustand zu berechnen. Da gleichzeitig auch die Verformungen berechnet werden können, kann der Versagensfall entweder nach einem Kriterium zu großer und unerlaubter Verformungen oder durch Erreichen eines statischen Grenzgleichgewichtszustandes - der sich bei manchen Verfahren durch einen numerischen Instabilitätszustand bemerkbar macht - gekennzeichnet werden. Vor allem können mit der FEM komplizierte Randbedingungen, Inhomogenitäten des Baugrunds, der Einfluß der Fundamentsteifigkeit, nicht-lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und plastische Dehnungsanteile berücksichtigt werden. Doch leider ist man noch nicht so weit, dieses Problem auch nur einigermaßen sicher lösen zu können, obwohl große und schnelle Computer und auch eine Reihe guter und praktikabler Programmsysteme zur Verfügung stehen und an vielen Stellen auf diesem Gebiet weiter gearbeitet wird.
Die Schwierigkeiten liegen im Detail. Einige davon sind:

- die angesetzten Materialgesetze sind häufig so geartet, daß im Zusammenhang mit den iterativen Rechentechniken leicht Oszillationen in den Spannungen entstehen, die sprunghaft wechselnde Fließbereiche nach sich ziehen;
- das Netz der Elemente sollte im Bereich großer Spannungsgradienten einerseits, im Bereich der plastischen Zonen andererseits sehr dicht sein. Das erfordert entweder von vornherein sehr viele kleine Elemente und damit viel Speicherplatz oder eine progressive Verdichtung, was einen immer wieder neuen Elementaufbau mit sich ändernden Steifigkeitsmatrizen und damit größere Rechenzeiten bedeutet;
- das Materialgesetz bzw. die Elemente müßten zum Teil anisotrop aufgebaut sein, um bei entstehenden Scherbrüchen eine Kraftübertragung senkrecht zur Scherrichtung weiter zu gewährleisten;
- die geometrische Nichtlinearität sollte im Bereich großer Verformungen berücksichtigt werden.

Dies sind nur einige Probleme, die noch bewältigt werden müssen. Obwohl die einzelnen Schwierigkeiten, jede für sich allein, durchaus beherrscht werden können, ergibt ihre Verknüpfung eine so große Unsicherheit, daß kaum zwei Bearbeiter trotz gleicher Ansätze

ohne eine Absprache gleiche Ergebnisse erzielen, die glaubhaft sind.
Viele Veröffentlichungen mit guten und positiven Ergebnissen scheinen diese eher etwas pessimistische Einschätzung des Verfassers bezüglich der Anwendung der FEM auf Grundbruch- und Geländebruchprobleme zu widerlegen; eigene Untersuchungen, Untersuchungen unseres Instituts wie auch Fachgespräche mit vielen auf diesem Gebiet tätigen Kollegen bestätigen den Verfasser jedoch in seiner Beurteilung des gegenwärtigen Wissensstandes.

Die erste Gruppe (a) der Verfahren wird - sofern sie im Rahmen ihrer Annahmen als exakt angesehen werden kann - fast ausschließlich mit Methoden der Plastizitätstheorie behandelt, wobei drei Kriterien eine Rolle spielen [1]:

a. die kinematische Zulässigkeit,
b. die statische Zulässigkeit,
c. die Bruchbedingung.

Bei der Erfüllung von b derart, daß die Bruchbedingung c nirgends verletzt wird, ergibt sich z.B. beim Grundbruchproblem eine untere Grenze für die Grundbruchlast; bei Erfüllung von a und c (die Bruchbedingung ist im gesamten untersuchten Gebiet verletzt bzw. erreicht) eine obere Grenze.
Daneben gibt es noch eine Vielzahl von Näherungsverfahren, die einen Linienbruch voraussetzen, d.h. die Bruchbedingung nur längs einer Linie erfüllen, im allgemeinen aber die kinematische und die Gleichgewichtsbedingung nur näherungsweise erfüllen. In Verbindung mit einer Variation der gewählten Prüfgleitfläche zur Auffindung der jeweils kleinsten Sicherheit werden diese Verfahren sehr häufig zur Lösung praktischer Standsicherheitsprobleme herangezogen, da sie sehr anschaulich und relativ einfach anzuwenden sind. Die Ergebnisse solcher Berechnungen werden meist zwischen der unteren und der oberen Schranke eingeordnet. Wegen der unvollständigen Erfüllung von a und b gibt es aber auch Lösungen außerhalb beider Schranken.

2.1 Vergleich der Sicherheitsdefinitionen

Der Grundbruchnachweis nach DIN 4017 geht in seiner jetzigen Form von einem empirischen Ansatz aus, der auf einer plastizitätstheoretischen Lösung von Prandtl für den gewichtslos gedachten Boden aufbaut. Die Sicherheitsdefinition bezieht sich hier auf die angreifende Vertikalkraft P bzw. Vertikalspannung p:

$$\eta_G = \frac{P_G}{P} = \frac{p_G}{p} \geq 2 \quad \text{(Lastfall 1)} \qquad (1)$$

Darin ist

η_G - die nach DIN 1054 nachzuweisende Grundbruchsicherheit,

p_G - die nach DIN 4017 berechnete Grundbruchspannung,

p - die vorhandene Spannung in der Sohlfuge des Fundaments.

Die Bruchspannung selbst errechnet sich im Fall des Streifenfundaments unter zentrischer, senkrechter Belastung (Bild 1) zu

$$p_G = \frac{P_G}{B} = \underbrace{\lambda_b \gamma_2 B}_{\text{(Breitenglied)}} + \underbrace{\lambda_t \gamma_1 t}_{\text{(Tiefenglied)}} + \underbrace{\lambda_c c}_{\text{(Kohäsionsglied)}} \qquad (2)$$

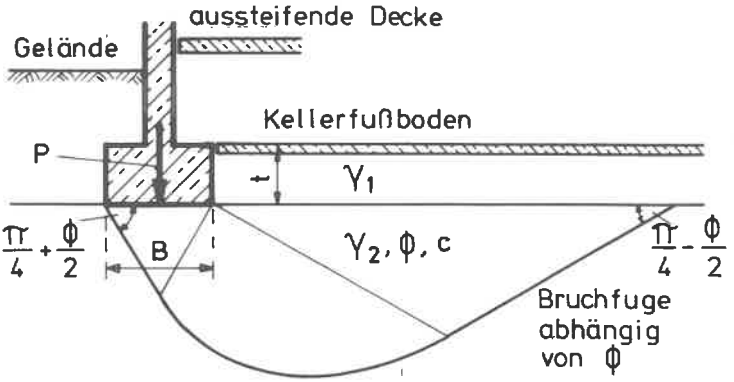

Bild 1: Grundbruchfigur nach DIN 4017

Die Tragfähigkeitsbeiwerte λ_b, λ_t und λ_c ergeben sich aus den Differentialgleichungen des ebenen Grenzgleichgewichts, d.h. unter Zugrundelegung der Mohr-Coulomb'schen Bruchbedingung (Bild 2):

$$\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right\}_f = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} + 2c \cdot \frac{\cos\phi}{1 - \sin\phi} \qquad (3)$$

(ϕ - Scherwinkel).

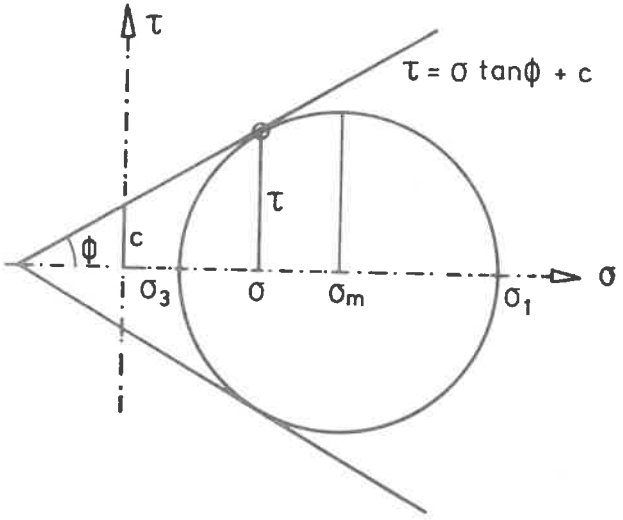

Bild 2:
Mohr-Coulomb'sche Bruchgerade

Die in Bild 1 eingetragene dreiteilige Bruchfigur, die im Fall $\gamma_2 = 0$ aus einer Geraden, einer logarithmischen Spirale und einer Geraden besteht, hängt ausschließlich vom Scherwinkel ϕ, nicht aber von der Kohäsion c oder der Auflast $\gamma_1 t$ ab.
Während sich an der vereinfachten Bruchfigur für $\gamma_2 = 0$ (Prandtl'sche Fall) die Beiwerte λ_t und λ_c geschlossen ableiten lassen, kann man λ_b nur numerisch oder näherungsweise dadurch ermitteln, daß man an der für $\gamma_2 \neq 0$ nicht mehr zutreffenden Prandtl'schen Bruchfigur den Eigengewichtseinfluß durch Berechnung der Reaktionskräfte und -momente an der starren Scheibe statt der Spannungsberechnung erfaßt.
Man erhält die in der neuen DIN 4017 empfohlenen Tragfähigkeitsbeiwerte

$$\left.\begin{aligned} \lambda_t &= \exp\{\pi \cdot \tan\phi\} \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \\ \lambda_b &= (\lambda_t - 1) \cdot \tan\phi \\ \lambda_c &= (\lambda_t - 1) \cdot \cot\phi \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Für die Ermittlung der Standsicherheit von Böschungen und Geländesprüngen werden in der Praxis die unterschiedlichsten Näherungsverfahren benutzt [2]. Meist handelt es sich um Verfahren, die einen Linienbruch längs einer vorgegebenen einfachen Kurve - Kreis,

logarithmische Spirale oder Gerade - voraussetzen.
Damit hängt die Sicherheit gegenüber dem Versagensfall der Böschung von folgenden Kriterien ab:

1. der Sicherheitsdefinition;
2. der Bruchbedingung in der Prüffläche (meist die von Mohr-C.);
3. dem Kurventyp der Prüfgleitfläche und ihrer Variation;
4. der Spannungsverteilung in der Prüffläche;
5. den Vernachlässigungen bei Erfüllung der Gleichgewichts- und kinematischen Bedingungen.

Den meisten Verfahren liegt eine Sicherheitsdefinition zugrunde, wonach der Bruchzustand durch eine Verschlechterung der Bodenkennwerte erreicht wird, z.B. in der Form

$$\eta_B = \frac{\max\tau}{\mathrm{vorh}\tau} \geq 1{,}4 \qquad (5)$$

mit den Bezeichnungen

$\max\tau$ - maximal erreichbare Scherspannung in der Bruchfuge,
$\mathrm{vorh}\tau$ - durch die angreifenden Kräfte mobilisierte Scherspannung in der Bruchfuge.

Der Index B weist jeweils auf die Böschungsstandsicherheit hin. Die Scherspannungen stellen hierbei unterschiedliche Mittelwerte bezüglich der Gleitfläche dar. Die üblichen Lamellenverfahren bevorzugen einen Lösungsweg, der eine Summation der Scherkräfte enthält.
Den folgenden Untersuchungen der Standsicherheit eines Fundaments nach einem Lamellenverfahren soll eine vereinfachte Formel für eine kreisförmige Gleitfläche zugrundegelegt werden (siehe z.B. bei Bishop [3]). Danach ergibt sich zunächst die Böschungsstandsicherheit

$$\eta_B = \frac{\sum_1 (\bar{G}_i \cos\beta_i \tan\phi_i + c_i \frac{b_i}{\cos\beta_i})}{\sum_1 \bar{G}_i \sin\beta_i} \qquad (6)$$

Der Index i bezeichnet die laufende Nr. der Lamelle, $\bar{G}_i$ ist ihr Gewicht, b_i ihre Breite und β_i ihr Richtungswinkel.
Erweitert man Gl.(6) dahingehend, daß unter $\bar{G}_i$ nicht allein die Gewichtskraft der Lamelle i, sondern alle auf die Lamelle einwirkenden äußeren oder eingeprägten Vertikalkräfte verstanden werden, dann kann das Grundbruchproblem - siehe Bild 3 - ebenfalls mit dieser Formel behandelt werden. Wenn man in erster Näherung annimmt, daß sich die Randkräfte nur auf die senkrecht darunter

befindlichen Lamellen auswirken, können die Summen in Gl.(6) durch Integrale ersetzt werden. Die Sicherheit ergibt sich dann in der Form

$$\eta_B = \frac{F_b + F_o + F_t^* + F_c}{G_b + G_o + G_t^*} \qquad (7)$$

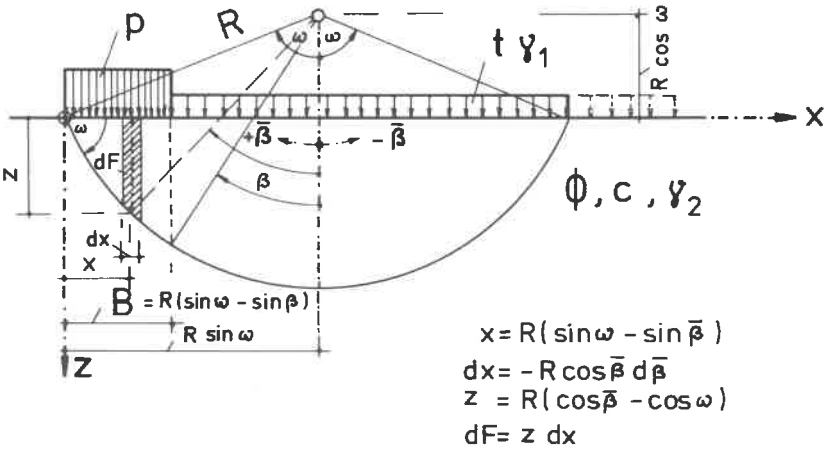

Bild 3: Geometrie des Gleitkreises

Die Abkürzungen in Gl.(7) haben folgende Bedeutungen;

$$F_b = 2\int_0^{R\sin\omega} \gamma_2 \tan\phi \cdot \cos\bar{\beta} \cdot y \cdot dx = \gamma_2 \cdot BR \cdot \tan\phi \cdot f_b$$

$$F_o = \int_0^{B} p \cdot \tan\phi \cdot \cos\bar{\beta} \cdot dx = p \cdot R \cdot \tan\phi \cdot f_o$$

$$F_t^* = \int_B^{2R\sin\omega} \gamma_1 t \cdot \tan\phi \cdot \cos\bar{\beta} \cdot dx = \gamma_1 t \cdot R \cdot \tan\phi \cdot f_t^*$$

$$F_c = 2\int_0^{R\sin\omega} \frac{c}{\cos\bar{\beta}} dx = c \cdot R \cdot f_c$$

$$G_b = \int_0^{2R\sin\omega} \gamma_2 \sin\bar{\beta} \cdot y \cdot dx = \gamma_2 B \cdot R \cdot g_b$$

$$G_o = \int_0^{B} p \cdot \sin\bar{\beta} \cdot dx = p \cdot R \cdot g_o$$

$$G_t^* = \int_B^{2R\sin\omega} \gamma_1 t \cdot \sin\bar{\beta} \cdot dx = \gamma_1 \cdot t \cdot R \cdot g_t^*$$

Die Abkürzungen f_i, g_i sind Funktionen der beiden Winkel ω und β, welche die Lage des Gleitkreises beschreiben. Die Integration liefert:

$$
\left.
\begin{aligned}
f_b &= 2\cdot \frac{\sin\omega - \frac{1}{3}\sin^3\omega - \frac{\omega}{2}\cos\omega - \frac{1}{4}\cdot\sin 2\omega\cdot\cos\omega}{\sin\omega - \sin\beta} \\
f_0 &= \frac{1}{2}\{\ \omega - \beta + \frac{1}{2}(\sin 2\omega - \sin 2\beta\ )\} \\
f_t^* &= \frac{1}{2}\{\ \omega + \beta + \frac{1}{2}(\sin 2\omega + \sin 2\beta\ )\} = -f_0 + f_t \\
f_t &= \omega + \frac{1}{2}\sin 2\omega \\
f_c &= 2\omega \\
g_b &= 0 \\
g_0 &= \frac{1}{2}\{\ \sin^2\omega - \sin^2\beta\ \} \\
g_t^* &= -g_0
\end{aligned}
\right\} \qquad (9)
$$

Nach Zusammenfassung folgt damit aus (7):

$$\eta_B = \{\frac{\gamma_{2B}\cdot f_b + \gamma_1 t\cdot f_t}{(p - \gamma_1 t)\cdot g_0} + \frac{f_0}{g_0}\}\cdot\tan\phi + \frac{c\cdot f_c}{(p - \gamma_1 t)\, g_0} \qquad (10)$$

Mit der Abkürzung

$$\mu_i = \frac{f_i}{g_0} \qquad (11)$$

erhält man zunächst

$$\eta_B = \left[\frac{\gamma_{2B}\cdot\mu_b + \gamma_1 t\cdot\mu_t}{p - \gamma_1 t} + \mu_0\right]\cdot\tan\phi + \frac{c}{p - \gamma_1 t}\cdot\mu_c .$$

Wenn man diejenige Spannung p als Bruchspannung p_B bezeichnet, die die Sicherheit $\eta_B = 1$ liefert, folgt

$$p_B - \gamma_1 t = \frac{1}{1 - \mu_0\tan\phi}\left[(\gamma_{2B}\mu_b + \gamma_1 t\cdot\mu_t)\tan\phi + c\cdot\mu_c\right]$$

und man erhält folgende Form der Sicherheitsdefinition

$$\eta_B = \frac{p_B^*}{p^*}(1 - \eta_0) + \eta_0 \qquad (12)$$

mit

$$p^* = p - \gamma_1\cdot t; \qquad p_B^* = p_B - \gamma_1 t \qquad (13)$$

und

$$\eta_0 = \mu_0\tan\phi \qquad (14).$$

Mit den weiteren Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_b &= \frac{\mu_b}{1-\eta_0}\,\tan\phi \\ \lambda_t &= \frac{\mu_t}{1-\eta_0}\cdot\tan\phi + 1 = \lambda_t^{*} + 1 \\ \lambda_c &= \frac{\mu_c}{1-\eta_0} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

erhält man die Bruchspannung

$$p_B = \gamma_2 B\cdot\lambda_b + \gamma_1 t\cdot\lambda_t + c\cdot\lambda_c \qquad (16).$$

Das Ergebnis überrascht: die durch Gl.(16) gegebene Bruchlast hat den gleichen formalen Aufbau wie die aus 3 Summanden zusammengesetzte halbempirische Grundbruchgleichung (2); dagegen weicht die Sicherheitsdefinition nach Gl.(12) von der gewohnten Form nach Gl.(1) ab.

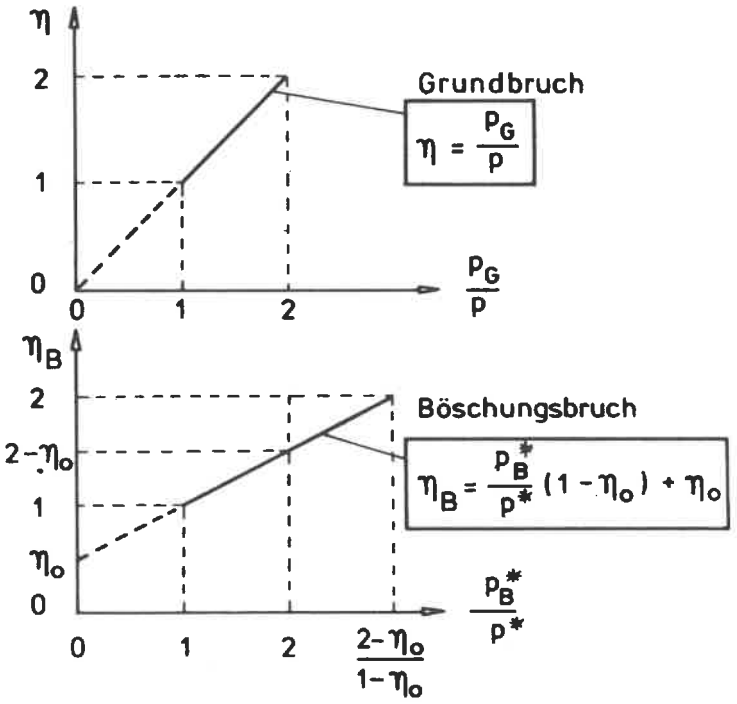

Bild 4: Vergleich der unterschiedlichen Sicherheitsdefinitionen beim Grundbruchproblem

Aus Bild 4 erkennt man sofort den Unterschied im Aufbau der beiden Sicherheitsdefinitionen: bei der Definition nach der Grundbruchtheorie kann die Sicherheit in Abhängigkeit vom Verhältnis der Bruchlast zur vorhandenen Last als unter 45^0 geneigte Gerade dargestellt werden, die im Punkt (1;1) beginnt.
Bei der Definition im Sinne der Böschungssicherheit ergibt sich zwischen der Sicherheit und dem Verhältnis aus Bruchlast und vorhandener Last - allerdings jeweils abgemindert um die seitliche Auflast - ebenfalls eine lineare Beziehung. Diese Gerade beginnt (bezogen auf die im Sinne der Böschungssicherheit ermittelte Bruchlast) auch im Punkt (1;1), hat aber eine kleinere Neigung als 45^0.
Setzt man zunächst einmal gleiche Bruchlasten voraus, so bedeutet das bei einer im Verhältnis zur vorhandenen Last P kleinen seitlichen Auflast, daß sich nach der Böschungstheorie kleinere rechnerische Sicherheiten ergeben als nach der Grundbruchtheorie.

Tatsächlich ergeben sich aber auch unterschiedliche Bruchspannungen, was auch berücksichtigt werden muß. Führt man den Verhältniswert

$$v^* = \frac{p_B - \gamma_1 t}{p_G - \gamma_1 t} = \frac{p_B^*}{p_G^*} , \qquad (17)$$

also das Verhältnis der um die seitliche Auflast abgeminderten Bruchlasten nach der Böschungstheorie und nach der Grundbruchtheorie ein, dann folgt aus (13):

$$\eta_B = \frac{p_G^*}{p^*} v^*(1 - \eta_0) + \eta_0 \qquad (18).$$

Diese Definition, die sich für einen Vergleich zwischen Grundbruch- und Böschungsbruchtheorie am besten eignet, ist analog zu den vorausgehenden Interpretationen der Sicherheiten in Bild 5 für einen Wert $v^* < 1$ dargestellt.
Man erkennt, daß bei Anwendung der Definition für die Böschungssicherheit auf das Grundbruchproblem zwei wesentliche Unterschiede zur gewohnten Grundbruchberechnung bestehen können : a. die Unterschiede in den Bruchlasten p_B und p_G; b. die Unterschiede in der Definition der Sicherheiten η_B und η_G .
Im folgenden sollen diese Unterschiede nicht getrennt betrachtet werden, da sowohl die Bruchspannung - nach den Gln.(15) und (16) - als auch die Sicherheitsdefinition - nach den Gln.(12) bzw.(18) -

von der Größe des Wertes η_0 abhängen, d.h. daß dieser Wert die Sicherheit in doppelter Weise beeinflußt.

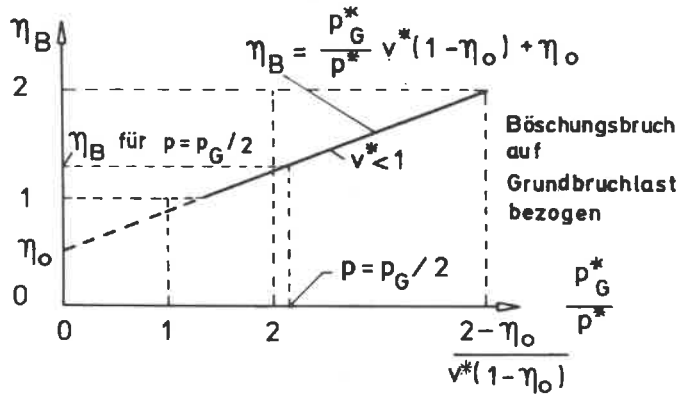

Bild 5: Sicherheitsdefinition nach der Böschungstheorie, bezogen auf die Grundbruchlast nach der Grundbruchtheorie

Betrachtet man noch einmal rückblickend die Entstehung des Wertes η_0 , so erkennt man, daß η_0 das Verhältnis des durch p mobilisierten Anteils der Reaktions-Scherkraft zur Aktionskraft infolge der Belastung p bedeutet. Daraus kann jetzt schon - also ohne weitere Rechnung - abgeleitet werden, daß η_0 monoton von 0 aus ansteigend (bis maximal 1) mit zunehmendem Scherwinkel zunimmt. Das bedeutet, daß zum mindesten bei rein kohärenten Böden ($\phi = 0$) die Sicherheitsdefinitionen nach der Grundbruch- und nach der Böschungsbruchtheorie gleich sind, sofern man in Gl.(12) bzw. (17) und (18) den Einfluß der seitlichen Auflast vernachlässigt. Die Bruchspannungen selbst können allerdings wegen der unterschiedlichen Rechenverfahren verschieden sein.

Man kann weiter vermuten, daß η_0 auch von der angenommenen Spannungsverteilung infolge der Belastung p abhängt. Bei der bisherigen Ableitung wurde diese Spannung als über die Breite B des Fundaments konstant verteilt angenommen und in die senkrecht darunter liegenden Lamellen eingerechnet. Untersucht man nun

- andere Sohlspannungsverteilungen und
- andere Spannungsausbreitungen,

dann beeinflußt das ausschließlich den Wert η_0 , nicht aber die Werte μ_b, μ_t und μ_c für ein und denselben Kreis. Da aber die nach der Böschungstheorie zu ermittelnde Sicherheit stets eine volle

Variation aller in Frage kommenden Kreis voraussetzt, bis die kleinste Sicherheit als Minimum gefunden ist, müssen die jeweils maßgebenden Kreise bei unterschiedlicher Verteilung der Spannungen infolge p nicht gleich - und dementsprechend auch die Werte μ_b, μ_t und μ_c nicht gleich sein.
Falls man andere Formeln für die Böschungsstandsicherheit verwendet als diejenige nach Gl.(6) - beispielsweise die in DIN 4084 empfohlene - bleiben die abgeleiteten Erkenntnisse bezüglich der Bruchspannung und der Sicherheitsdefinition qualitativ übertragbar. Die Bevorzugung der Gl.(6) gegenüber anderen Formeln in der vorliegenden Untersuchung lag in ihrer einfachen Form begründet, die eine geschlossene Integration und anschließend eine teilweise analytische Minimalisierung ermöglichte.

2.2 Variation der Gleitkreise

Die Böschungstheorie fordert stets eine Variation der Gleitflächen derart, daß das Minimum aller unter gleichen Verhältnissen (Last, Bodenkennwerte) ermittelten Sicherheiten als maßgebende Sicherheit erhalten wird. Definitionsgemäß ergibt sich also die Bruchspannung p_B an einem Kreis, für den die maßgebende Sicherheit $\eta_B = 1$ wird: D.h. die Variation zur Minimalisierung der Sicherheit beeinhaltet gleichzeitig eine Minimalisierung der Bruchspannung, sofern die Nebenbedingung $\eta_B = 1$ beachtet wird. Wird sie aber nicht beachtet, sondern bei einer vorgegebenen Belastung eine Sicherheit $\eta_B > 1$ ermittelt, so muß der zugehörige Kreis nicht mit dem Kreis identisch sein, der bei einer größeren Belastung die Sicherheit $\eta_B = 1$ und damit diese Belastung als Bruchspannung liefert. Das aber würde bedeuten, daß die im vorausgegangenen Abschnitt abgeleitete Gl.(12) und einige folgende Gln. nicht ganz korrekt wären. Anders ausgedrückt: die Ableitung ist dann exakt, wenn Bruchspannung und vorhandene Spannung am gleichen Kreis betrachtet werden. Dies wird im folgenden vorausgesetzt, und zwar wird immer derjenige Kreis betrachtet, für den sich bei vorgegebener Fundamentbreite, seitlicher Auflast und bei vorgegebenen Bodenparametern die Bruchlast ergibt.

2.2.1 Vollständige Variation

Mathematisch bedeutet die Minimalisierung von η_B die gleichzeitige Erfüllung der beiden Gleichungen

$$\eta_{B,\beta} = \frac{\partial \eta_B}{\partial \beta} = 0 \tag{19}$$

$$\eta_{B,\omega} = \frac{\partial \eta_B}{\partial \omega} = 0 \tag{20}$$

und in Übereinstimmung mit den Schlußbemerkungen des letzten Abschnitts die Erfüllung der Nebenbedingung

$$\eta_B = 1 \quad \text{(bzw. } p = p_B \text{ oder } p^* = p_B^* \text{)} \tag{21}.$$

Die Kontrolle, ob das Ergebnis ein Maximum oder ein Minimum darstellt, über die zweiten Differentialquotienten kann entfallen, da ein Maximum des Sicherheitswertes nur bei unendlich großen Gleitkreisen auftritt.

Vor der Durchführung der erforderlichen mathematischen Operationen ist es zweckmäßig, alle auftretenden physikalischen Größen zu normieren und dimensionslose Kennwerte einzuführen. Mit den bezogenen Größen

$$\bar{p} = \frac{p}{\gamma_2 B}\ ; \quad \bar{p}_B = \frac{p_B}{\gamma_2 B}\ ; \quad \bar{t} = \frac{\gamma_1 t}{\gamma_2 B}\ ; \quad \bar{c} = \frac{c}{\gamma_2 B} \tag{22}$$

und

$$\bar{p}^* = \bar{p} - \bar{t}\ ;\ \bar{p}_B^* = \bar{p}_B - \bar{t} \tag{23}$$

folgt zunächst aus den Gln. (10), (14), (15) und (16):

$$\eta_B = \frac{\tan\phi}{g_0} \left\{ \frac{1}{\bar{p}^*} (f_b + \bar{t} \cdot f_t + \frac{\bar{c}}{\tan\phi} \cdot f_c) + f_0 \right\} \tag{24}$$

$$\bar{p}_B^* = \frac{\tan\phi}{1 - \mu_0 \tan\phi} \left\{ \mu_b + \bar{t} \cdot \mu_t + \frac{\bar{c}}{\tan\phi} \cdot \mu_c \right\} \tag{25}.$$

Wendet man die zur Minimalisierung notwendigen Bedingungen (19) und (20) auf die Gl.(24) an, dann erhält man nach einigem Rechnen:

$$\frac{1}{\bar{p}^*} = \frac{g_0 f_{0,\beta} - f_0 g_{0,\beta}}{g_{0,\beta}(f_b + \bar{t} f_t + \bar{c} f_c / \tan\phi) - g_0 f_{b,\beta}} \tag{26}$$

$$g_0 \left\{ \frac{1}{\bar{p}^*} (f_{b,\omega} + \bar{t} \cdot f_{t,\omega} + \frac{\bar{c}}{\tan\phi} \cdot f_{c,\omega} + f_{0,\omega} \right\} - g_{0,\omega} \left\{ \frac{1}{\bar{p}^*} (f_b + \bar{t} f_t + \frac{\bar{c}}{\tan\phi} \cdot f_c) + f_0 \right\} = 0 \tag{27}$$

(Die partiellen Ableitungen sind durch nachgesetzte Indices "β" und "ω" gekennzeichnet. Die Durchführung der Differentiationen ist im Anhang beigefügt.)

Aus Gl.(25) folgt

$$\tan\phi = \frac{\bar{p}_B^*}{\mu_b + \bar{t}\mu_t + \frac{\bar{c}}{\tan\phi} \cdot \mu_c + \mu_0 \bar{p}_B^*} \tag{28}.$$

Ein möglicher Weg, die Gln.(26), (27) sowie die Nebenbedingung (21) zu erfüllen, ist folgender: für vorgegebene Werte $\bar{t}$, $\bar{c}/\tan\phi$ und $\omega = \omega_0$ sowie mit $\beta = \beta_{0_1}$ kann aus Gl.(26) der Wert $\frac{1}{\bar{p}^*}$ berechnet werden. Setzt man diesen Wert in Gl.(27) ein, so wird diese im allgemeinen nicht erfüllt sein. Mathematisch gesehen können aber die beiden Gln.(26) und (27) als eine implizite Gl. von der Form $F(\beta_0) = 0$ interpretiert werden, die am einfachsten durch ein numerisches Nullstellenprogramm gelöst werden kann.
Die Durchführung liefert

$$\beta = \beta_{0_n} = \beta_0$$

und der Gleitkreis liegt fest.
Aus den Gln.(9) und (11) ergeben sich die Werte μ_b, μ_c, μ_t und μ_0. Die Erfüllung der Nebenbedingung (21) ist identisch mit der Bedingung

$$\bar{p}^* = \bar{p}^*_B.$$

Interpretiert man also die sich aus Gl.(26) ergebende (dimensionslose) Spannung als Bruchspannung, so kann aus Gl.(28) $\tan\phi$ und damit die noch fehlende Größe $\bar{c} = \tan\phi \cdot (\frac{\bar{c}}{\tan\phi})$ bestimmt werden.
Diese Methode ist aber nur dann sinnvoll, wenn eine Parameterstudie durchgeführt werden soll, da ja der Scherwinkel und die Kohäsion nicht vorgegeben werden können. Wenn man aber alle Ergebnisse in Abhängigkeit von $\tan\phi$ auswertet und $\bar{t}$ und $\bar{c}$ als Scharparameter ansieht, ist man diesem Ziel einen weiteren Schritt näher. Störend ist jetzt nur noch, daß der Wert $\bar{c}$ (außer im Fall $\bar{c}=0$) nicht vorgegeben werden kann. Das ist aber dadurch leicht zu ändern, daß man bei vorgegebener Kohäsion $\bar{c}$ und angenommenem Scherwinkel ϕ_0 durch eine wiederholte Rekursionsrechnung den Wert ϕ so lange korrigiert, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Das Verfahren konvergiert sehr schnell; durch eine geeignete Überschätzung kann die Konvergenz im übrigen noch beschleunigt werden.
Durch eine volle Variation des Winkels ω_0 kann damit eine vollständige Parameterstudie durchgeführt werden.
Obwohl die vorgeschlagene Methode auf den ersten Blick etwas umständlich erscheinen mag, möchte der Verfasser darauf hinweisen, daß diese gemischt analytisch-numerische Minimalisierung sehr leicht programmiert werden kann und äußerst effizient ist. Vor allem sollte man beachten, daß eine zweidimensionale numerische Minimalisierung - und das ist im Prinzip die einzige Alternative -

um Größenordnungen rechenzeit-intensiver ist als das genannte Verfahren.
Für ein rein kohäsives Material, also für $\phi = 0$, versagt das Verfahren. Die rein analytische Methode (s.Anhang) liefert für diesen Fall die Lösung $\beta_0 = 0$ und $\omega_0 = 66{,}78^\circ$ und damit die Werte:

$$\lambda_b = 0 \; ; \quad \lambda_t = 1 \; ; \quad \lambda_c = 5{,}52; \; \eta_0 = 0$$

$$\bar{p}_B^* = \lambda_c \cdot \bar{c} \quad \text{bzw.} \quad \bar{p}_B = \lambda_c \bar{c} + \bar{t}$$

$$\eta_B = \frac{\lambda_c \bar{c}}{\bar{p} - \bar{t}} \; .$$

2.2.2 Eingeschränkte Variation

Zum Vergleich mit der Grundbruchberechnung nach DIN 4017 erschien es sinnvoll, außer der vollen Variation auch noch eine eingeschränkte Variation derart durchzuführen, daß der Gleitkreis im Eckpunkt des Fundaments mit der Gleitflächenrichtung in diesem Punkt identisch ist, wie sie sich aus der Mohr-Coulomb'schen Bruchbedingung ergibt, d.i. der Winkel $\omega_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$.
Damit sind die Anfangsneigung des Kreises und diejenige nach der Grundbruchfigur gleich. Infolgedessen sind die beiden unterschiedlichen Bruchfiguren unter dem Fundament, wo die größten Spannungen auftreten, einander ziemlich "ähnlich".
Die analytisch-numerische Variation erfolgt ebenso wie bei der im vorigen Abschnitt abgeleiteten vollen Variation der Gleitkreise. Da jedoch $\tan\phi$ vorgegeben ist und die Gln.(20) und (27) nicht mehr erfüllt werden müssen, ändert sich die Art vorzugehen gegenüber der bei der vollen Variation nur geringfügig; das Verfahren braucht daher nicht näher beschrieben zu werden.
Im Fall des rein kohäsiven Materials ergibt sich als maßgebender Kreis der Halbkreis mit dem Radius B und der Tragfähigkeitsbeiwert $\lambda_c = 2\pi$.

2.2.3 An die Grundbruchfigur angepaßter Gleitkreis

Bei den in den beiden vorausgehenden Abschnitten untersuchten Variationen der Gleitkreise unterscheiden sich die maßgebenden Kreise im Vergleich zur Grundbruchfigur nach DIN 4017 vor allem in der Größe, wie spätere vergleichende Auswertungen zeigten. Die maßgebenden Kreise sind hier fast durchweg kleiner als die vergleichbaren Grundbruchfiguren.

Es ist daher sinnvoll, außer den Kreisen nach Abschn.2.2.1 und 2.2.2 auch noch solche zu untersuchen, die der Grundbruchfigur weitgehend angepaßt sind. Der Verfasser hat hierzu die in Bild 6 dargestellte Konstruktion gewählt:

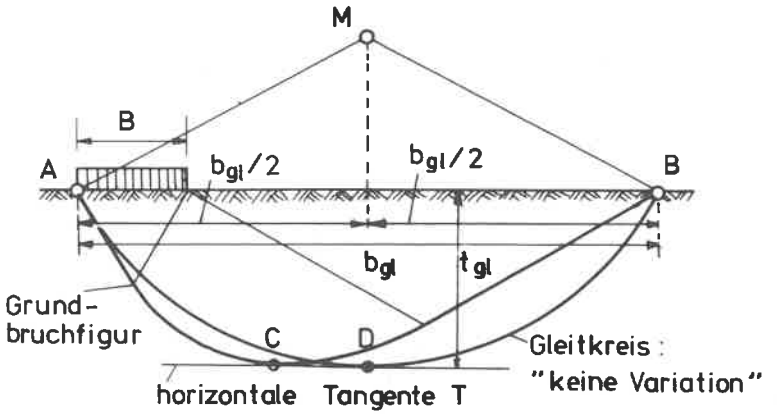

Bild 6: Konstruktion eines zur Grundbruchfigur nach DIN 4017 möglichst "ähnlich großen" Gleitkreises

Die Grundbruchfigur, bestehend aus einer Geraden, einer logarithmischen Spirale und einer Geraden geht durch die Punkte A, B und C. Die horizontale Entfernung des Punktes B vom Punkt A ist durch die Länge

$$b_{gl} = \{\exp(\frac{\pi}{2}\cdot\tan\phi)\cdot\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}) + 1\}\cdot B \qquad (29)$$

gegeben, die Tiefenlage des Punktes C durch

$$t_{gl} = \frac{\cos\phi\cdot\exp[(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})\cdot\tan\phi]}{2\cdot\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})}\cdot B \qquad (30).$$

Der gewählte Kreis soll durch die Punkte A und B gehen und die gleiche Tiefe erreichen wie die Grundbruchfigur, d.h. Kreis und Grundbruchfigur haben eine gemeinsame horizontale Tangente durch C, die den Kreis in D berührt. Diese Konstruktion des Kreises, die im folgenden häufig durch die Kurzbezeichnung "keine Variation" gekennzeichnet wird, gewährleistet vor allem bezüglich der Größe der beiden unterschiedlichen Bruchfiguren eine höchstmögliche Übereinstimmung. Die Berechnung der den Mittelpunkt M beschreibenden beiden Winkel ω und β kann aus den Größen b_{gl} und t_{gl} nach Bild 3 und Bild 6 durchgeführt werden.

Damit hängen sowohl die Tragfähigkeitsbeiwerte als auch der die

Sicherheitsdefinition beschreibende Wert η_0 hier ausschließlich vom Scherwinkel ϕ ab.

2.3 Einfluß der Spannungsverteilung infolge Fundamentlast

Die einfachste Methode zur Erfassung äußerer Kräfte beim Standsicherheitsnachweis von Böschungen und Geländesprüngen nach einem Lamellenverfahren ist die, daß man die Kraft ohne Berücksichtigung der durch sie ausgelösten Spannungsverteilung im Boden als eine am Monolithen angreifende Einzelkraft ansieht, die ein durch den Hebelarm zum Gleitkreismittelpunkt bestimmtes Moment verursacht. Man liegt dabei auf der sicheren Seite.
Wenn man weiter noch das rückdrehende Moment aus der Reaktions-Reibungskraft vernachlässigt, die der angreifenden Einzelkraft in der Gleitfuge entgegengesetzt ist, erhält man zwar nach der Böschungsbruch- und Grundbruchtheorie dieselbe Sicherheits-Definition ($\eta_0 = 0$), aber die Grundbruchlast nach der Böschungstheorie wird im Verhältnis zu derjenigen nach der Grundbruchtheorie so klein, daß man zu weit auf der sicheren Seite bleibt und demzufolge zu unwirtschaftlichen Lösungen kommt.
Bei Verkehrslasten oder Fundamentbelastungen geht man häufig etwas genauer - aber noch zu sehr auf der sicheren Seite liegend - so vor, daß man die daraus resultierende Vertikalkraft in die senkrecht darunter liegenden Lamellen einrechnet. Diese Annahme lag auch den vorstehenden Ableitungen zugrunde.
Eine weitere, relativ einfache Möglichkeit, die Verteilung der Vertikalspannungen aus Zusatzlasten entlang der Bruchfuge im Zustand vor dem Bruch zu ermitteln, gibt die Elastizitätstheorie.
Eine andere, in mancher Beziehung vorteilhaftere Methode ergibt sich aufgrund einer statisch bestimmten Spannungsverteilung von Smoltczyk [4]. Damit lassen sich näherungsweise unterschiedliche Sohlspannungsverteilungen und unterschiedliche Lastausbreitungswinkel berücksichtigen. Im folgenden soll dieser Ansatz gewählt werden, da es hier ja nur darum geht, den Einfluß unterschiedlicher Spannungsverteilungen auf die Standsicherheitsberechnung nachzuweisen.
Wenn man die im Versuch gemessenen Sohlspannungsverteilungen unter einem starren Fundament bei zunehmender Belastung betrachtet (Bild 7), erkennt man eine mit der Belastung fortschreitende

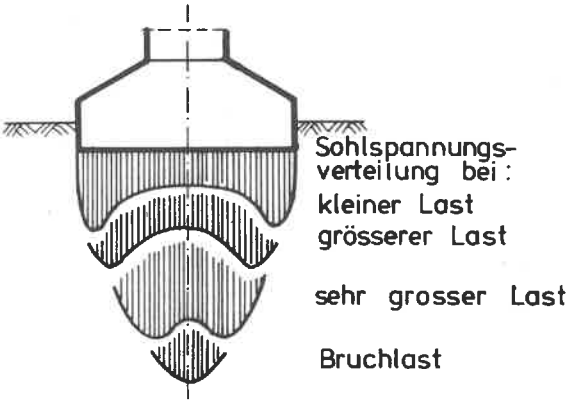

Bild 7:

Progressive Sohlspannungsumlagerung bei zunehmender Belastung eines starren Fundaments (schematisch)

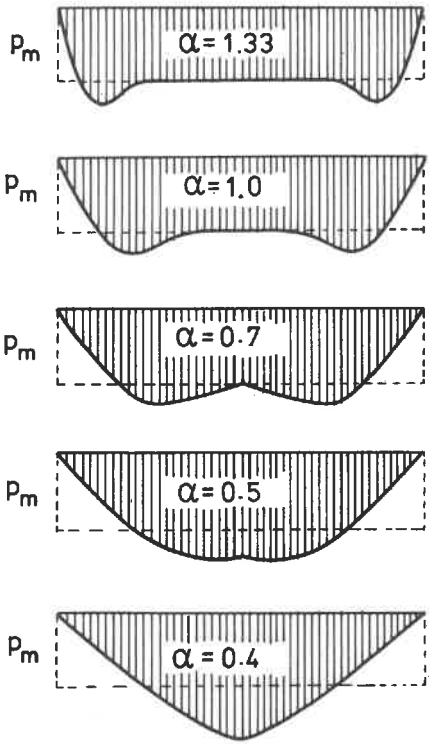

Bild 8:

Smoltczyk's Rechenmodell zur Erfassung der in Bild 7 skizzierten Sohlspannungsumlagerungen, siehe [4].

Umlagerung der Sohlspannungen zur Mitte hin. Die konsequente Berücksichtigung einer solchen progressiven Spannungsentwicklung bringt jedoch bei der Berechnung der Standsicherheit des Fundaments erhebliche Schwierigkeiten mit sich, da ja lastabhängige Spannungsfuntkionen angesetzt werden müßten. Stattdessen soll ein etwas einfacherer Weg eingeschlagen werden. Dabei sollen zwar unterschiedliche Sohlspannungsverteilungen berücksichtigt werden können, diese dann aber stets für den gesamten möglichen Lastbereich gelten. Wenn solche unterschiedlichen Sohlspannungsverteilungen z.B. - siehe Bild 8 - in der von Smoltczyk vorgeschlagenen Weise über einen Parameter α charakterisiert werden können, ergibt sich mit der weiter unten diskutierten Spannungsausbreitung bei der Anwendung der Böschungstheorie hinsichtlich der Bruchlast und der Sicherheitsdefinition der gleiche Aufbau des Berechnungsverfahrens wie bisher.

Für die Spannungsausbreitung wird ebenfalls von einer von Smoltczyk [4] abgeleiteten Beziehung ausgegangen: infolge einer Linienlast $\bar{p}$ ergeben sich nach Bild 9 innerhalb des Teilraums $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$ glockenförmige Vertikalspannungsverteilungen nach der Gleichung:

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = C \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{z}} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left\{\frac{h^2 u_0^2 u^2}{u_0^2 - u^2}\right\} \qquad (31)$$

mit $u_0 = \tan\vartheta_0$ und $u = \bar{x}/\bar{z}$.

Außerhalb des Teilraums, der von den Ebenen $+\vartheta_0$ und $-\vartheta_0$ begrenzt wird, sind alle Spannungen 0; Zugspannungen treten nicht auf.

Die Konstante C ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung $\bar{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\bar{z}\bar{z}}\, d\bar{x}$. Der "Konzentrationsfaktor" h, der die Form der Spannungsverteilung steuert, wird im folgenden nicht variiert, sondern stets konstant zu $h = \sqrt{1,5}$ angenommen.

Wenn man die Superponierbarkeit der Spannungen voraussetzt, ergeben sich die Vertikalspannungen, die eine Streifenlast verursacht, durch Integration der Gl.(31). Selbst im einfachsten Fall einer gleichmäßigen Belastung kann nicht geschlossen integriert werden. Eine numerische Integration mit Hilfe eines geeigneten Rechenprogramms ist aber ohne Schwierigkeit möglich. So zeigt Bild 10 eine Auswertung der Gl.(31) für den Fall der gleichmäßigen Sohldruckverteilung und $\vartheta_0 = 45^\circ$. Die Umrechnung dieser Spannung in eine vertikale Lamellenkraft ist ebenfalls aus Bild 10 ersichtlich.

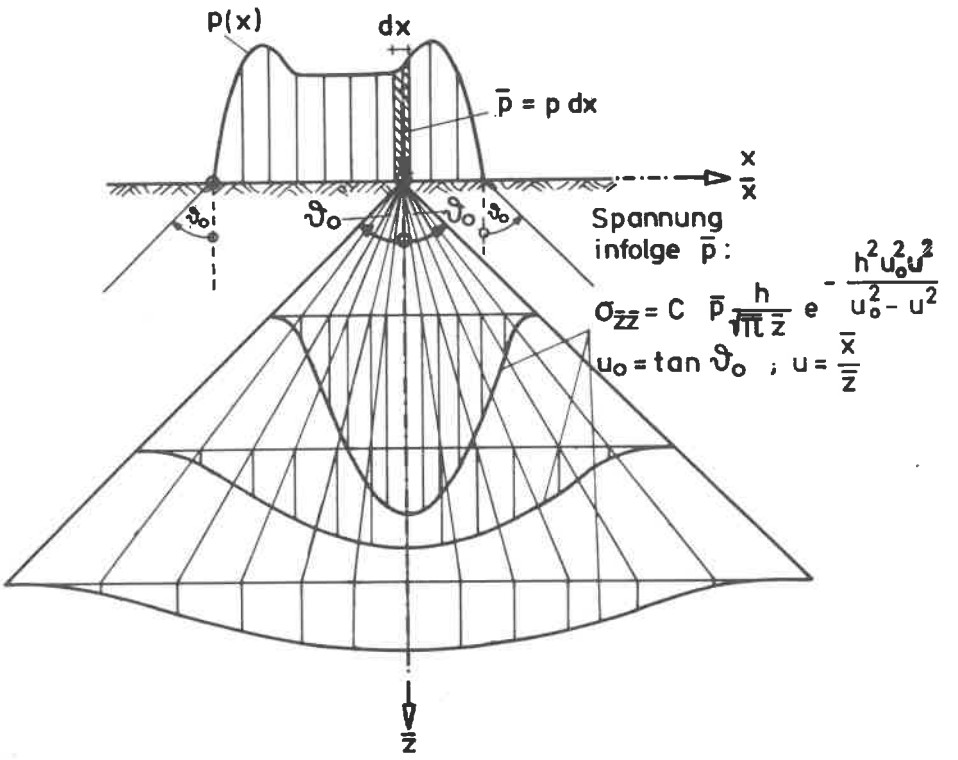

Bild 9: Statisch bestimmte Verteilungsfunktion für die Vertikalspannungskomponente im Halbraum nach Smoltczyk [4].

Bild 11 zeigt die Verteilung der Normalspannungen längs des Gleitkreises, die sich bei einer ungleichmäßigen Sohldruckverteilung auf diesem Wege ergibt.

Man erkennt aus den Bildern 10 und 11, wie schnell sich Randspannungs-Unstetigkeiten und Sohlspannungsspitzen mit zunehmender Entfernung vom Lastzentrum abbauen. Daraus resultiert - im Zusammenhang mit dem Ausbreitungsgesetz - eine sehr schwache Abhängigkeit der Spannungsverteilung am Gleitkreis von der Sohldruckverteilung bei größeren Ausbreitungswinkeln ϑ_o.

Die Berücksichtigung der so gewonnenen Zusatzkräfte infolge einer Fundamentlast bei der Berechnung der Grundbruchsicherheit nach der Böschungstheorie ist jetzt natürlich nicht mehr auf analytischem Wege möglich. Es bleibt daher nur wieder die ursprüngliche Formel

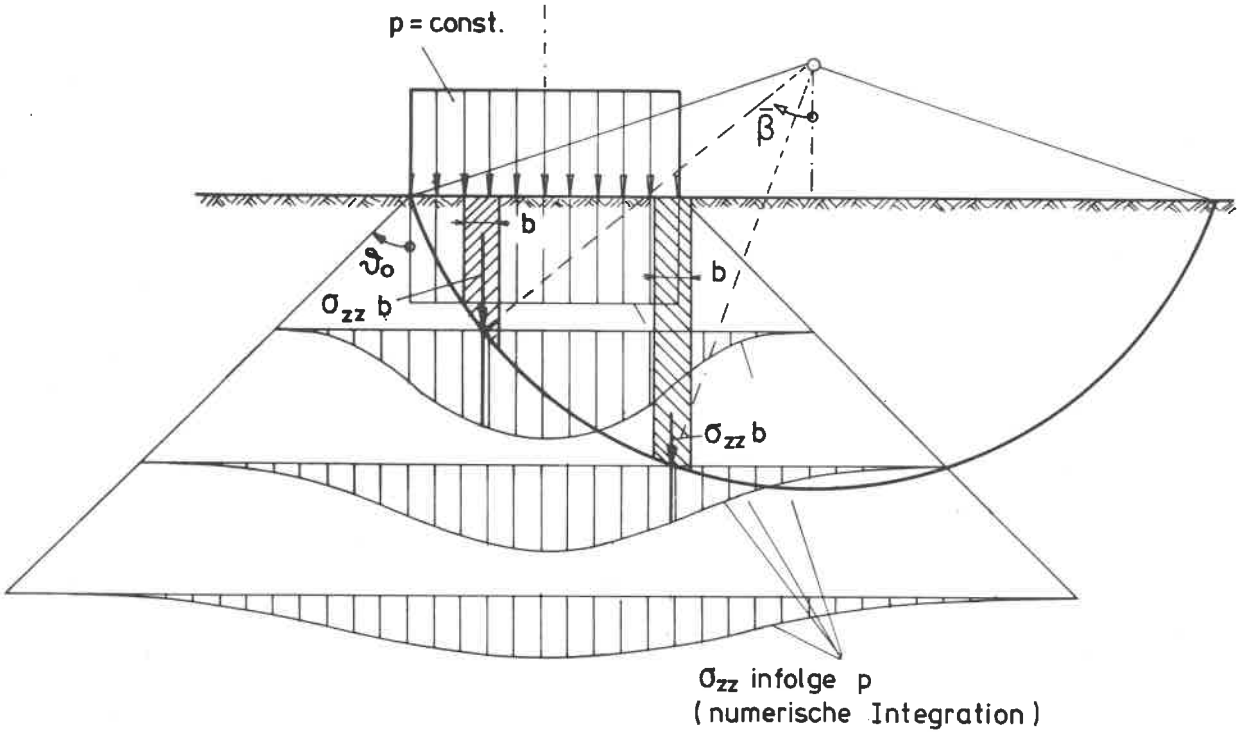

Bild 10: Statisch bestimmte Vertikalspannungsverteilungen nach Smoltczyk bei konstanter Sohlspannung und einem Ausbreitungswinkel $\vartheta_0 = 45°$

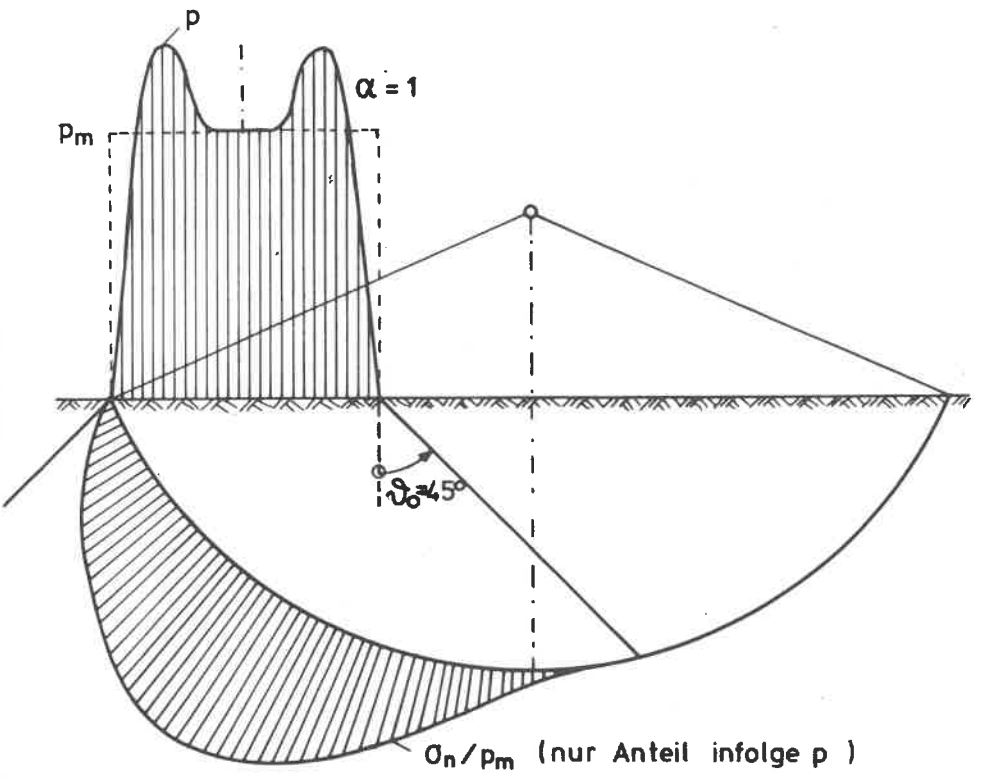

Bild 11: Statisch bestimmte Normalspannungsverteilung infolge einer ungleichmäßigen Sohldruckverteilung.

(6) zum Nachweis der Standsicherheit nach dem Lamellenverfahren. Da aber, wie schon angedeutet, die in Abschnitt 2.1 abgeleitete Form der Gleichungen (12) und (16) für die Bruchspannung und die Sicherheitsdefinition erhalten bleibt, können die Untersuchungen des Einflusses der Spannungsverteilung auf die Standsicherheit bzw. auf die Bruchspannung und den Wert η_0 genauso ausgewertet werden wie die analytische Lösung.

Allerdings ist hierfür ein Rechenprogramm erforderlich, das

- die Spannungen numerisch integriert,
- die Standsicherheit nach dem Lamellenverfahren berechnet,
- die Sicherheit durch Variation der Kreise bei Beachtung der Nebenbedingung $p = p_B$ numerisch minimalisiert.

Da für die vorgesehene Untersuchung mit vollständiger Variation der Parameter ϕ, ϑ_0 und α sehr viele Berechnungen durchgeführt werden sollten, mußten vor allem die Unterprogramme zur numerischen Integration und zur Minimalisierung sehr effizient sein. Hierfür war eine optimale Abstimmung der Iterationsschritte und Toleranzen erforderlich, um einmal die Anzahl der erforderlichen Rechenzyklen zu reduzieren und zum andern die gewünschte Genauigkeit der Ergebnisse zu erhalten.
Trotzdem war die Rechenzeit auf der Rechenanlage CDC 6600 erheblich.
Selbstverständlich soll dieses Verfahren nicht der Praxis vorgeschlagen werden. Die angesetzte Spannungsverteilung beschreibt jedoch über die beiden Parameter α und ϑ_0 eine solche Breite der möglichen Spannungsverteilungen, daß dem Verfasser der Rechenaufwand für die vorliegende Untersuchung gerechtfertigt erscheint.

Außerdem wurde vom Verfasser noch eine erweiterte Formel von Bishop für die Standsicherheit untersucht, welche die Berücksichtigung von Lamellenseitenkräften ermöglichte. Dabei wurden die Lamellenseitenkräfte durch numerische Integration aus den Verteilungsformeln von Smoltczyk [4] errechnet. Diese Ergebnisse waren aber nicht ganz zufriedenstellend. Positiv war, daß der Einfluß der Lamellenseitenkräfte auf die Ergebnisse vernachlässigbar gering war, so daß die Verwendung der vereinfachten Sicherheitsformel damit gerechtfertigt wurde. Leider ist aber diese Aussage mit einem gewissen Fragezeichen zu versehen, da die Berücksichtigung der Lamellenseitenkräfte nach dem Lamellenverfahren eine extrem genaue numerische Berechnung erforderte, die mit einer äußerst langen Rechenzeit verbunden war. Dadurch konnten nur Einzelfälle untersucht werden, bei denen die Frage nach der ausreichenden numerischen Genauigkeit auch nicht vollständig beantwortet werden konnte.
Ein weit sicherer Weg - unter Ausschaltung der hohen Rechenzeit und numerischen Unsicherheit - dürfte die analytische Behandlung der Lamellenseitenkräfte darstellen. Hierfür sind aber einfache und integrable Spannungsfunktionen erforderlich.
Da die erwähnten Untersuchungen nicht ausreichend gesichert erscheinen, sollen sie in diese Veröffentlichung nicht aufgenommen werden.

2.4 Auswertung

Die bisher abgeleiteten Beziehungen wurden vom Verfasser durch eine vollständige Parameterstudie für die Parameter

a. $\tan\phi$, $\bar{c}$, $\bar{t}$ bei { aa. "voller Kreisvariation"; ab. "eingeschränkter Kreisvariation"; ac. "keiner Kreisvariaiton"

sowie für

b. $\tan\phi$ α, ϑ_o, $\bar{c}=0$, $\bar{t}=0$ bei voller Kreisvariation

mit Hilfe von Rechenprogrammen durchgerechnet und ausgewertet. Die Ergebnisse wurden mit den entsprechenden Größen der DIN 4017 verglichen.

Aus der Vielzahl der Auswertungen sollen im vorliegenden Aufsatz nur die interessantesten und aussagekräftigsten Diagramme wiedergegeben werden.

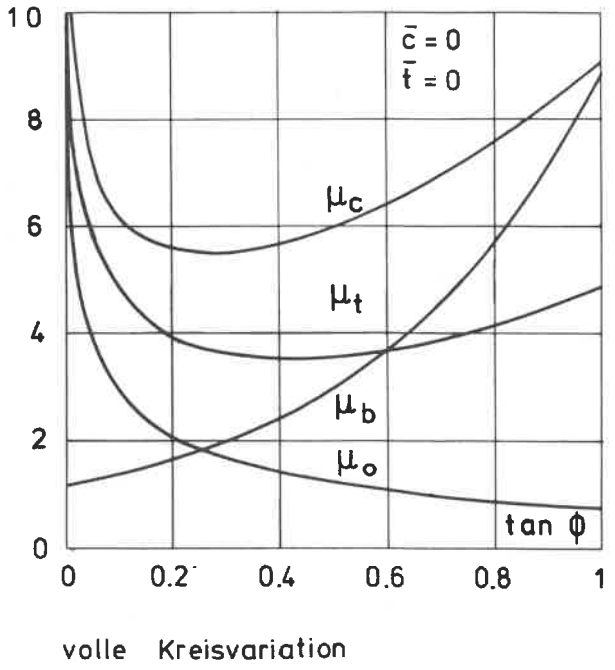

Bild 12: μ-Werte bei voller Kreisvariation in Abhängigkeit von $\tan\phi$.

Bild 12 zeigt zunächst die Abhängigkeit der Werte μ_b, μ_t, μ_c und μ_0 von $\tan \phi$ für den Sonderfall eines kohäsionslosen Bodens und fehlender seitlicher Auflast ($\bar{c} = 0$, $\bar{t} = 0$). Die Abhängigkeit dieser Werte vom Scherwinkel ϕ kommt hier nur dadurch zustande, daß die maßgebenden Kreise als Ergebnis der Minimalisierung stark von ϕ abhängig sind. Für ein- und denselben Kreis sind die μ-Werte nach den Gln.(9) und (11) nur von der Geometrie des jeweiligen Kreises abhängig.
Bei Scherwinkeln $\phi \to 0$ erkennt man eine plötzlich steil zunehmende Vergrößerung der Werte μ_t, μ_c und μ_0; nur μ_b hat einen Grenzwert. Der Anfangsbereich (ϕ sehr klein) ist aber hier, wie bei vielen der nachfolgenden Diagramme für den Grenzfall $\bar{c} = 0$, $\bar{t} = 0$ stets mit Vorsicht zu betrachten: zum einen kann man auf einem Boden ohne jede Scherfestigkeit nicht gründen, zum anderen ergeben sich für $\phi = 0$, $\bar{c} = 0$, $\bar{t} = 0$ unterschiedliche Grenzwerte, je nachdem, welche dieser Größen sich dem Wert 0 nähert, während die anderen 0 sind. Aus diesen Gründen ist hier der Anfangsbereich kleiner ϕ-Werte bei fehlender Kohäsion allenfalls von mathematischem Interesse. Das gilt auch für einige der folgenden Diagramme, bei denen dieser Zusammenhang nicht mehr gesondert erläutert wird.

Auf den Bildern 13 bis 15 sind die Tragfähigkeitsbeiwerte λ_b, λ_t und λ_c für die unterschiedlichen Kreisvariationen den Beiwerten der DIN 4017 gegenübergestellt. Auf den ersten Blick scheinen die Tragfähigkeitsbeiwerte alle recht gut übereinzustimmen. Der optische Eindruck täuscht aber etwas, da die gute Übereinstimmung teilweise eine Folge des halblogarithmischen Maßstabs ist. Der Anfangsbereich, der für die μ-Werte etwas kritisch war, hat für die Tragfähigkeitsbeiwerte auch im Sonderfall $\bar{c} = 0$, $\bar{t} = 0$ durchaus eine reale Bedeutung. Folgende Tendenzen lassen sich erkennen:

- die Unterschiede in den Ergebnissen bei voller und bei eingeschränkter Variation sind relativ gering, wobei die Tragfähigkeitsbeiwerte bei voller Variation natürlich die kleineren sind;
- die Beiwerte der DIN 4017 sind - mit Ausnahme von λ_t - bei kleinen Scherwinkeln ϕ unterhalb ca 15^o bis 20^o die kleinsten, werden dann aber größer als die mit dem Gleitkreisverfahren ermittelten, und zwar mit stark zunehmender Abweichung bei großen Scherwinkeln;

- die Gleitkreise ohne Variation liefern bei Scherwinkeln $\phi > 38^{o}$ die größten Tragfähigkeitsbeiwerte.

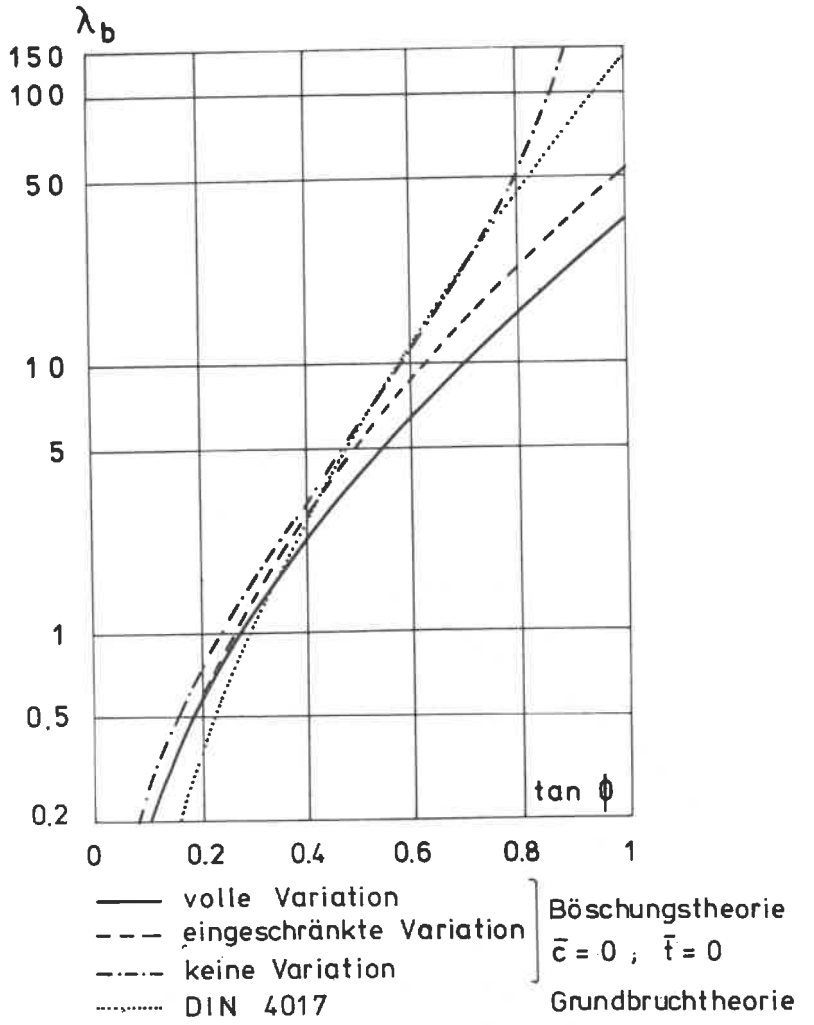

Bild 13: Tragfähigkeitsbeiwerte λ_b als Funktion von tan ϕ

Streng genommen sind diese Gegenüberstellungen nur für den Wert λ_b exakt, da die Bilder 13 bis 15 ja für den Sonderfall $\bar{c} = 0$, $\bar{t} = 0$ ausgewertet wurden. Wenn man für die allgemeineren Fälle $\bar{c} \neq 0$, $\bar{t} \neq 0$ die Tragfähigkeitsbeiwerte wiederum in Abhängigkeit von $\tan \phi$ auswertet, ergeben sich zwar unterschiedliche Beiwerte, die genannten Tendenzen bleiben aber im wesentlichen erhalten. Eine Untersuchung der Fälle $\bar{c} \neq 0$, $\bar{t} \neq 0$ soll erst später bei der Auswertung der gesamten Bruchspannung p_B durchgeführt werden.

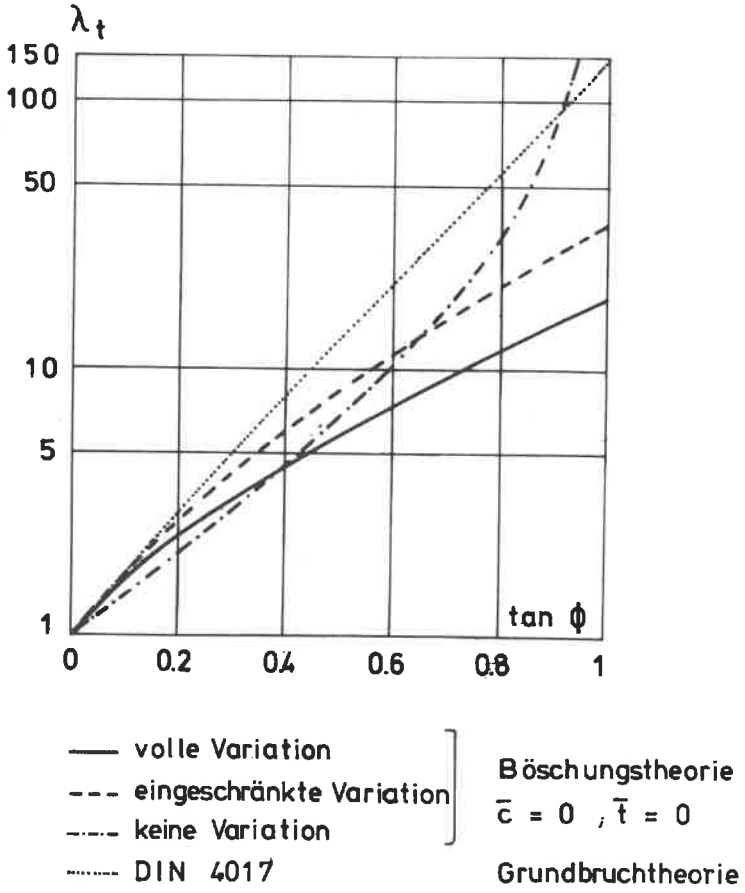

Bild 14: Tragfähigkeitsbeiwerte λ_t als Funktion von ϕ

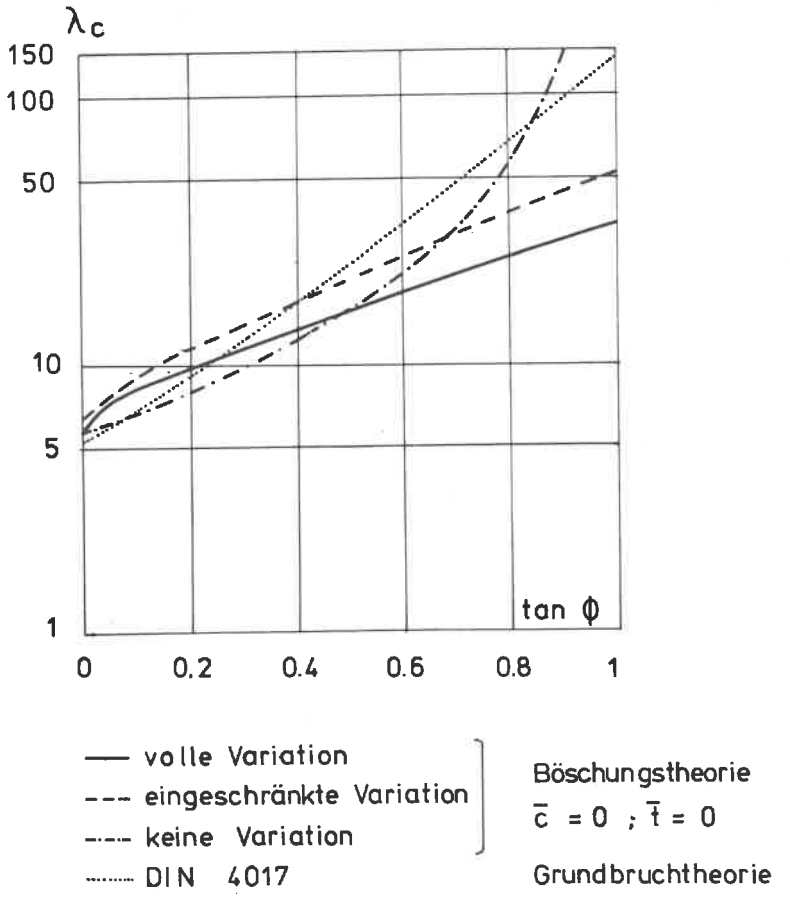

Bild 15: Tragfähigkeitsbeiwerte λ_c als Funktion von ϕ

In Bild 16 ist der Verlauf des die Sicherheitsdefinition stark beeinflussenden Wertes η_0 dargestellt. Für $\phi = 0$ ergibt sich hier auch $\eta_0 = 0$, d.h. hierfür sind die Sicherheitsdefinitionen für Grundbruch und Böschungsbruch gleich. Die Werte steigen mit zunehmendem Scherwinkel bis auf $\eta_0 = 0{,}73$ für $\phi = 45^\circ$ bei voller Kreisvariation an, bei den anderen Variationsarten sogar noch weiter. Der Leser sollte sich die Bedeutung des Wertes η_0 jetzt noch einmal anhand von Bild 4 klar machen: wenn die - um die seitliche Auflast verminderte - vorhandene Last p^* z.B. die Hälfte

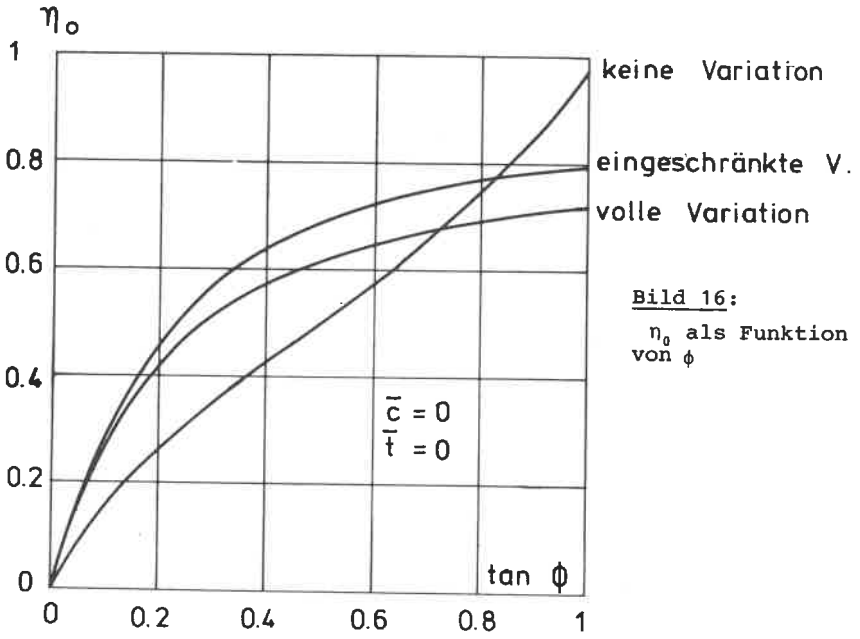

Bild 16:
η_o als Funktion von ϕ

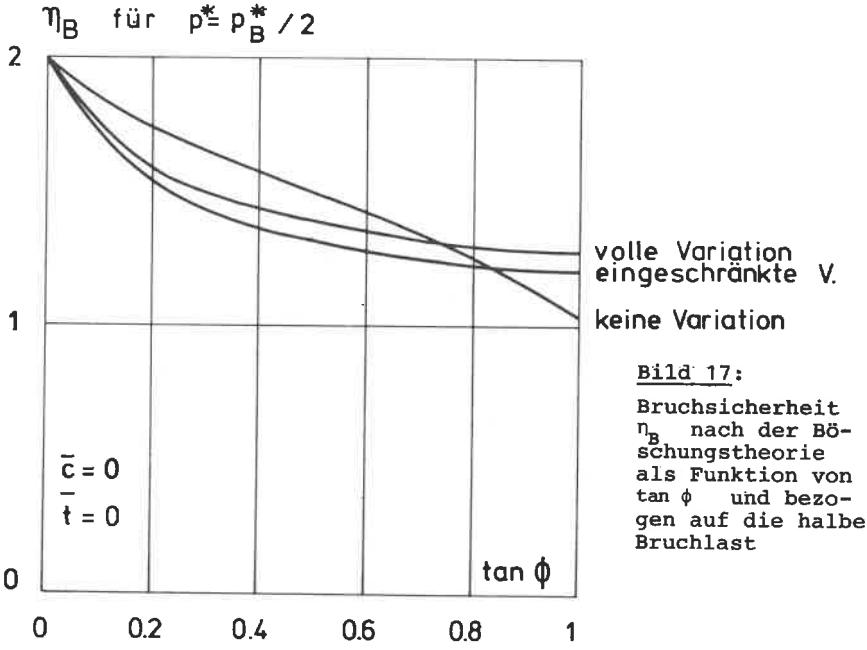

Bild 17:
Bruchsicherheit η_B nach der Böschungstheorie als Funktion von tan ϕ und bezogen auf die halbe Bruchlast

der Bruchlast nach der Böschungstheorie beträgt, erhöht sich die Böschungssicherheit η_B nicht etwa von dem Wert 1 auf 2, sondern sie beträgt nur

$$\eta_B = 2 - \eta_0 \quad \text{für} \quad p^* = \frac{p_B^*}{2} \tag{32}.$$

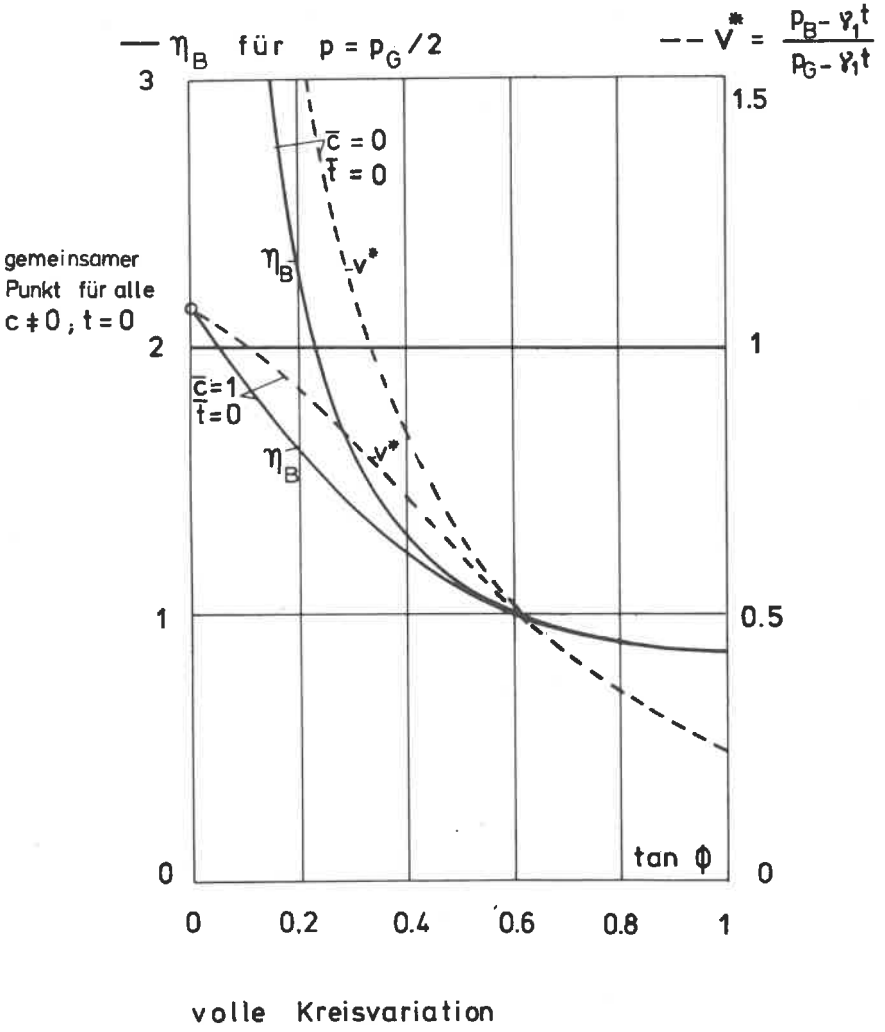

Bild 18: Vergleich der Sicherheitswerte bei voller Kreisvariation

Wenn die Ergebnisse von Bild 16 nach dieser Formel ausgewertet werden, zeigt sich die in Bild 17 dargestellte Abhängigkeit des Sicherheitswertes η_B vom Scherwinkel ϕ . Beginnend mit der Sicherheit $\eta_B = 2$ für $\phi = 0$ reduziert sich die Sicherheit bis auf den Wert 1,30 für $\phi = 45^o$ und für den Fall der vollen Kreisvariation. Bei den anderen Variationsarten ergeben sich teilweise sogar noch kleinere Werte η_B. Bei der Interpretation der Ergebnisse ist aber hier noch Vorsicht geboten, da bei den einzelnen Variationsarten stets die jeweilige Bruchspannung (für den entsprechenden Scherwinkel) eingesetzt wurde und die Bruchspannung je nach Variation unterschiedlich ist.

Deshalb läßt Bild 17 nur den Einfluß der einzelnen Variationsarten auf die Sicherheitsdefinition erkennen, nicht aber den Einfluß auf die Sicherheit selbst bei stets gleichen und nur von ϕ abhängigen Bruchspannungen. Als Vergleichs-Bruchspannung eignet sich hier beispielsweise die Bruchspannung nach DIN 4017.

In Bild 18 sind deswegen sowohl die Sicherheit η_B nach der Böschungstheorie, und zwar für den Fall der vollen Variation und für eine zweifache Bruchsicherheit nach DIN 4017, als auch die Größe der Bruchspannung, bzw. ihr Verhältnis zur vergleichbaren Bruchspannung nach der Grundbruchtheorie dargestellt. Ein Wert $v^* < 1$ bedeutet also, daß die Bruchspannung - abgemindert um die seitliche Auflast -kleiner ist als die vergleichbare nach der Grundbruchtheorie. Man beachte, daß sich für $\phi = 45^o$ $v^* = 0{,}25$ ergibt!

Der unterschiedliche Maßstab für η_B und v^* mit $\eta_B = 2v^*$ erlaubt im Zusammenhang mit Gl.(18), den Einfluß des Wertes η_0 zu erkennen. Aus Gl.(18) folgt nämlich, wenn man die seitliche Auflast vernachlässigt, $\eta_B = 2v^*(1 - \eta_0) + \eta_0$ für $p = p_G/2$.

Wenn die beiden Werte η_B und v^* also in dieser Weise dargestellt werden, erkennt man aus der Abweichung der gestrichelten Kurven für v^* von den durchgezogenen Linien für η_B den Einfluß des Wertes η_0. Es ist aber zu beachten, daß sich auch für $v^* = 0{,}5$ bzw. $\eta_B = 1$ ein gemeinsamer Punkt für η_B und v^* ergibt.

Die Auswertung erfolgte in Bild 18 sowohl für einen kohäsionslosen wie für einen Boden mit Kohäsion. Die großen Werte für η_B und v^* bei kleinen Scherwinkeln haben im Fall des kohäsionslosen Materials keine reale Bedeutung. Da nämlich der Grenzwert für die Bruchspannung $\lim_{\phi \to 0} p_G = 0$ und $\lim_{\phi \to 0} p_B = 0$ für $\bar{c} = 0$, $\bar{t} = 0$ für bei-

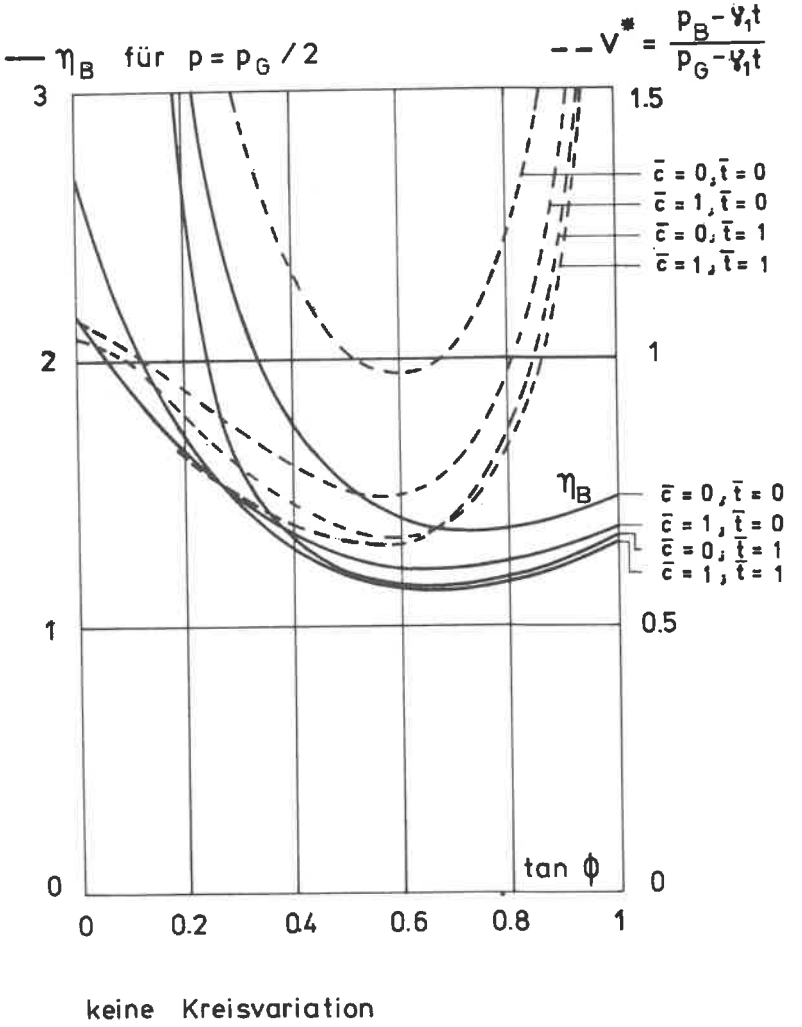

Bild 19: Vergleich der Sicherheitswerte bei "ähnlich großen" Bruchfiguren

de Theorien gilt, die Bruchspannungen bzw. die Tragfähigkeitsbeiwerte λ_b aber auf unterschiedliche Weise 0 werden. Wie aus Bild 13 ersichtlich, ergibt sich hier für η_B und v* ein asymptotisches Verhalten für $\phi \to 0$.

Die Auswertungen im Fall $\bar{c} \neq 0$ gelten jedoch für alle Scherwinkel, da sich hier für $\phi \to 0$ ein endlicher Grenzwert ergibt.

Wenn man für diesen Fall den Verlauf von η_B als Funktion von ϕ betrachtet, zeigt sich eine monotone Abnahme für $p = p_G/2$ vom Wert $\eta_B = 2{,}15$ bei $\phi = 0$ auf $\eta_B = 0{,}86$ bei $\phi = 45^o$. Man sieht weiter, daß der Einfluß der Kohäsion mit zunehmendem Scherwinkel verschwindet.

Bild 19 zeigt eine entsprechende Darstellung für den Fall ohne Kreisvariation. Die Bruchkreise entsprechen also in ihrer Größe den Bruchfiguren nach der Grundbruchtheorie. Sowohl die Bruchspannungen als auch die Sicherheitswerte haben eine teilweise andere Tendenz als im Fall der vollen Kreisvariation. Der Verhältniswert v* der Bruchspannungen sinkt zunächst vom Wert 1,07 bei $\phi = 0$ auf Werte $v^* \sim 0{,}65$ bis 0,75 bei ϕ um 30^o ab und steigt anschließend bei höheren Scherwinkeln wieder stark auf Werte $v^* > 1{,}5$ an. Die entsprechenden Sicherheiten sinken bei fehlender seitlicher Auflast vom Wert $\eta_B = 2{,}15$ auf Werte zwischen 1,1 und 1,35 bei einem Scherwinkel von ungefähr 35^o und steigen dann schwach an auf Werte zwischen 1,3 und 1,5 bei $\phi = 45^o$. Die unterschiedlichen Anfangswerte für η_B bei $\bar{t} \neq 0$ sind eine Folge der Annahme, daß $p = p_G/2$ ist. Bei kleinen Bruchspannungen wirkt sich die unterschiedliche Definition der Sicherheit - ob nämlich $p = p_G/2$ oder ob $p - \gamma_1 t = (p_G - \gamma_1 t)/2$ gewählt wird - über den Wert $\bar{t}$ relativ stark auf das Ergebnis aus.

Bemerkenswert ist vor allem der große Unterschied zwischen den miteinander vergleichbaren η_B - und v*-Kurven. Obwohl die Bruchspannungen nach der Böschungstheorie bei größeren Scherwinkeln ϕ größer sind als diejenigen nach der Grundbruchtheorie, ergeben sich bei halber Grundbruchlast nach der Grundbruchtheorie wesentlich kleinere Sicherheitswerte als 2, nämlich Werte zwischen 1,1 und 1,5. Das kommt von den relativ großen η_0-Werten, d.h. ist eine Konsequenz aus der unterschiedlichen Sicherheitsdefinition in den beiden Theorien.

Den bisherigen Auswertungen (Bilder 12 bis 19) lag immer die Annahme zugrunde, daß die Sohldruckverteilung unterhalb des Fundaments gleichmäßig sei und sich die Zusatzspannungen aus p nicht ausbreiteten. Im folgenden soll auch der Einfluß der Spannungsausbreitung berücksichtigt werden.

Bezüglich der Sohldruckverteilung wurde in Abschnitt 2.3 festgestellt, daß ihr Einfluß (beschrieben durch den Wert α , s.Bild 8) vernachlässigbar gering war. Bei der für α und den Ausbreitungs-

winkel ϑ_0 durchgeführten Parametervariation ergab sich nur bei sehr kleinen Winkeln ϑ_0 eine merkbare Beeinflussung der Ergebnisse durch die Sohldruckverteilung. Dies sei hier ohne Beleg angeführt, da es sich auch qualitativ unmittelbar aus dem Prinzip von de St.Venant folgern läßt. Den Untersuchungen zum Einfluß der Spannungsverteilung kann deswegen stets eine gleichmäßige Sohldruckverteilung zugrundegelegt werden.

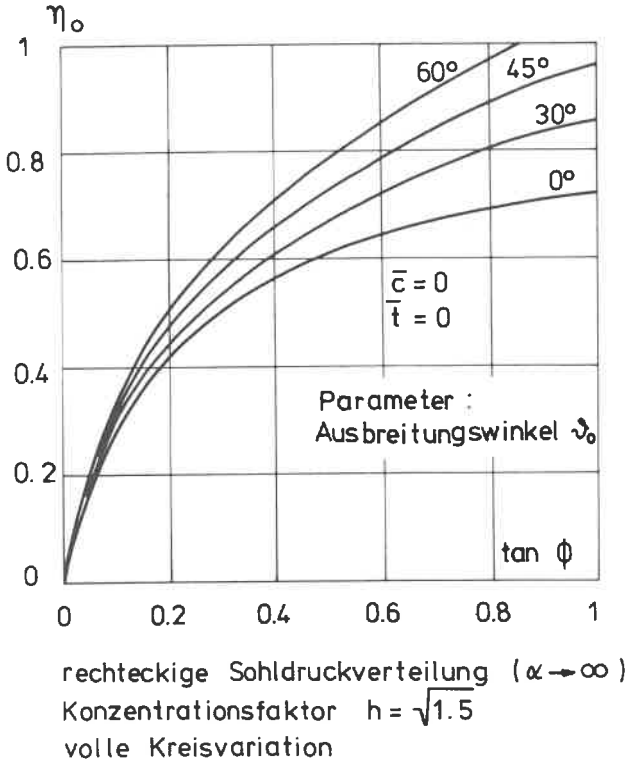

Bild 20: Einfluß der Spannungsausbreitung auf η_0

Der Einfluß des Ausbreitungswinkels ϑ_0 auf den Wert η_0 ist aus Bild 20 ersichtlich. Es zeigt sich, daß η_0 bei zunehmendem Ausbreitungswinkel größer wird. Außerdem nimmt die Abweichung zur Vergleichskurve $\vartheta_0 = 0$ mit dem Scherwinkel ϕ zu. Bei $\vartheta_0 = 60^\circ$ ergeben sich rechnerisch sogar größere Werte als 1. Das widerspricht der Erfahrung, denn der Wert $\eta_0 = 1$ würde bedeuten, daß die Sicherheit bei zunehmender Belastung wächst und somit kein

Grundbruch eintritt. Für die rechnerischen Werte $\eta_0 > 1$ gibt es mehrere Erklärungen: einmal dürfte sich hier die mangelhafte Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen in der Böschungstheorie bemerkbar machen und zum anderen dürften sie auf die angenommene Kreisform der Bruchfuge zurückzuführen sein. Die Ergebnisse sind also für Ausbreitungswinkel $\vartheta_0 > 50^\circ$ im Bereich großer Scherwinkel offenbar nicht mehr verwendbar, zumal Winkel $\vartheta_0 > 45^\circ$ nach bodenmechanischer Erfahrung wegen der schwachen Schubkopplung der Bodenteilchen nicht zu erwarten sind. Dieser Effekt des örtlichen plastischen Fließens bleibt bekanntlich in der Grundbruchberechnung unberücksichtigt, wo der Bruchkörper als monolithische Scheibe aufgefaßt wird.

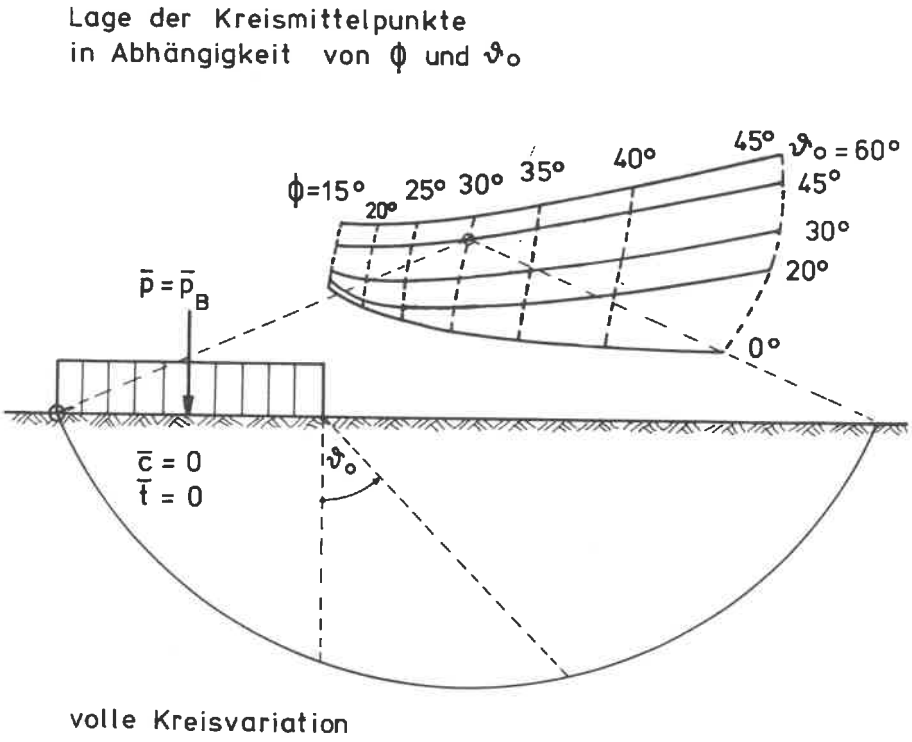

Bild 21: Lage der maßgebenden Kreismittelpunkte bei voller Variation in Abhängigkeit von ϑ_0 und ϕ.

In Bild 21 ist die Lage der maßgebenden Kreismittelpunkte in Abhängigkeit vom Spannungsausbreitungswinkel und vom Scherwinkel

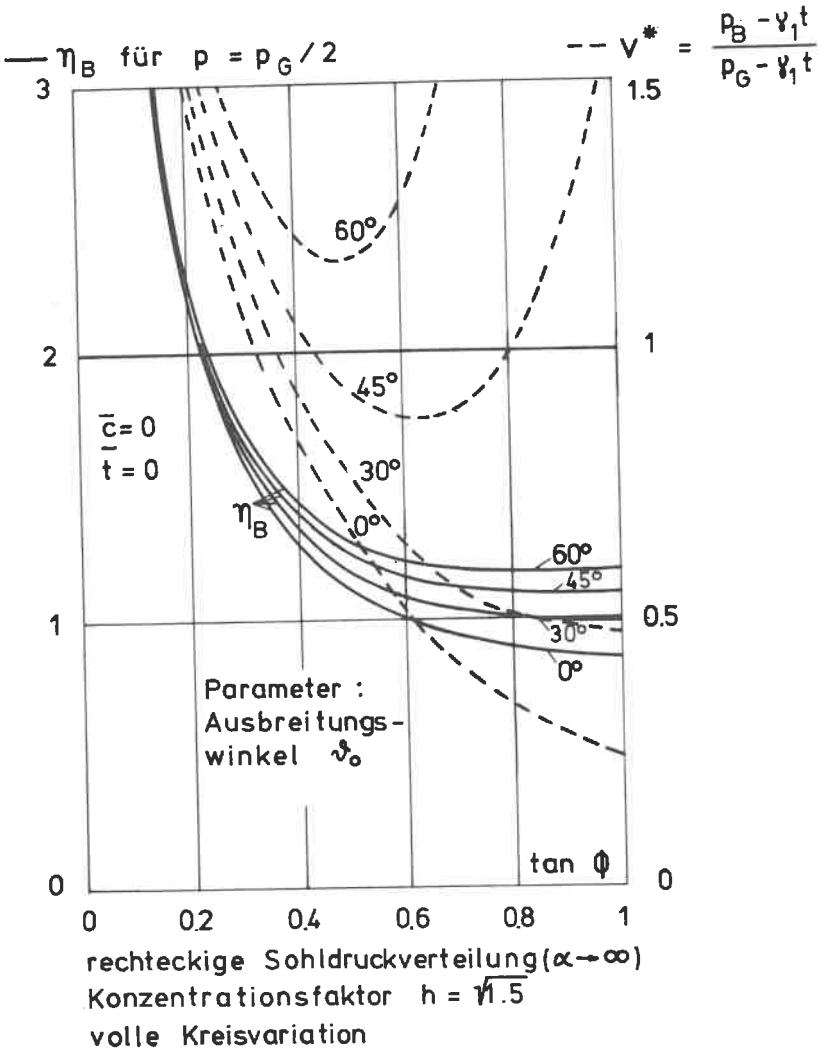

Bild 22: Vergleich der Sicherheitswerte bei voller Kreisvariation unter Berücksichtigung der Spannungsausbreitung

dargestellt.
Bild 22 zeigt wieder für $p = p_G/2$ die Böschungsstandsicherheit η_B und den Verhältniswert v* und ihre Abhängigkeit von ϕ und ϑ_o. Schon der Vergleich der großen Werte η_0 (für große Werte ϕ) in Bild 20 mit den entsprechenden Werten des Falles "keine Variation" in Bild 16 läßt vermuten, daß sich auch η_B und v* einigermaßen analog zu den in Bild 19 erkennbaren Tendenzen verhalten dürften. Während also die Bruchspannungen für Ausbreitungswinkel $\vartheta_o > 40^o$ bei großen Scherwinkeln stark ansteigen, ergibt sich für die Sicherheitswerte η_B bei halber Grundbruchlast eine wesentlich gleichmäßigere Tendenz. Die Sicherheiten sinken für $\phi = 45^o$ auf ihre Tiefstwerte zwischen $\eta_B = 0{,}85$ und 1,2.

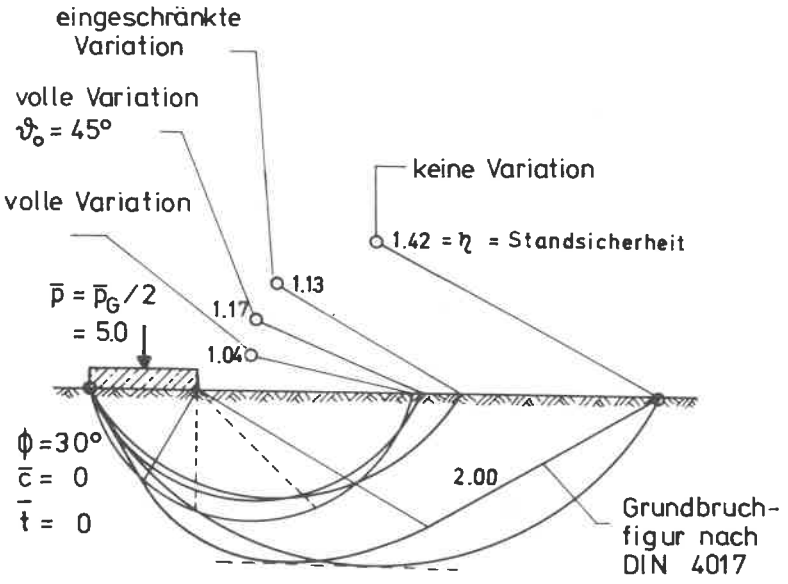

Bild 23: Grundbruchfiguren nach DIN 4017 und nach den 3 Ansätzen des Verfassers

Tabelle 1 zeigt für $\phi = 30^o$ und drei ausgewählte Kombinationen der Werte für die Kohäsion und die seitliche Auflast die wesentlichen Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen in einer vergleichenden Gegenüberstellung. Man erkennt beispielsweise, daß für $\bar{t} = 0$ und $\bar{c} = 0$ die (dimensionslose) Bruchspannung im Fall des nach DIN 4017 berechneten Grundbruchs und die sich aus der Gleit-

Tabelle 1 Vergleich ausgewählter Werte-Kombinationen

$\bar{c}$=o $\bar{t}$=o Φ=3o°	$\bar{p}_b$	η für $\bar{p}=\bar{p}_G/2$ =5.o	v^*	λ_b	λ_t	λ_c	η_o	ω °
volle Variation	5.7	1.o4	o.56	5.7	6.9	17.6	o.64	77.3
eingeschr. Variation	7.4	1.13	o.74	7.4	1o.8	24.1	o.72	6o.o
volle V. ϑ_o=45°	9.o	1.17	o.9o	9.o	12.1	28.1	o.78	66.4
keine Variation	9.8	1.42	o.97	9.8	9.2	2o.2	o.55	61.9
Grundbruch DIN 4o17	1o.o	2.oo	1.oo	1o.o	18.4	3o.1	o.oo	6o.o

$\bar{c}$=1 $\bar{t}$=o Φ=3o°	$\bar{p}_b$	η für $\bar{p}=\bar{p}_G/2$ =2o.1	v^*	λ_b	λ_t	λ_c	η_o	ω °
volle Variation	21.6	1.o3	o.54	6.1	6.o	15.5	o.54	8o.2
eingeschr. Variation	29.5	1.17	o.74	8.o	9.8	21.5	o.64	6o.o
keine Variation	3o.o	1.22	o.75	9.8	9.2	2o.2	o.55	61.9
Grundbruch DIN 4o17	4o.2	2.oo	1.oo	1o.o	18.4	3o.1	o.oo	6o.o

$\bar{c}$=1 $\bar{t}$=1 Φ=3o°	$\bar{p}_b$	η für $\bar{p}=\bar{p}_G/2$ =29.3	v^*	λ_b	λ_t	λ_c	η_o	ω^o
volle Variation	27.8	o.98	o.47	6.3	6.o	15.4	o.52	81.9
eingeschr. Variation	39.3	1.12	o.67	8.1	9.7	21.4	o.64	6o.o
keine Variation	39.2	1.15	o.66	9.8	9.2	2o.2	o.55	61.9
Grundbruch DIN 4o17	58.6	2.oo	1.oo	1o.o	18.4	3o.1	o.oo	6o.o

kreisberechnung ohne Variation ergebende fast gleich groß sind. Für die Halbe Grundbruchlast müßte sich also bei gleicher Sicherheitsdefinition jedesmal der Wert 2 für die Sicherheit ergeben. Da aber unterschiedliche Definitionen zugrundeliegen, erhält man beim Gleitkreisverfahren nur einen Wert von 1,42. Auch bei der vollen Kreisvariation und bei einem Ausbreitungswinkel $\vartheta_0 = 45^\circ$ ergibt der Vergleich mit DIN 4017 ähnlich große Bruchspannungen, während die Sicherheit für die halbe Bruchspannung nur 1,17 beträgt.

Bei der vollen Variation und $\vartheta_0 = 0$ bekommt man für alle drei in Tabelle 1 wiedergegebenen Kombinationen der Werte $\bar{t}$ und $\bar{c}$ stets ungefähr nur halb so große Bruchspannungen wie nach der Grundbruchtheorie; die Sicherheitswerte sinken entsprechend auf Werte um 1 ab.

Bild 23 zeigt für $\bar{t} = 0$ und $\bar{c} = 0$ für $\phi = 30^\circ$ die maßgebenden Bruchfiguren. Die Bruchfiguren bei Variation der Prüffläche sind wesentlich kleiner als die ohne Variation ermittelten.

Die wichtigsten Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Die in der Grundbruchtheorie zunächst empirisch angesetzte additive Dreigliedrigkeit der Bruchlast ergibt sich auch bei Anwendung der Böschungstheorie auf das Grundbruchproblem.
2. Für ein rein kohäsives Material ergibt sich eine gute Übereinstimmung der beiden Theorien bezüglich Bruchlast, Bruchkörper und Sicherheitsdefinition.
3. Die Sohlspannungsverteilung unter dem Fundament ist ohne nennenswerten Einfluß auf die Standsicherheit.
4. Die Ausbreitung der vom Fundament im Boden verursachten Spannungen und die geometrischen Vorgaben für die Variation der Gleitkreise wirken sich bei Anwendung der Böschungstheorie auf das Grundbruchproblem mit wachsendem Scherwinkel ϕ zunehmend stark auf sämtliche Ergebnisse aus. Im einzelnen wurden folgende Haupttendenzen festgestellt:

4.1 Bei der Variation der Gleitkreise und Verzicht auf die Berücksichtigung der Spannungsausbreitung ergeben sich stets zu kleine Bruchspannungen im Vergleich zu denen nach DIN 4017 (im Extremfall nur 25% bei $\phi = 45^0$). Die Böschungssicherheit sinkt bei Ansatz der halben Grundbruchspannung von 2,15 bei rein

kohäsiven Böden monoton ab auf $\eta_B = 0{,}85$ für Böden mit einem Scherwinkel $\phi = 45^0$.

4.2 Bei zur Grundbruchfigur vergleichbar großen Bruchkreisen ergeben sich bei großen Scherwinkeln sogar größere Bruchlasten als nach der Grundbruchtheorie. Der Einfluß der verschiedenartigen Sicherheitsdefinitionen ist aber so stark, daß sich bei Ansatz der halben Grundbruchlast in diesen Fällen trotzdem nur Sicherheitswerte um 1,3 ergeben.

4.3 Bei Berücksichtigung der Spannungsausbreitung erhöhen sich die Bruchspannungen mit zunehmendem Ausbreitungswinkel und wachsendem Scherwinkel. Wegen der Verschiedenartigkeit der Sicherheitsdefinitionen nehmen jedoch die auf die halbe Grundbruchlast bezogenen Sicherheitswerte mit dem Scherwinkel ϕ ab.

4.4 Bei der Variation der Gleitkreise sind die vergleichbaren Bruchkörper beider Theorien mit wachsendem Scherwinkel zunehmend unterschiedlich. Die Gleitkreise sind hierbei stets kleiner als die Grundbruchfigur.

3. Schlußfolgerungen

Da es sich beim Grundbruch und beim Böschungsbruch physikalisch um den gleichen Bruchvorgang handelt, erscheint es sinnvoll, zum Nachweis der jeweiligen Standsicherheit eine einheitliche Theorie bzw. ein einheitliches Rechenverfahren anzuwenden; und zwar vor allem deswegen, weil es viele praktische Fälle gibt, die sich weder in das eine noch in das andere Gedankenmodell klar einfügen lassen.

Die Grundbruchtheorie würde nur über Verfahren der Plastizitätstheorie eine Erweiterung zur Erfassung der komplizierteren Probleme gestatten. Eine Anwendung solcher Verfahren auf wirkliche Aufgabenstellungen ist aber überhaupt nicht praktikabel.

Wenn man also eine einheitliche Berechnungsweise anstrebt, dürfte die Anpassung der Böschungstheorie an die Besonderheiten der Grundbruchaufgabe einfacher sein als der umgekehrte Weg.

Hierzu ist es aber zunächst erforderlich, daß man bei endlicher Ausdehnung der Fundamente (im Gegensatz zu den in der Böschungstheorie als unendlich lang angesehenen Böschungen) einen Formfaktor einführt, der dann sinngemäß auf die Sicherheit anzuwenden wäre. Dies ist prinzipiell kein Problem, denn - ausgehend von den

in der Grundbruchtheorie entwickelten Formbeiwerten könnte man sich wahrscheinlich schnell auf einen mittleren Formbeiwert einigen, der dann nur noch von der Grundrißform des Fundaments abhinge.
Der Einfluß horizontaler Kräfte, der nach der Grundbruchtheorie über Neigungsbeiwerte erfaßt wird, kann bei Anwendung der Böschungstheorie leicht über äußere Momente berücksichtigt werden, wie das in DIN 4084 empfohlen wird. Nur der Einfluß der horizontalen Spannungen auf die Lamellenseiten, bzw. die Erfassung der durch horizontale Lasten bei Reibungsböden entstehenden zusätzlichen Reaktions-Scherkräfte in der Gleitfuge dürfte nicht so einfach sein. Aber auch hier könnte man sich bei der Abschätzung der Reaktionskräfte auf einfache, statisch bestimmte Näherungslösungen beschränken.
Die Exzentrizität resultierender Fundamentkräfte, die in der Grundbruchtheorie durch eine reduzierte Ersatzfläche erfaßt wird, kann bei Anwendung der Böschungstheorie wesentlich korrekter über äußere Momente berücksichtigt werden.
Damit bleibt also hauptsächlich das Problem des nahtlosen Übergangs bei den geforderten Sicherheitswerten, d.i. 2,0 bei Grundbruchberechnungen und 1,4 bei Nachweisen der Böschungssicherheit.

Vorweg einige Überlegungen des Verfassers, die nicht nur die beiden Theorien, sondern auch die Ergebnisse der experimentellen Erforschung des Grundbruchproblems [5] einbeziehen.

- Beim Vergleich der experimentell bestimmten Grundbruchlasten mit denen nach der Grundbruchtheorie stellt man neuerdings eine ausreichende, teilweise sogar gute Übereinstimmung fest.
- Beim Vergleich der Größe der Bruchkörper beobachtet man - wie auch bei wirklichen Grundbrüchen - daß die der Grundbruchtheorie zugrundegelegte Bruchfigur in ihren Abmessungen die Größe der gemessenen teilweise beträchtlich übersteigt.
- Eine Spannungsausbreitung infolge der Fundamentlast wird bei den Lamellenverfahren der Böschungstheorie praktisch nicht berücksichtigt.
- Die Bruchbedingung, die den beiden Theorien zugrundeliegt, ist identisch.

Von diesen Feststellungen ausgehend und auf Grund der vorgelegten Untersuchungsergebnisse, vor allem wegen des starken Einflusses der Spannungsausbreitung auf die Bruchlast, schließt der Verfas-

ser, daß die gute Übereinstimmung der Bruchlasten, die nach DIN 4017 errechnet und im Versuch gemessen werden, auf zwei einander entgegenwirkende Tendenzen zurückzuführen ist: einerseits sind die Bruchkörper in der Rechnung zu groß, so daß sich auch zu große Bruchlasten ergeben; andererseits bleibt der Einfluß der Spannungsausbreitung unberücksichtigt, wodurch die rechnerischen Bruchlasten zu klein ausfallen.

Würde man also jetzt die Böschungstheorie anwenden, die bei Variation der Gleitkreise kleinere und mit der Wirklichkeit besser übereinstimmende Bruchkörperformen zugrundelegt und keine Spannungsausbreitung berücksichtigt, so erhielte man voraussichtlich zu kleine Bruchlasten.
Diese Interpretation deckt sich mit den Ergebnissen der vorliegenden theoretischen Untersuchungen und den bekannten experimentellen Ergebnissen.
Nur ist leider die Frage der Spannungsverteilung nicht geklärt, da es sich bei genauer Betrachtung theoretisch um ein hochgradig statisch unbestimmtes Problem handelt. Auch die Spannungsverteilung auf Grund der Plastizitätstheorie bietet keine zufriedenstellende Lösung, da sich der betrachtete Bruchkörper im Bruchzustand sicher nicht in einem voll-plastifizierten Zustand befindet, wie das die Theorie voraussetzt. Die Elastizitätstheorie liefert - u.a. auch wegen des Auftretens von Zugspannungen - ebenfalls keine befriedigende Alternative.
Die vom Verfasser untersuchten Spannungsverteilungen, die alle zum mindesten plausibel erscheinen, ergeben aber so unterschiedliche Bruchspannungen, daß eine Festlegung auf eine bestimmte Form der Abschätzung teilweise willkürlich oder zufällig sein könnte.
Auch die Suche nach einer Antwort auf experimentellem Wege empfiehlt sich nur bedingt, da sie sich schwer verallgemeinern ließe.
So kann man allenfalls versuchen, theoretische Untersuchungen des Zustands bis hin zum Bruch unter Verwendung nicht-linearer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen anzustellen. Wie in Abschnitt 1 schon erwähnt, sind die Ergebnisse solcher Betrachtungen noch zu ungesichert, als daß man sie jetzt schon ohne weiteres übernehmen könnte; auf jeden Fall sind sie aber so aufwendig, daß sie für die meisten praktischen Probleme aus wirtschaftlichen Gründen nicht in Frage kommen.

Außer dem Verfahren, eine plausible Spannungsverteilung anzunehmen, bleibt schließlich immer noch die Möglichkeit, eine bewußt stark vereinfachte und so falsche Spannungsverteilung in Kauf zu nehmen, d.h. die Fundamentlast nur in die senkrecht darunter liegenden Lamellen einzurechnen.
Um dann aber zu ähnlich großen zulässigen Spannungen wie nach der Grundbruchberechnung zu gelangen, müßte man die geforderte Sicherheit aus zwei Gründen vom Scherwinkel abhängig machen:

- Die unterschiedlichen Sicherheitsdefinitionen von Böschungstheorie und Grundbruchtheorie liefern z.B. nach Bild 17 eine von ϕ abhängige Sicherheit - auch wenn die halbe Grundbruchlast nach der Böschungstheorie zugrundegelegt wird.
- Durch die Vernachlässigung der Spannungsausbreitung ergeben sich bei wachsendem Scherwinkel in zunehmendem Grade zu kleine Bruchlasten.

Um diesen verschiedenen Gesichtspunkten gerecht zu werden, müßte man die geforderte Sicherheit derart vom Scherwinkel abhängig machen, daß der Sicherheitswert von 2 bei $\phi = 0$ auf einen wesentlich kleineren Wert bei $\phi = 45^0$ abnimmt. Eine einfache Möglichkeit, dies formelmäßig darzustellen, wäre beispielsweise durch den Ansatz

$$\text{erf } \eta_B = 2 - \tan \phi \qquad (33)$$

gegeben. In Bild 24 ist diese Gleichung grafisch dargestellt. Man erkennt, daß man damit - jedenfalls für die bisher hier behandelten lotrechten Fundamentlasten - durchweg gegenüber der derzeitigen DIN 4017 auf der sicheren Seite läge, obwohl die geforderte Sicherheit bei $\phi = 45^0$ dann rechnerisch nur noch 1,0 betragen würde. Gl.(33) ist nicht nur plausibel, sondern hat auch eine gewisse theoretische Grundlage. Ersetzt man nämlich in Gl.(32) den Wert η_0 nach Gl.(14), so ergibt sich

$$\eta_B = 2 - \mu_0 \cdot \tan \phi \qquad \text{für } p^* = p^*_B/2,$$

wobei μ_0 direkt nur noch von der Geometrie des Kreises abhängt und auch den Wert $\mu_0 = 1$ durchläuft.
Auch wenn man sich auf ein einfaches Verfahren einigen könnte, die Verteilung der von der Fundamentlast verursachten Bodenspannungen besser zu erfassen als die Annahme der nur senkrechten Krafteinleitung, erhielte man einen vom Scherwinkel abhängigen Sicher-

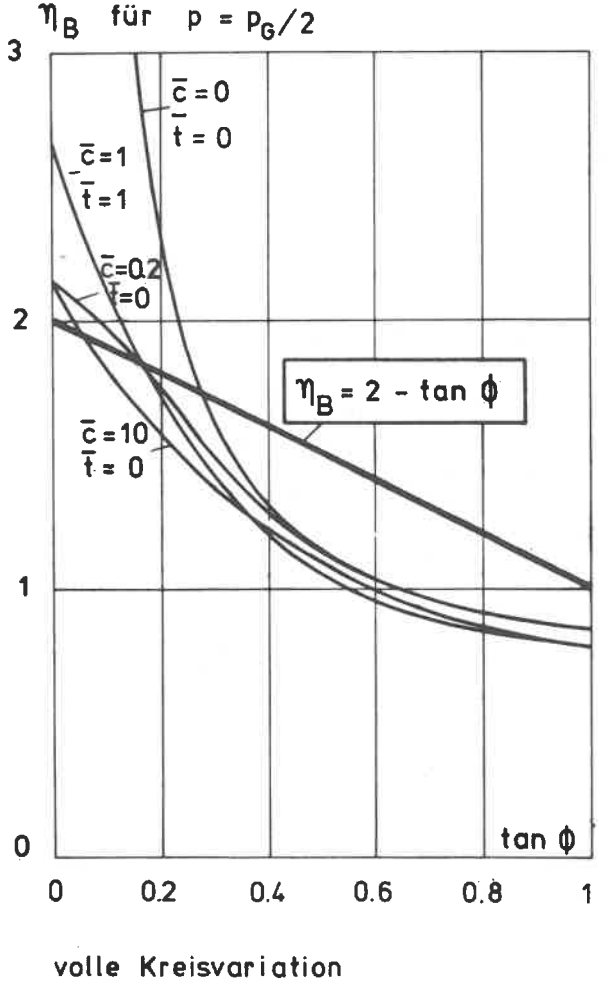

Bild 24:

Bruchsicherheit η_B, bezogen auf die halbe Grundbruchlast und bei voller Kreisvariation im Vergleich mit der Näherung nach Gl.(33).

heitswert (s.Bild 22). Da die Berücksichtigung einer Spannungsausbreitung die rechnerische Sicherheit wieder auf zweifache Weise beeinflußt, nämlich über die Sicherheitsdefinition und über die geänderte Bruchspannung, müßten hier allerdings höhere Sicherheitswerte verlangt werden als bei der Rechnung nach der einfachen Annahme.

Eine weitere - hypothetische - Möglichkeit, unter Beibehaltung des Lamellenverfahrens die zulässige Spannung gegenüber derjenigen bei

voller Kreisvariation zu erhöhen, wäre der Verzicht auf die Variation. Der Verfasser lehnt diese Möglichkeit aber ab, da die Böschungstheorie immer in Verbindung mit einer Variationsrechnung gesehen werden sollte und außerdem diese Art des Vorgehens zu viele innere Widersprüche enthielte.

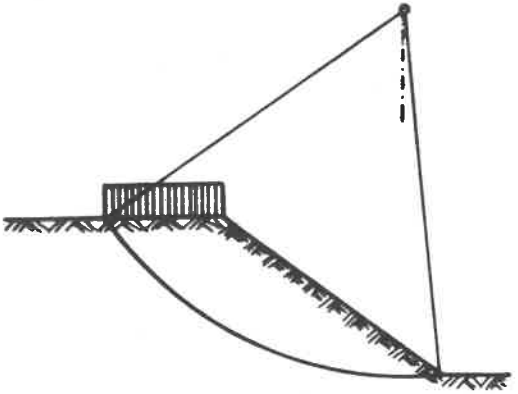

Bild 25:
Belastete Böschung

Der Übergang vom Grundbruchproblem zum Böschungsproblem wäre aber noch immer unstetig. Wenn man die in Bild 25 skizzierte belastete Böschung untersucht, ist die Frage nach der erforderlichen Sicherheit immer noch offen. Denkbar wäre ein Vorgehen, die Standsicherheit einmal ohne und einmal mit Fundamentlast nachzuweisen: ist die Standsicherheit der unbelasteten Böschung nach DIN 4084 mit $\text{erf}\,\eta = 1{,}4$ nachgewiesen, dann sollte die für die belastete Böschung zu fordernde Sicherheit vom Scherwinkel abhängig gemacht werden. Gleichzeitig sollte der Sicherheitsunterschied einen gewissen Prozentsatz der jeweils maßgebenden Sicherheit nicht überschreiten. Diese Fragen müssen jedoch noch eingehend diskutiert und dann von den zuständigen Normenausschüssen entschieden werden.

Der Verfasser kommt auf Grund seiner Untersuchungen zu dem Ergebnis, daß es möglich und zweckmäßig ist, die jetzige DIN 4084 zur Berechnung der Standsicherheit von Böschungen und Geländesprüngen um den Anwendungsfall "Grundbruch" zu erweitern und dann die DIN 4017 zu streichen. Um den Vorteil der bisher sehr einfachen Berechnungsweise nach DIN 4017 für Regelfälle zu erhalten, müßten jedoch Diagramme auf der Grundlage der Böschungstheorie nach DIN 4084 berechnet werden.

Wenn man sich zu einer solchen Lösung entschließen könnte, blieben die Vorteile beider Normen erhalten und man hätte gleichzeitig die Nachteile und Unsicherheiten bei der Berechnung komplizierter Grundbruchaufgaben ausgemerzt.

Abschließend möchte sich der Verfasser bei Herrn Dipl.-Ing. W. Gauger bedanken, der bei der Erstellung des Rechenprogramms zur Berücksichtigung des Einflusses der Spannungsausbreitung wertvolle Arbeit leistete.

Literaturnachweis

[1] Heyman, J. (1973), *Simple plastic theory applied to soil mechanics*
Proceedings Symposium Plasticity and Soil Mechanics Cambridge, 161 - 173

[2] Eigenberger,K.(1972),*Standsicherheit von Böschungen, Teil I u.II*
Mitt.Inst.Bodenmech.Felsmech.Grundbau der Techn.Hochschule Graz

[3] Bishop,A. (1954), *The use of the slip circle in the stability analysis of slopes*
Proceedings Europ.Conf. on Stability of Earth Slopes Stockholm, vol.I,

[4] Smoltczyk,U.(1966),*Deutung großmaßstäblicher Grundbruchversuche durch statistische Spannungszustände*
Vorträge Baugrundtagung München, 57-96

[5] Muhs,H./Weiß,K. et al. Mitteilungen der Degebo Hefte 16 und 22-29 (1963 - 1973), Berlin

A N H A N G

Formeln zur vollständigen Variation

Aus Gl. (9) ergibt sich

$$f_b = \frac{\bar{f}_b}{\bar{g}_b} \quad \text{mit den Abkürzungen}$$

$$\bar{f}_b = 2\left(\sin\omega - \frac{1}{3}\sin^3\omega - \frac{\omega}{2}\cdot\cos\omega - \frac{1}{4}\cdot\sin 2\omega\cdot\cos\omega \right)$$

$$\bar{g}_b = \sin\omega - \sin\beta$$

Daraus folgen die Ableitungen:

$$f_{b,\omega} = \frac{\bar{g}_b\,\bar{f}_{b,\omega} - \bar{g}_{b,\omega}\,\bar{f}_b}{\bar{g}_b^2}$$

$$f_{b,\beta} = -\frac{\bar{g}_{b,\beta}\cdot\bar{f}_b}{\bar{g}_b^2}$$

$$\bar{f}_{b,\omega} = \cos\omega\cdot(1 - \cos 2\omega) + \sin\omega\cdot\left(\omega - \frac{1}{2}\sin 2\omega\right) \qquad \text{(A1)}$$

$$\bar{g}_{b,\omega} = \cos\omega$$

$$\bar{g}_{b,\beta} = -\cos\beta$$

$$f_{t,\omega} = 1 + \cos 2\omega$$

$$f_{t,\beta} = 0$$

$$f_{c,\omega} = 2$$

$$f_{c,\beta} = 0$$

$$f_{o,\omega} = \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos 2\omega)$$

$$f_{o,\beta} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta)$$

$$g_{o,\omega} = \frac{1}{2}\cdot\sin 2\omega$$

$$g_{o,\beta} = -\frac{1}{2}\cdot\sin 2\beta$$

Sonderfall: $\tan \phi = 0$

Aus Gl.(10) folgt

$$\eta_B = \frac{c}{p - \gamma_1 t} \cdot \frac{f_c}{g_o}$$

Wegen $\eta_{B,\beta} = 0$ ist $g_{o,\beta} \cdot f_c = 0$ (A2)

und wegen $\eta_{B,\omega} = 0$ $g_o \cdot f_{c,\omega} - g_{o,\omega} \cdot f_c = 0$ (A3)

Mit den Ableitungen (A1) folgt zunächst aus (A2)

$$\omega \cdot \sin 2\omega = 0 \quad (A4)$$

und daraus $\beta_0 = 0$ für das Minimum von η_B.

Aus (A3) folgt

$$\sin^2\omega - \omega \cdot \sin 2\omega = \sin^2\beta$$

und mit (A4)

$$\omega - \frac{1}{2} \cdot \tan\omega = 0 \quad (A5)$$

Die Auflösung dieser impliziten Gleichung ergibt

$$\omega_0 = 66{,}78^\circ \quad \text{bzw. im Bogenmaß } 1{,}16556. \quad (A6).$$

Bild A1 zeigt die beiden maßgebenden Bruchfiguren nach der Grundbruch- und nach der Böschungsbruchtheorie für diesen Sonderfall.

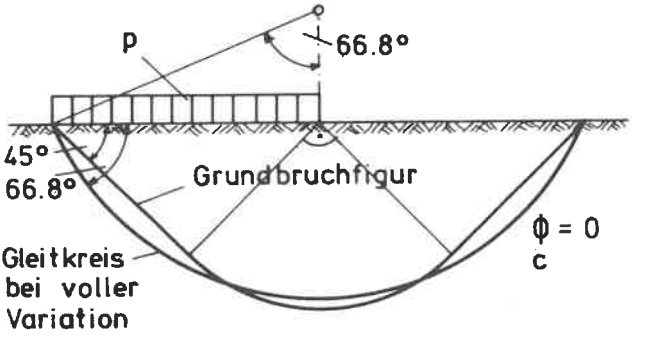

Bild A1: Vergleich der Grundbruchfiguren für den Sonderfall $\phi = 0$.

Weitere Veröffentlichungen des Baugrundinstituts und seiner Mitarbeiter

---

[1] Smoltczyk,U. (1974) *Studienunterlagen*
330 Seiten, broschiert DM 25,-

[2] Gußmann,P. (1973) *Ausgleichsvorgänge eindimensionaler Strömungen bei beliebiger Anfangsbedingung unter besonderer Berücksichtigung der Konsolidation einseitig dränierter Tonschichten*
Die Bautechnik 50, 20-25 Sonderdruck

[3] Thamm,B.R. (1973) *Die "Cam-Clay"-Theorie und das "Critical-State"-Konzept*
Der Bauingenieur 48, 311 - 314 Sonderdruck

[4] Gußmann,P./ Spotka,H. (1973) *Eindimensionale Konsolidation mehrschichtiger Tonböden*
Die Bautechnik 50, 265 - 272 Sonderdruck

[5] Thamm,B.R. (1973) *Anwendung der Finite-Element-Methode zur Berechnung von Spannungen in wassergesättigten Böden*
Der Bauingenieur 48, 370 - 374 Sonderdruck

[6] Gußmann,P. (1974) *Different methods of evaluating the influence of seepage forces on slope stability*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2, 61-73

[7] Gußmann,P./ Schad,H. (1974) *Practical considerations in the application of finite element techniques to soil problems*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2,74-90

[8] Gußmann,P./ Spotka,H. (1974) *One-dimensional consolidation of multi-layered clays*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2,91-102

[9] Gußmann,P./Thamm,B. (1974) *Two-dimensional consolidation of triaxial test specimen*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2,103-117

[10] Schad,H. et al. (1974) *Stresses in concrete caisson bells*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2,118-121

[11] Smoltczyk,U. (1974) *Improved technique for foundations on slopes*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2, 122-129

[12] Smoltczyk,U./(1974) Diem,P./Spotka,H. *Pressure cell for the measurement of normal and shear tests*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2,130-136

[13] Smoltczyk,U./(1974) Ljöterud,L. *Stabilizing sand grains by overhead water pressure in bell bottoms of caisson piles*
Deutsche Beiträge zur Geotechnik Nr.2,137-141

Die Nrn.6 - 13 enthält das o.g. Heft 2, das von der Deutschen Gesellschaft für Erd-und Grundbau e.V.,Essen, zum Preise von DM 20,- verkauft wird

[14] Smoltczyk,U. et al. (1975) *Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente in der Grundbaupraxis*
CAD-Berichte Heft 1 der Gesellschaft für Kernforschung Karlsruhe (Sonderdruck)

[15] Gußmann,P./ Thamm,B.R. (1974) *Zweidimensionale Konsolidation dreiaxialer Versuchsproben*
Der Bauingenieur 49, 293 - 298 (Sonderdruck)

[16] Gußmann,P. (1974) *Über den Einfluß unterschiedlicher Wasserdruckansätze auf die Standsicherheit von durchströmten Böschungen*
Der Bauingenieur 49, 298-301 (Sonderdruck)

[17] Smoltczyk,U./ Gußmann,P./Schulz,H. (1974) *DIN 4084 Beiblatt Erläuterungen und Berechnungsbeispiele*
20 S., Beuth-Verlag Berlin/Köln DM 18,-

MITTEILUNGEN DES BAUGRUNDINSTITUTS STUTTGART

Herausgegeben von Prof.Dr.-Ing.U.Smoltczyk

Nr.1 Bernd Thamm,
Anfangssetzungen und Anfangsporenwasserüberdrücke eines normalverdichteten wassergesättigten Tones

Preis: DM 10,--

Nr.2 Peter Gußmann,
Einheitliche Berechnung von Grundbruch und Böschungsbruch

Preis: DM 5,--